

# Основные направления ЦОС

**В настоящее время выделяют следующие основные направления ЦОС:**

- линейная фильтрация;**
- спектральный анализ;**
- частотно-временной анализ;**
- адаптивная фильтрация;**
- нелинейная обработка;**
- многоскоростная обработка.**

# Основные цели цифровой обработки сигналов

- Извлечение информации о сигнале (амплитуда, фаза, частота, спектральные составляющие, временные соотношения)
- Преобразование формата сигнала (телефония с разделением каналов)
- Сжатие данных (модемы, сотовые телефоны, цифровое телевидение, сжатие MPEG)
- Формирование сигналов обратной связи (управление сложными промышленными процессами)
- Выделение сигнала из шума (фильтрация, автокорреляция, свертка)

# Теоретические основы ЦОС

## Конечный ряд Фурье

Всякая периодическая ограниченная, кусочно-непрерывная функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\varphi_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t},$$

где  $f_1 = 1/T_1$ ;  $T_1$  – период функции  $\varphi_P(t)$ ;

$C_k$  – постоянные коэффициенты.

В качестве базисных функций, т.е. функций, по которым проводится разложение, в формуле (1) использованы комплексные гармонические функции вида  $e^{j2\pi k f_1 t}$ , где  $k$  – целое число.

Значения коэффициентов  $C_k$  можно найти по формуле:

$$C_k = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi_P(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

## Теоретические основы ЦОС

Ряд Фурье содержит бесконечное число членов. Именно в этом случае можно поставить знак равенства между левой и правой частью в формуле (1). На практике приходится ограничиваться конечным числом членов, вследствие чего указанное равенство соблюдается только приближенно.

Ряд Фурье имеет важное достоинство: при ограниченном числе членов он обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратичной погрешности приближение к исходной функции. Это значит, что если в правой части соотношения (1) вести суммирование от  $k = -n$  до  $k = n$ , где  $n$  – некоторое конечное число, то наименьшая среднеквадратичная разность на периоде функции  $\varphi_p(t)$  между левой и правой частями этого соотношения будет иметь место в том случае, когда коэффициенты  $C_k$  определены по формуле (2). При увеличении числа членов ряда Фурье до бесконечности среднеквадратичная погрешность разложения стремится к нулю.

# Теоретические основы ЦОС

## Спектр информационного сигнала

Спектром сигнала называют функцию, показывающую зависимость интенсивности различных гармоник в составе сигнала от частоты этих гармоник. Спектр периодического сигнала – это зависимость коэффициентов ряда Фурье от частот гармоник, которым эти коэффициенты соответствуют.

$$\Phi_P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_P(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Для непериодического сигнала спектр – это преобразование Фурье сигнала. Спектр периодического сигнала является дискретным (дискретная функция частоты), в то время как для непериодического сигнала характерен непрерывный спектр. Дискретный спектр имеет ту же размерность, что и сигнал, в то время как размерность непрерывного спектра равна отношению размерности сигнала к размерности частоты. Поэтому для непрерывного спектра употребляют также термин «спектральная плотность».

# Теоретические основы ЦОС

## Дискретное преобразование Фурье

Преобразование Фурье (ПФ) – одна из самых распространенных процедур, применяемых при обработке сигналов. При выполнении ПФ требуется проводить интегрирование непрерывных функций. Цифровые сигнальные процессоры оперируют с дискретизованными функциями, а операцию интегрирования могут выполнять лишь приближенно на основе того или иного численного метода. В связи с этим был разработан вариант ПФ, названный дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), при реализации которого обрабатываются дискретизованные значения сигнала и спектра и вместо интегрирования функции проводится суммирование ее дискретных значений:

$$A(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

где  $A(k)$  – дискретные отсчеты спектра ;  $a(n)$  – отсчеты сигнала;  
 $N$  – количество отсчетов за период функции.

# Теоретические основы ЦОС



## ■ Цифровой спектральный анализ

- ◆ Анализаторы спектра
- ◆ Обработка речи
- ◆ Обработка изображений
- ◆ Распознавание образов

## ■ Проектирование фильтров

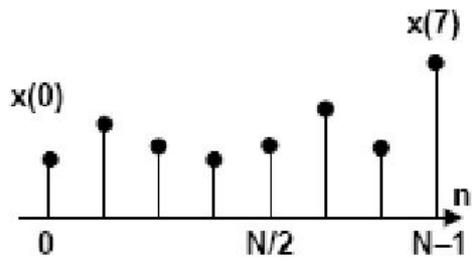
- ◆ Вычисление импульсной характеристики по частотной
- ◆ Вычисление частотной характеристики по импульсной

Комплексный спектральный выход ДПФ  $A(k)$  является результатом свертки входных отсчетов с базисными функциями синуса и косинуса.

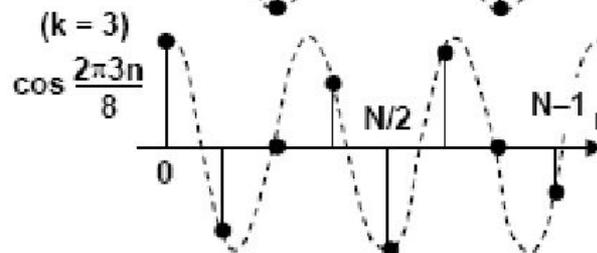
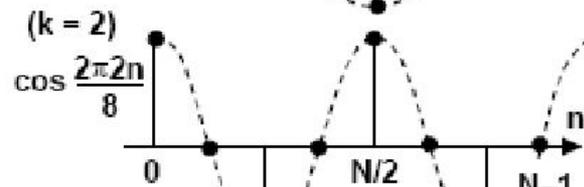
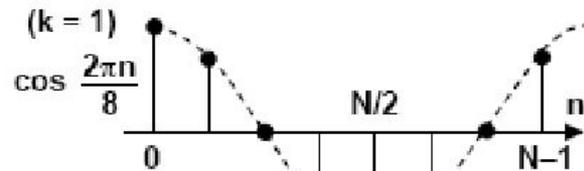
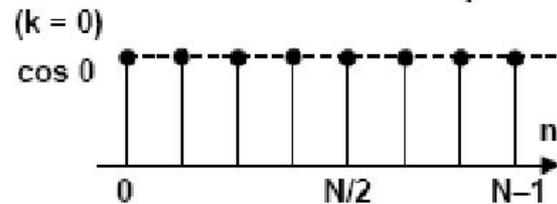
# Теоретические основы ЦОС

