Лабораторная работа №1

Тема:

Теория погрешностей

1. Источники и классификация погрешности

Под **погрешностью** понимается некоторая величина, характеризующая точность результата.

Выделяют три вида погрешностей:

- **1. Неустранимая погрешность** – эта погрешность связана с ошибками в исходной информации. Причинами этих ошибок могут быть, например, неточность измерений, невозможность представления некоторой величины конечной дробью.
- **2. Погрешность метода** связана с тем, что точные операторы и исходные данные заменяются приближенными. Например, заменяют интеграл суммой, производную – разностью, функцию – многочленом или строят бесконечный итерационный процесс, который обрывают после конечного числа итераций.
- **3. Погрешность вычислений** возникает при округлении промежуточных и конечных результатов.

2. Абсолютная и относительная погрешности

Пусть x – точное значение величины, а x^* – ее приближенное значение.

- **Абсолютной погрешностью** числа x^* называется наименьшая величина, удовлетворяющая условию $|x - x^*| \le \Delta x^*$, т.е. точное значение величины лежит в интервале $x^* - \Delta x^* \le x \le x^* + \Delta x^*$.
- **Относительной погрешностью** называется величина δx^*, удовлетворяющая условию $\left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \le \delta x^*$ или $\frac{\Delta x^*}{|x^*|} \le \delta x^*$.
- **Относительную погрешность** часто выражают в процентах. Для этого необходимо величину δx^* умножить на 100%.

3. Верные значащие цифры

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева, например:

- 1) $x = 2{,}396029$ - все цифры значащие;
- 2) $x = 0{,}00267$ – значащие только $2,\ 6,\ 7$; первые три нуля незначащие, т.к. они служат вспомогательной цели – определению положения цифр $2,\ 6,\ 7$, поэтому может быть принята запись $x = 2{,}67 \cdot 10^{-3}$;
- 3) $x = 2270000$ и $x = 2{,}27 \cdot 10^{6}$. В первой записи все семь цифр (и последние четыре нуля) значащие, во второй – значащие только $2,\ 2,\ 7$.

Верные значащие цифры. Значащая цифра называется **верной**, если абсолютная погрешность числа не превосходит $1/2$ единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1. Пусть $x^* = 12,396$ и известно, что $\Delta x^* = 0,03$. Определить число верных значащих цифр у числа x^*.

Имеем: $\Delta x^* > \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$; $\Delta x^* > \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ и $\Delta x^* < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$.

Значит, у числа x^* верные знаки 1, 2, 3, а 9 и 6 – сомнительные.

Пример 2. Определить число верных значащих цифр у числа x^*.
Пусть $x^* = 9,999785$ и $\Delta x^* = 4 \cdot 10^{-4}$.

Так как $\Delta x^* = 0,4 \cdot 10^{-3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$, то у числа x^* три знака после запятой верные.

Правила округления

При записи чисел руководствуются следующим правилом: *все значащие цифры должны быть верными*. Поэтому округление чисел, записанных в десятичной системе, производится по *правилу первой отбрасываемой цифры*:

- если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставляемые десятичные знаки сохраняются без изменения;
- если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу;
- **Примеры.** Округлить числа:

1) 1,2537≈1,25, m=3 – количество верных значащих цифр;

2) 1,2563≈1,26, m=3;   3) 2,36566≈2,37, m=3;

4. Прямая задача теории погрешностей:

- Оценить погрешность вычисления значений функции по заданной погрешности аргументов.

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - непрерывно дифференцируемая функция, где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$;

$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ - приближенные значения аргументов, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in G$

$\Delta x_i^*, \; i = \overline{1, n}$

- абсолютные погрешности аргументов.