## СВЕРТКА ОТСЧЕТОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ С БАЗИСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРИ ДПФ ДЛЯ N=8

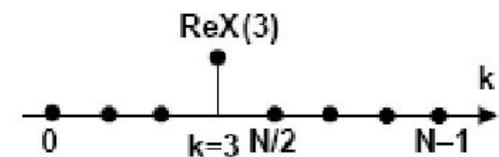
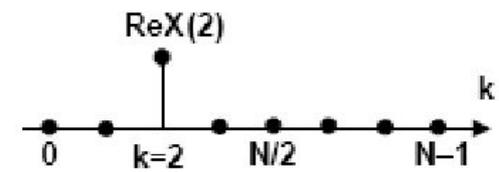
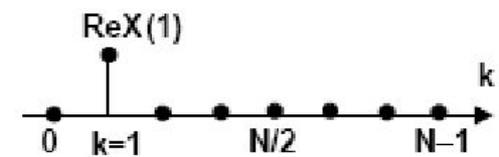
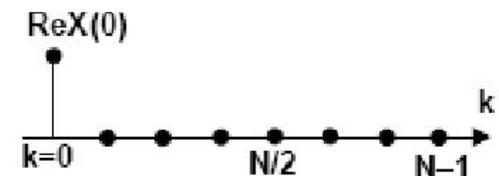
ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ



БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ



ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ



# Теоретические основы ЦОС

## Быстрое преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье довольно часто применяют при цифровой обработке информации. Поэтому важным фактором начинает выступать время реализации алгоритма ДПФ на имеющемся вычислительном элементе. Особенно большое значение этот фактор приобретает при увеличении числа отсчетов  $N$  анализируемого сигнала. Действительно, в соответствии с формулой ДПФ

$$NA(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn},$$

и для определения  $N$  значений последовательности  $NA(k)$  требуется произвести примерно  $N^2$  умножений и  $N^2$  сложений. Таким образом, с ростом  $N$  непропорционально быстро возрастает время расчета ДПФ на процессоре.

Введем обозначение:  $W^{nk} = e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$ , тогда

$$NA(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) W^{nk}.$$

## Теоретические основы ЦОС

Алгоритм прямого вычисления последовательности  $NA(k)$  содержит большое количество избыточных операций, в том числе и таких, когда одни и те же операции многократно выполняются над одними и теми же значениями величин. Это связано с тем, что весовая функция  $W^{nk}$  является периодической функцией аргумента  $nk$ . Так как  $n$  и  $k$  принимают значения из последовательности  $0, 1, \dots, N-1$  то произведения  $nk$ , принимающее значения  $0, 1, \dots, (N-1)^2$  будет содержать большое число периодов  $N$  и соответствующие им значения весовой функции  $W^{nk}$  будут повторяться через период  $N$ .

$$W^0 = e^{-j\frac{2\pi}{N}0} = 1; \quad W^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1 = -W^0;$$

$$W^1 = e^{-j\frac{2\pi}{N}}; \quad W^{\frac{N}{2}+1} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+1\right)} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\pi} W^1 = -W^1;$$

$$W^2 = e^{-j\frac{4\pi}{N}}; \quad W^{\frac{N}{2}+2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+2\right)} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{4\pi}{N}} = e^{-j\pi} W^2 = -W^2;$$

...

...

## Теоретические основы ЦОС

В пределах одного периода первые  $N/2$  значений отличаются от вторых  $N/2$  значений только знаком.

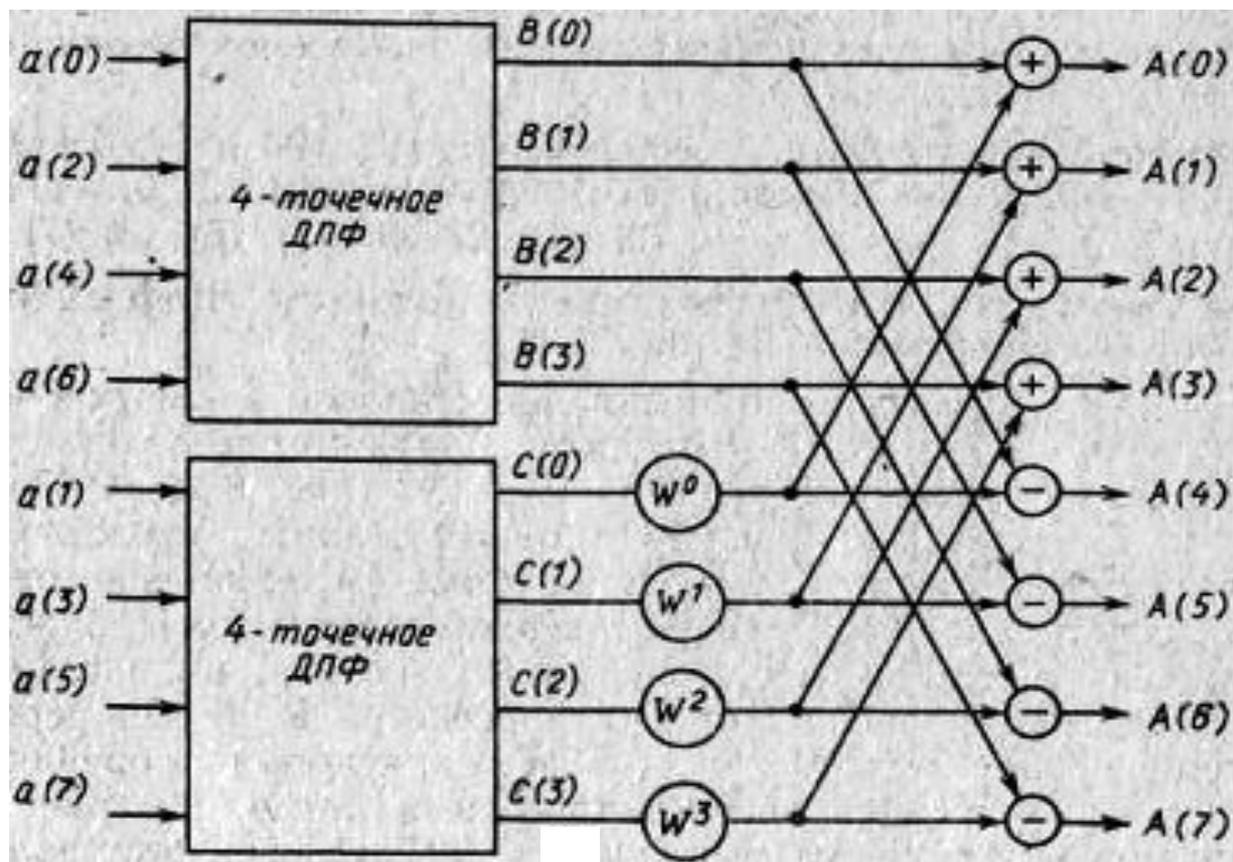
Устранение избыточных операций умножения является целью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Считая, что  $N$  делится на 2, представим выражение для ДПФ двумя суммами, соответствующими четным и нечетным значениям  $n$ :

$$\begin{aligned} NA(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} a(2n) e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} a(2n+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} a(2n) e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \sum_{n=0}^{N/2-1} a(2n+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} a(2n) W^{2nk} + \\ &+ W^k \sum_{n=0}^{N/2-1} a(2n+1) W^{2nk} = B(k) + W^k C(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $B(k)$  и  $C(k)$  — суммы соответственно 1-го и 2-го слагаемых.

# Теоретические основы ЦОС

Таким образом, вычисление  $N$  - точечного преобразования  $A(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  можно произвести путем вычисления двух точечных преобразований:  $B(k)$ ,  $k = 0, 2, \dots, N-2$  и  $C(k)$ ,  $k = 1, 3, \dots, N-1$  с последующим их объединением по формуле (3). Например, для  $N = 8$  :



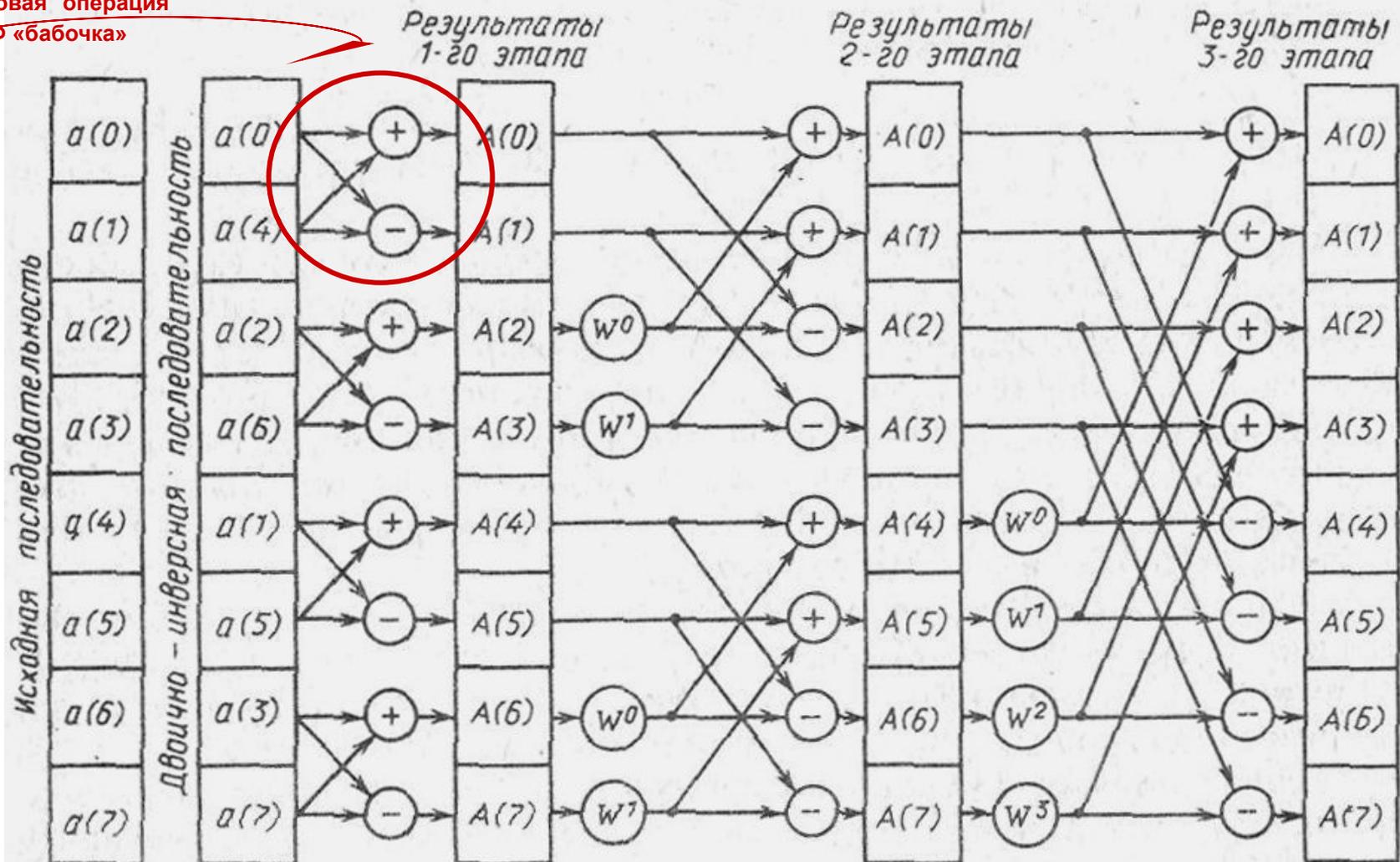
# Теоретические основы ЦОС

Прямое вычисление  $N$ -точечного преобразования требует  $N^2$  комплексных умножений. При рассмотренном варианте БПФ вычисление двух  $N/2$ -точечных преобразований потребует  $2(N/2)^2 = N^2/2$  комплексных умножений, а их объединение – еще  $N/2$  умножений. Таким образом, количество умножений станет равным  $(N+N^2)/2$ , что при больших  $N$  примерно вдвое сокращает требуемое количество умножений. Если  $N/2$  в свою очередь делится на 2, то вычисление каждого из преобразований  $B(k)$  и  $C(k)$  можно также свести к двум  $N/4$ -точечным преобразованиям, что вызовет дополнительное уменьшение требуемого количества операций умножения и т.д. Если  $N$  представляется целой степенью двух ( $N = 2^m$ ), то вычисления разбиваются на  $m = \log_2 N$  этапов, в каждом из которых требуется  $N/2$  умножений. Таким образом, общее количество умножений равно  $(N/2) \log_2 N$ .