$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ ная погрешность вычисления значения функции в точке

равна

$$\Delta y^* = \left| y - y^* \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \right| \Delta x_i^* . \qquad (1.1)$$

Относительная погрешность значения f в точке $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ равна

$$\delta y^* = \frac{\Delta y^*}{\left| f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \right|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{f(x_1^*, \ldots, x_n^*)} \right| \Delta x_i^* . \qquad (1.2)$$

Погрешность результатов арифметических операций

Погрешность суммы. *Абсолютная погрешность алгебраической суммы приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей этих чисел.*

Пусть $y = x_1^* + x_2^*$, тогда $\Delta y = \Delta x_1^* + \Delta x_2^*$. (1.3)

Погрешность разности. *Абсолютная погрешность разности* $x_1^* - x_2^*$ *приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого* x_1^* *и вычитаемого* x_2^*.

Пусть $y = x_1^* - x_2^*$, тогда $\Delta y = \Delta x_1^* + \Delta x_2^*$. (1.4)

Погрешность произведения. Пусть $y = x_1 \cdot x_2$, известны Δx_i^* и x_i^*, $i = 1,2$, тогда абсолютная погрешность произведения вычисляется по формуле

$$\Delta y^* = |x_1^*|\Delta x_2^* + |x_2^*|\Delta x_1^* \quad (1.5)$$

Погрешность частного. Пусть $y = \dfrac{x_1}{x_2}$. Очевидно, что

$$\Delta y^* = \frac{\Delta x_1^* \left| x_2^* \right| + \Delta x_2^* \left| x_1^* \right|}{\left(x_2^* \right)^2}. \qquad (1.6)$$

Из формул (1.3) – (1.6) выводятся формулы для соответствующих **относительных погрешностей**:

$$\delta(x_1^* + x_2^*) = \frac{\Delta x_1^* + \Delta x_2^*}{\left| x_1^* + x_2^* \right|} = \frac{\left| x_1^* \right| \Delta x_1^*}{\left| x_1^* + x_2^* \right| \left| x_1^* \right|} + \frac{\left| x_2^* \right| \Delta x_2^*}{\left| x_1^* + x_2^* \right| \left| x_2^* \right|} = \frac{\left| x_1^* \right| \delta x_1^* + \left| x_2^* \right| \delta x_2^*}{\left| x_1^* + x_2^* \right|},$$

$$\delta(x_1^* - x_2^*) = \frac{\left| x_1^* \right| \delta x_1^* + \left| x_2^* \right| \delta x_2^*}{\left| x_1^* - x_2^* \right|},$$

$$\delta(x_1^* \cdot x_2^*) = \delta(x_1^* / x_2^*) = \delta x_1^* + \delta x_2^*.$$

Пример (прямая задача)

а) Записать порядок выполняемых операций, оценить погрешности их результатов, вычислить и оценить погрешность искомого значения F.

б) Определить число верных знаков в результате.

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\cos t},\ a = 28{,}30 \pm 0{,}02,\ b = 7{,}45 \pm 0{,}01,\ t = 0{,}7854 \pm 0{,}0001.$$

Решение. а) приближенные значения исходных данных: $a = 28{,}30$, $b = 7{,}45$, $t = 0{,}7854$.

Абсолютные погрешности исходных данных: $\Delta a = 0{,}02$, $\Delta b = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}0001$.

Относительные погрешности исходных данных:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0{,}02}{28{,}30} = 0{,}00070671;\ \delta b = \frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}01}{7{,}45} = 0{,}0013423;$$

$$\delta t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0{,}0001}{0{,}7854} = 0{,}00012732.$$

- Порядок выполняемых операций:

1) $a^2 = 800,89 \Rightarrow \quad \delta a^2 = 2\delta a = 0,0014134 \Rightarrow \quad \Delta a^2 = 800,89 \cdot 0,0014134 = 1,132$;

2) $b^3 = 413,49 \Rightarrow \quad \delta b^3 = 3\delta b = 0,0040269 \Rightarrow \quad \Delta b^3 = 413,49 \cdot 0,0040269 = 1,6651$;