# Теоретические основы ЦОС

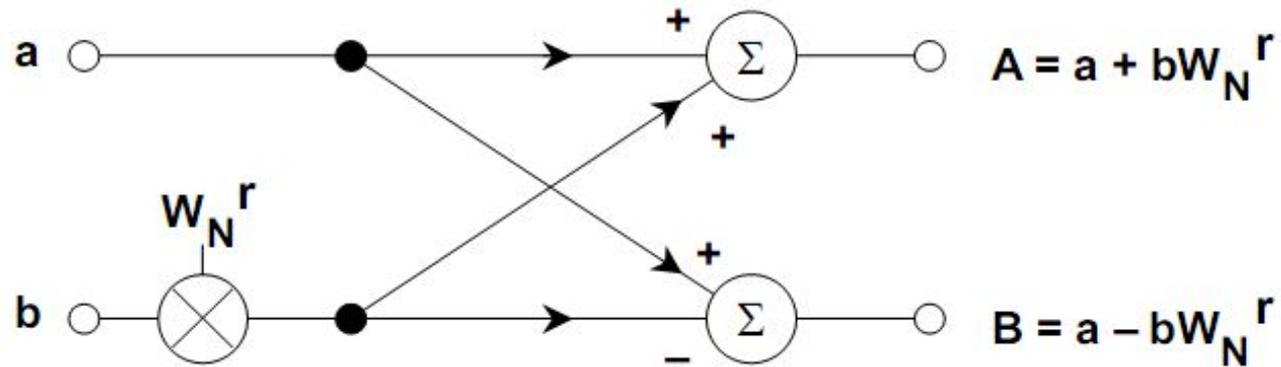
## Алгоритм БПФ по основанию 2:

Базовая операция  
БПФ «бабочка»



# Теоретические основы ЦОС

## БАЗОВАЯ ОПЕРАЦИЯ «БАБОЧКА» В АЛГОРИТМЕ БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ



# Теоретические основы ЦОС

При 8-точечном БПФ восемь входных отсчетов из временной области сначала разделяются на четыре группы 2-точечных ДПФ. Затем четыре 2-точечных ДПФ объединяются в два 4-точечных ДПФ, и в завершение два 4-точечных ДПФ объединяются для получения окончательного результата  $A(k)$ . Основу для всего вычисления формирует базовая операция «бабочка» 2-точечного ДПФ. Вычисление осуществляется в трех каскадах. Результаты вычисления первого каскада могут быть сохранены в тех же самых регистрах или ячейках памяти, которые первоначально хранили исходные отсчеты из временной области  $a(n)$ . При вычислении всех последующих каскадов можно заполнять одни и те же ячейки памяти с результатами вычисления предыдущих каскадов (стирая старые данные). Это делает алгоритм БПФ экономичным с точки зрения требуемой памяти.

Для того, чтобы алгоритм работал должным образом, входные отсчеты по времени  $a(n)$  должны быть упорядочены определенным образом с использованием алгоритма реверсирования битов.

# Теоретические основы ЦОС

При реализации БПФ с прореживанием по времени используется типовой алгоритм реверсирования битов. Десятичный индекс  $n$  преобразуется в его двоичный эквивалент. Затем двоичные разряды располагаются в обратном порядке и преобразуются обратно в десятичное число. Реверсирование битов часто выполняют аппаратурой ЦОС в генераторе адреса данных (DAG), упрощая таким образом программное обеспечение и ускоряя вычисления.

■ Десятичное число:	0	1	2	3	4	5	6	7
■ Двоичный эквивалент:	000	001	010	011	100	101	110	111
■ Дв. с реверсированием:	000	100	010	110	001	101	011	111
■ Десятичный эквивалент:	0	4	2	6	1	5	3	7

# Теоретические основы ЦОС

<b>N</b>	<b>Умножений при ДПФ</b>	<b>Умножений при БПФ</b>	<b>Эффективность БПФ</b>
<b>256</b>	<b>65,536</b>	<b>1,024</b>	<b>64 : 1</b>
<b>512</b>	<b>262,144</b>	<b>2,304</b>	<b>114 : 1</b>
<b>1,024</b>	<b>1,048,576</b>	<b>5,120</b>	<b>205 : 1</b>
<b>2,048</b>	<b>4,194,304</b>	<b>11,264</b>	<b>372 : 1</b>
<b>4,096</b>	<b>16,777,216</b>	<b>24,576</b>	<b>683 : 1</b>

# Теоретические основы ЦОС

Приведем сравнительные результаты реализации алгоритмов БПФ по основанию 2 на различных процессорах производства Analog Devices:

- ADSP-2189M, 16 разрядов, фиксированная точка
  - ◆ 453 мкс (1024 точки)
  
- ADSP-21160 SHARC™, 32 разряда, плавающая точка
  - ◆ 90 мкс (1024 точки)
  
- ADSP-TS001 TigerSHARC™ 150 MHz,
  - ◆ 16 разрядов, режим с фиксированной точкой
    - 7.3 мкс (256 точек БПФ)
  - ◆ 32 разряда, режим с плавающей точкой
    - 69 мкс (1024 точки)

# Теоретические основы ЦОС

## Требования к ЦСП для реализации алгоритмов БПФ в реальном масштабе времени

Существует два основных способа обработки сигналов в реальном масштабе времени: обработка одного отсчета в каждый момент времени (непрерывная обработка) и обработка одного пакета данных в каждый момент времени (пакетная обработка).

Системы, основанные на *непрерывной обработке*, такие как цифровой фильтр, получают данные в виде одного отсчета в каждый момент времени. В каждом такте новый отсчет поступает в систему, а обработанный отсчет передается на выход.

Системы, основанные на пакетной обработке, такие как построенный на БПФ цифровой анализатор спектра, получают данные в виде целого пакета отсчетов. Происходит обработка всего пакета исходных данных, результатом которой является пакет преобразованных выходных данных.

## Теоретические основы ЦОС

Для обеспечения функционирования в реальном масштабе времени *при пакетной обработке* полный расчет БПФ должен выполняться в промежутке, соответствующем времени накопления одного пакета данных и равном  $N/f_s$ , где  $f_s$  – частота дискретизации,  $N$  – число отсчетов в пакете данных. Предполагается, что, пока производится вычисление БПФ текущего пакета данных, ЦСП накапливает данные для следующего пакета. Накопление данных является одной из сфер, где важную роль играют архитектурные особенности ЦСП. Непрерывное получение данных облегчается благодаря возможностям гибкой адресации данных в ЦСП в сочетании с использованием каналов прямого доступа к памяти (Direct Memory Access, DMA).

# Теоретические основы ЦОС

## ПРИМЕР ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ПАКЕТНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ БПФ В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

- Предположим, что время выполнения 1024-точечного алгоритма БПФ по основанию 2 равно 69 мкс (TigerSHARC, 32-разрядный режим)
- $$f_s = \frac{1024 \text{ отсчета}}{69 \text{ мкс}} = 14,8 \text{ MSPS}$$
- Следовательно, ширина полосы входного сигнала < 7,4 МГц
- Это подразумевает отсутствие дополнительных операций, связанных с реализацией БПФ и передачей входных/выходных данных

# Теоретические основы ЦОС

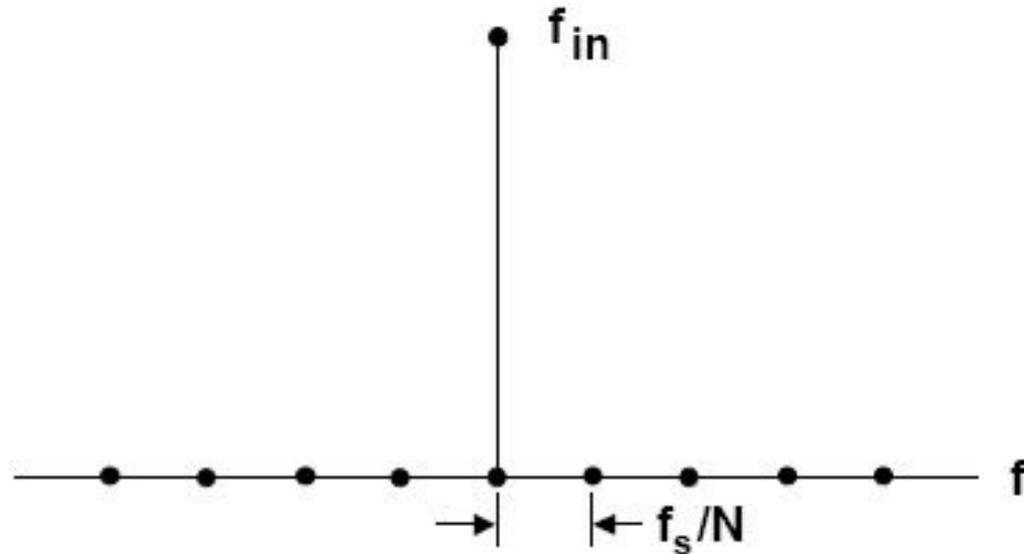
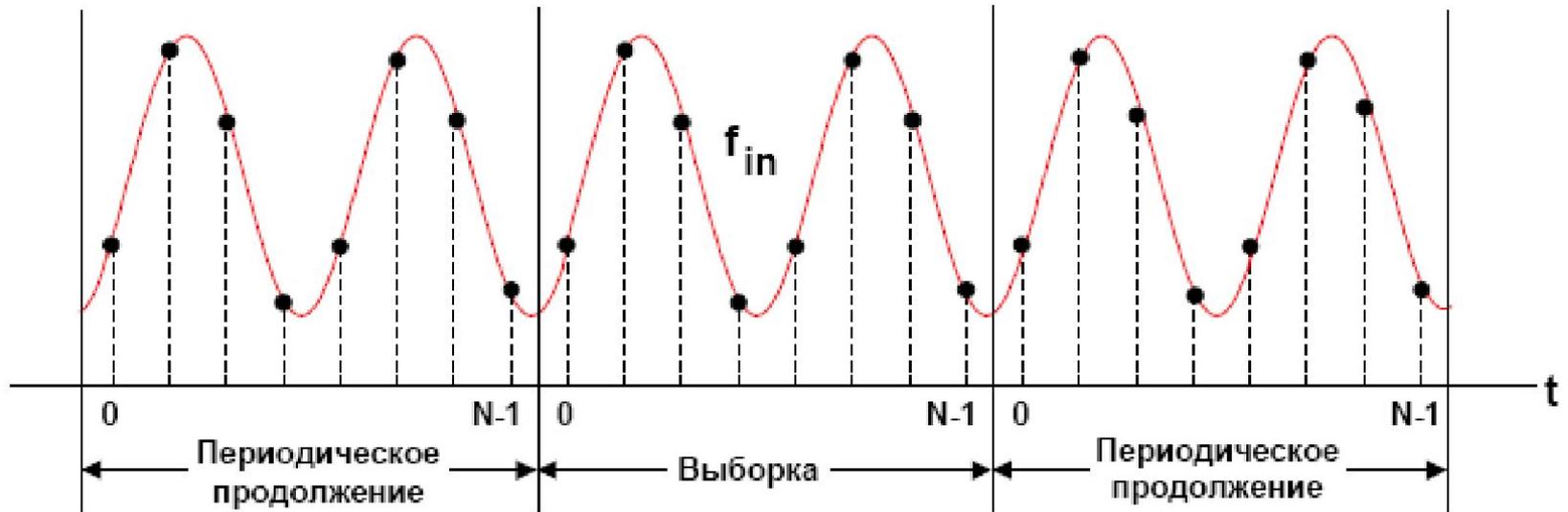
## Эффект расширения спектра анализируемого сигнала при БПФ

Эффект расширения спектра анализируемого сигнала при вычислении БПФ может быть лучше всего проиллюстрирован на примере выполнения  $N$ -точечного БПФ с синусоидальным входным сигналом.

Рассмотрим два случая.