3) $a^2 + b^3 = 1214,4; \qquad \Delta\left(a^2 + b^3\right) = \Delta a^2 + \Delta b^3 = 2,7971$;

$$\delta\left(a^2 + b^3\right) = \frac{2,7971}{1214,4} = 0,0023033.$$

4) $\cos t = 0,70711; \quad \Delta(\cos t) = \left|(\cos t)'\right| \cdot \Delta t = \left|-\sin t\right| \cdot \Delta t = 0,0000707$;

$$\delta(\cos t) = \frac{\Delta(\cos t)}{|\cos t|} = 0,0001.$$

5) $F = \dfrac{a^2 + b^3}{\cos t} = \dfrac{1214,4}{0,70711} = 1717,413$;

$$\delta F = \delta\left(a^2 + b^3\right) + \delta(\cos t) = 0,0023033 + 0,0001 = 0,0024033;$$

$$\Delta F = 1717,413 \cdot 0,0024033 = 4,1274586629.$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial a}\right| = \left|\frac{2a}{\cos t}\right| = 80{,}0446, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right| = \left|\frac{3b^2}{\cos t}\right| = 235{,}4776,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| = \left|-\frac{a^2+b^3}{\cos^2 t}(-\sin t)\right| = 1717{,}40725.$$

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|\Delta t = 4{,}1274. \quad F = 1717{,}413.$$

$$3 : \Delta F > \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}; \; 1 : \Delta F > \frac{1}{2}\cdot 10^{-2};$$

$$4 : \Delta F > \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}; \; 7 : \Delta F < \frac{1}{2}\cdot 10^{0};$$

5. Обратная задача теории погрешностей

- Необходимо определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции.

Для функции $y = f(x)$ одной переменной абсолютную погрешность можно приближенно вычислить по формуле

$$\Delta x^* = \frac{1}{\left|f'(x^*)\right|}\Delta y, \quad f'(x^*) \neq 0.$$

Для функции нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

если значения всех аргументов можно одинаково легко определить с любой точностью, то применяют принцип равных влияний, т.е.

считают, что все слагаемые $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i^*, \; i = \overline{1, n}$, равны между собой.

Тогда абсолютные погрешности всех аргументов определяются формулой

$$\Delta x_i^* = \frac{\Delta y}{n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример (обратная задача)

Выяснить погрешность задания исходных данных, необходимую для получения результата с m верными значащими цифрами.

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\cos t},\ a \approx 28{,}3,\ b \approx 7{,}45,\ t \approx 0{,}7854,\ m = 5.$$

Решение. Находим $a^2 = 800{,}89$, $b^3 = 413{,}49$, $\cos t = 0{,}70711$, $a^2 + b^3 = 1214{,}4$,

$F = \dfrac{a^2 + b^3}{\cos t} = \dfrac{1214{,}4}{0{,}7071} = 1717{,}413$ (полагаем первые 5 цифр верными).

Согласно определению m -верного знака, абсолютная погрешность

$$\Delta F \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0{,}05.$$

Исходим из того, что $\Delta F \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$.

Для использования принципа равных влияний считаем, что все слагаемые $\left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*,\ i = 1, \ldots, n$, равны между собой. Тогда абсолютные погрешности всех аргументов определяются формулой:

$$\Delta x_i^* = \frac{\Delta F}{n \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Находим $\Delta a = \frac{\Delta F}{3 \left| \frac{\partial F}{\partial a} \right|} = \frac{0,05}{(3 \cdot 80,0446)} = 0,0002$; $\Delta b = \frac{\Delta F}{3 \left| \frac{\partial F}{\partial b} \right|} = \frac{0,05}{(3 \cdot 235,4776)} = 0,00007$;

$$\Delta t = \frac{\Delta F}{3 \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|} = \frac{0,05}{(3 \cdot 1717,40725)} = 0,00000970.$$

Задание №1

Тема: Погрешность

- 1. Определить, какое равенство точнее.
- 2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.
- 3. Найти абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры.
- 4. а) Записать порядок выполняемых операций, оценить погрешности их результатов, вычислить и оценить погрешность искомого значения (прямая задача).
- б) Определить число верных знаков в результате.
- 5. Выяснить погрешность задания исходных данных, необходимую для получения результата с m верными значащими цифрами (обратная задача).