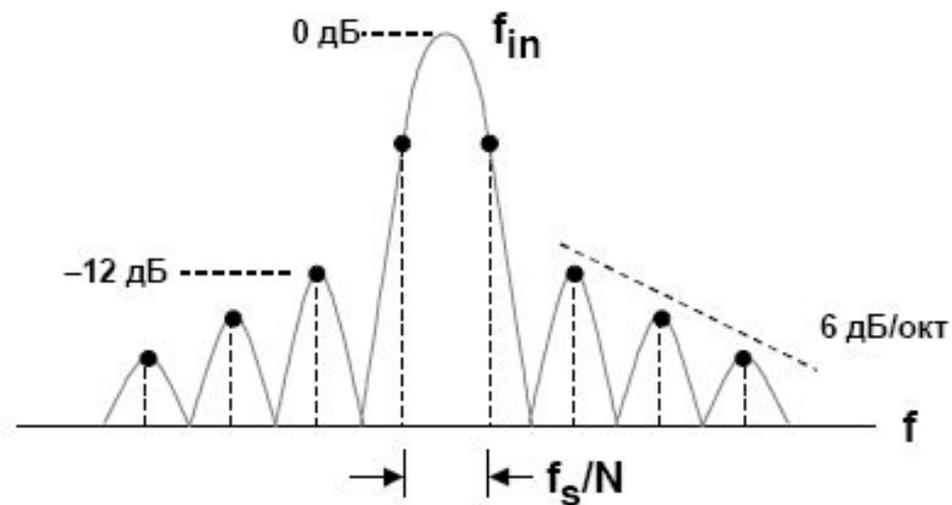
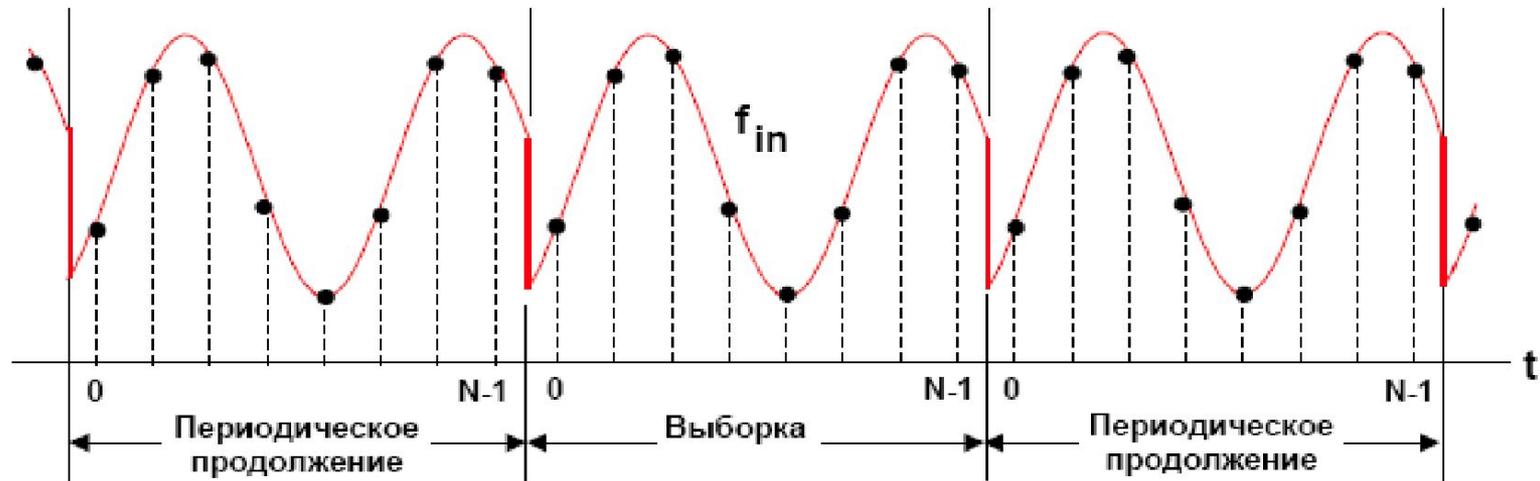
В первом случае соотношение между частотой дискретизации и частотой входного синусоидального сигнала таково, что в выборке содержится в точности целое число периодов синусоидального сигнала. При таких условиях форма входного сигнала представляет собой непрерывную синусоидальную функцию, и на выходе БПФ будет один ненулевой частотный отсчет, соответствующий частоте входного сигнала.

# Теоретические основы ЦОС



# Теоретические основы ЦОС

Второй случай отражает ситуацию, когда в выборке нет целого числа периодов синусоидального сигнала.



# Теоретические основы ЦОС

Разрывы, которые образуются в конечных точках выборки, приводят к расширению спектра анализируемого сигнала вследствие появления дополнительных гармоник. Кроме появления боковых лепестков, происходит расширение основного лепестка, что приводит к снижению разрешающей способности по частоте. Этот процесс эквивалентен перемножению входного синусоидального сигнала с прямоугольным импульсом. Перемножение сигналов во временной области эквивалентно свертке их спектров.

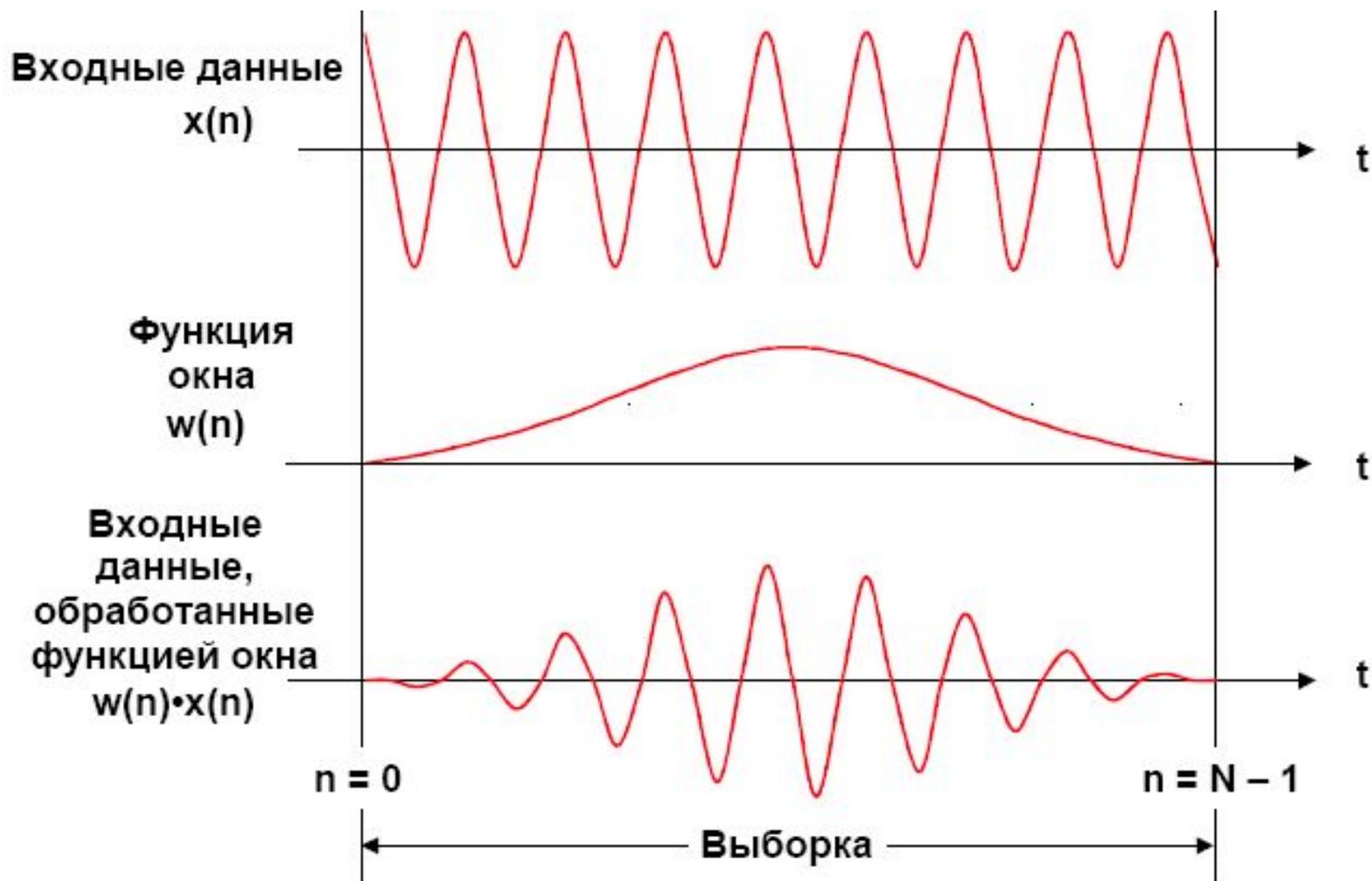
Прямоугольный импульс имеет известную частотную характеристику  $\sin(x)/x$  и связанные с этим широкий основной лепесток и боковые лепестки, причем первый боковой лепесток только на 12 дБ ниже основного, а боковые лепестки имеют спад только 6 дБ/окт.

# Теоретические основы ЦОС

Эффект расширения основного лепестка и появления боковых лепестков значительно ухудшает основное преимущество преобразования Фурье – его частотную избирательность.

Поскольку в практических приложениях БПФ для спектрального анализа точные входные частоты неизвестны, следует предпринять меры для уменьшения боковых лепестков. Это достигается выбором оконной функции с более сложной формой, чем прямоугольная. Входные отсчеты по времени умножаются на соответствующую функцию окна, что влечет за собой обнуление сигнала на краях выборки.

# Теоретические основы ЦОС



# Теоретические основы ЦОС

Выбор функции окна является компромиссом между дополнительным увеличением ширины основного лепестка и уменьшением амплитуды боковых лепестков. Некоторые распространенные оконные функции:

■ Хемминга:  $w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left[ \frac{2\pi n}{N} \right]$

■ Блэкмана:  $w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \left[ \frac{2\pi n}{N} \right] + 0.08 \cos \left[ \frac{4\pi n}{N} \right]$

■ Хеннинга:  $w(n) = 0.5 - 0.5 \cos \left[ \frac{2\pi n}{N} \right]$

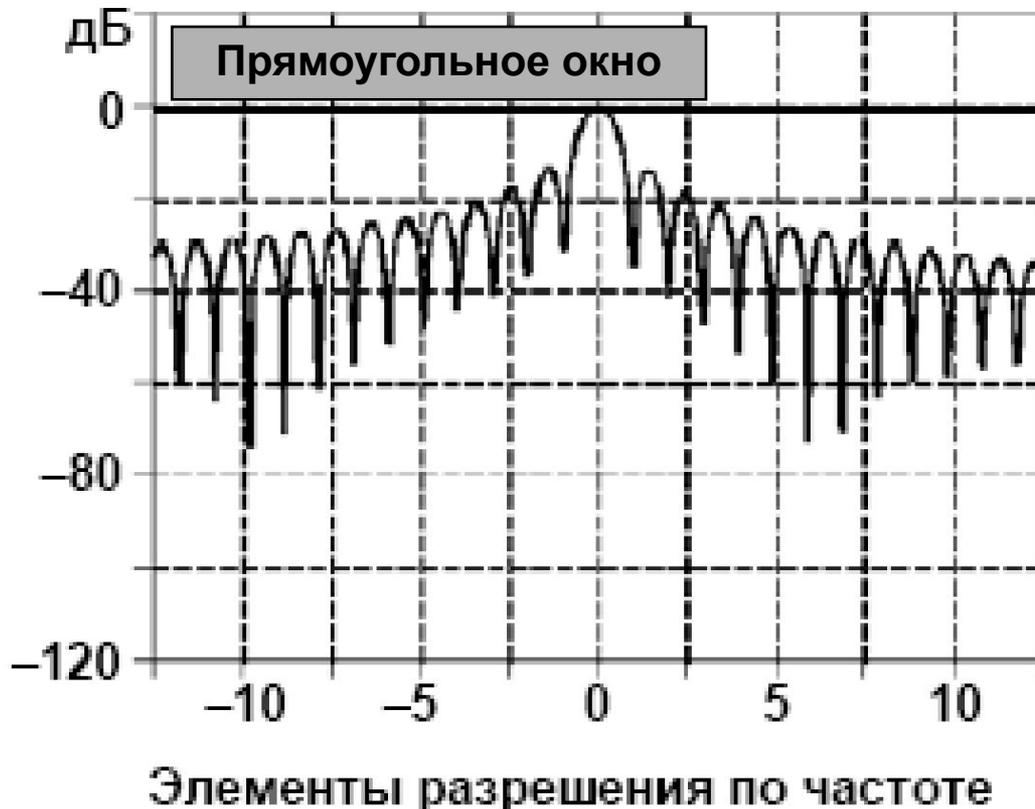
■ Минимальная 4-элементная Блэкмана-Харриса

$$w(n) = 0.35875 - 0.48829 \cos \left[ \frac{2\pi n}{N} \right] + 0.14128 \cos \left[ \frac{4\pi n}{N} \right] - 0.01168 \cos \left[ \frac{6\pi n}{N} \right]$$

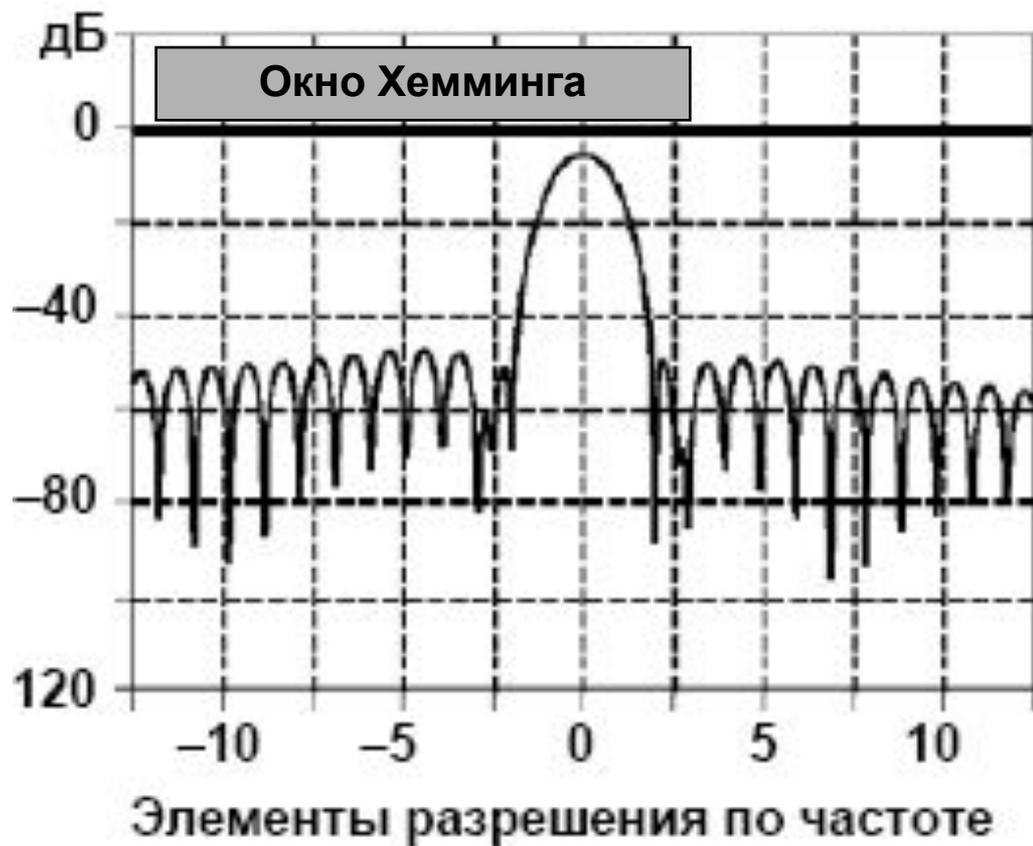
$0 \leq n \leq N - 1$

# Теоретические основы ЦОС

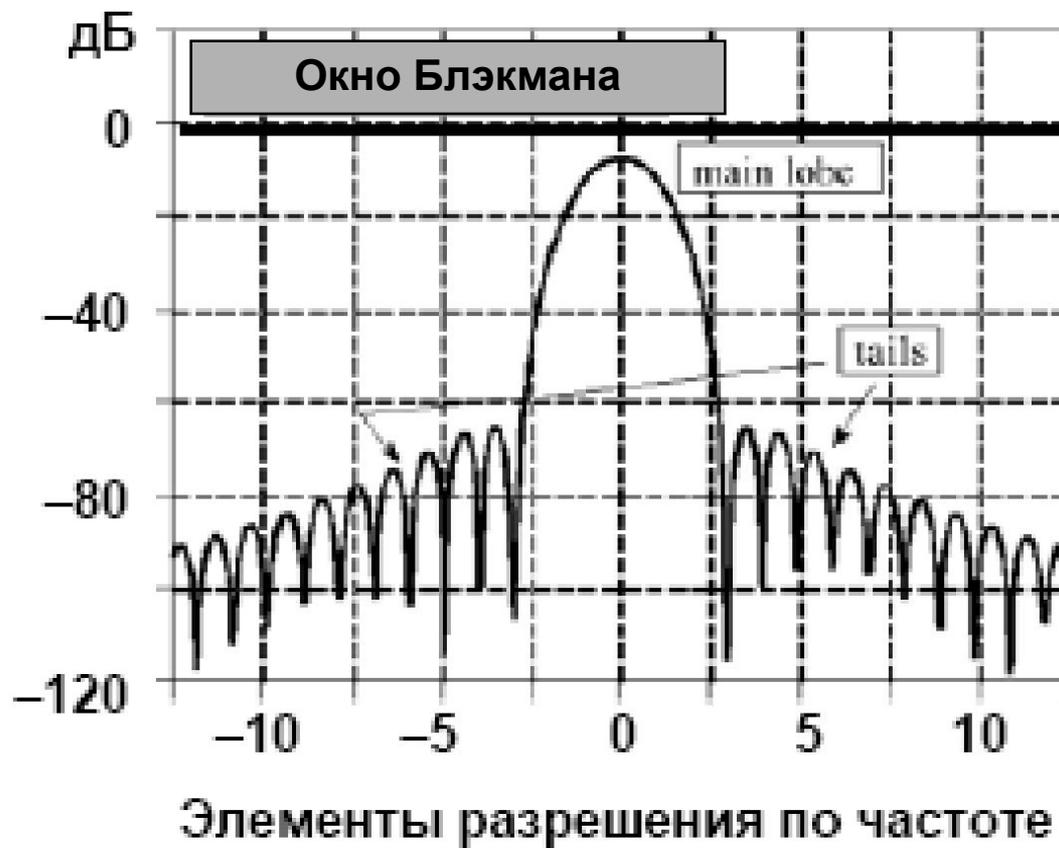
Оцифрованные оконные функции обычно вычисляются предварительно и сохраняются в памяти ЦСП с целью минимизации вычислений непосредственно при реализации БПФ. Частотные характеристики прямоугольного окна, окон Хемминга и Блэкмана:



# Теоретические основы ЦОС



# Теоретические основы ЦОС



# Теоретические основы ЦОС

Свойства оконных функций, связанные с увеличением ширины основного лепестка, подавлением амплитуды первого бокового лепестка и спадом уровня боковых лепестков.

Функции окна	3 дБ ширины полосы (ЭРЧ)	6 дБ ширины полосы (ЭРЧ)	Наивысший боковой лепесток (дБ)	Спад бокового лепестка (дБ/октава)
Прямоуг.	0,89	1,21	-12	6
Хемминга	1,3	1,81	-43	6
Блэкмана	1,68	2,35	-58	18
Хеннинга	1,44	2,00	-32	18
Минимальная 4-элементная Блэкмана-Харриса	1,90	2,72	-92	6

ЭРЧ – элементов разрешения по частоте