

# Расчёт неизотермического течения вязкоупругой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами с контролем погрешности

---

Докладчик: Круглова Е.А, 4й курс ММФ НГУ

Научный руководитель: к.ф. – м.н. с.н.с ИВТ СО РАН Семисалов Б.В

По оценкам  
**Wohlers Report 2015**  
к 2020 г. международный  
рынок аддитивных  
технологий достигнет  
**21,2 млрд долларов США.**



**Trends. Analysis.  
Forecasts.**

Your source for everything 3D printing

- Undisputed industry-leading report for 20 consecutive years
- Estimates and forecasts based on years of hard data
- Input and analysis from the largest group of experts worldwide

**Order your report today!**

**WOHLERS ASSOCIATES**  
wohlersassociates.com

# Наиболее востребованные направления применения аддитивных технологий

- автомобилестроение
  - авиастроение
  - военная и космическая отрасли
  - медицина
  - производство потребительских товаров и электроники
  - производство средств производства
-

# Модели течения растворов и расплавов полимеров

## 1) Феноменологические модели

учитывают свойства течений жидкости, наблюдаемые в эксперименте на макроуровне

## 2) Микроструктурные модели

учитывают свойства макромолекул и их взаимодействие в полимере

## 3) Мезоскопические модели

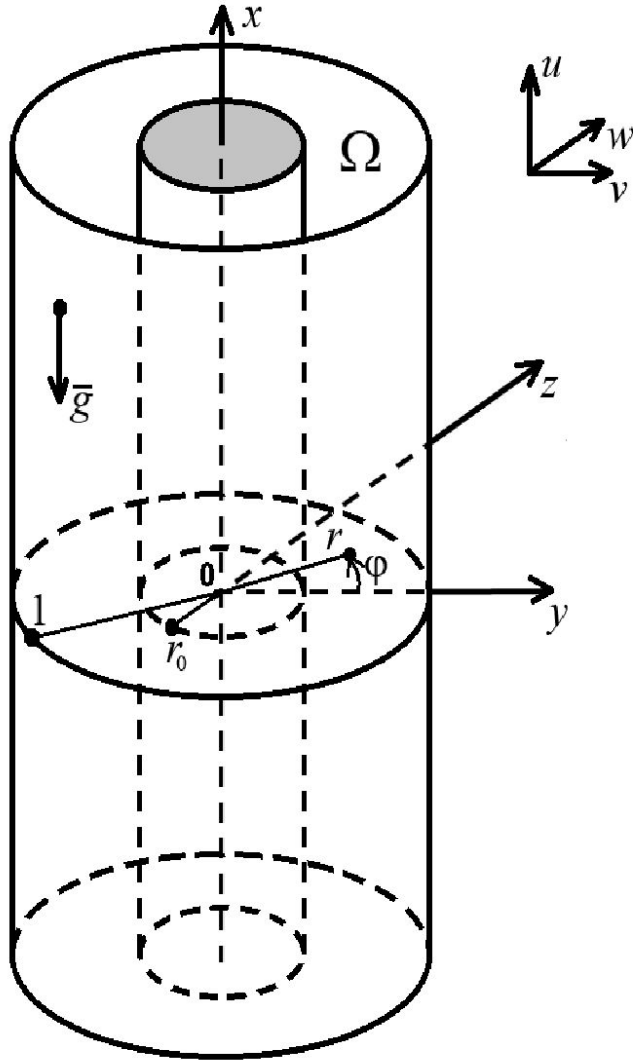
задают динамику макромолекул с параметрами, определяемыми в эксперименте на макроуровне

*Pokrovskii V. N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 2010.*

---

# Постановка задачи

$$\Omega = \{(y, z) \mid r_0^2 < y^2 + z^2 < 1\}$$



1) Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В. Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: изд-во АлтГПА, 2012.

2) Блохин А. М., Семисалов Б. В. Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. XVII. №4 (60). С. 38–47.

# Уравнение модели

$\beta$  – феноменологический параметр реологической модели, учитывающий ориентацию макромолекулярного клубка  
 $Re$  – число Рейнольдса  
 $W$  – число Вейсенберга  
 $Ra$  – число Релея  
 $Pr$  – число Прандтля  
 $\hat{A}$  - перепад давления вдоль  $Ox$   
 $E_A$  – энергия активации  
 $\bar{\theta}$  – относительная разность температур между цилиндрами  
 $\Phi$  - температурный фактор  
 $Ga$  – число Грасгофа

$$r\Delta\hat{u}'' + \tilde{\Gamma}\hat{u}' = -r\hat{G}\hat{K}, \quad (1)$$

$$y = r \cos \varphi \quad z = r \sin \varphi$$

$$\hat{G} = Re \left( \hat{A} + Ga \frac{\ln r}{\ln r_0} \right),$$

$$\Delta = \frac{(1 - \alpha \hat{t}^2)(1 + \hat{t}^2)}{Q}, \quad Q = 1 - \alpha \hat{t}^4 - \frac{6\rho}{1 - \rho} \hat{t}^2 + 4\Lambda \frac{\hat{t}(1 - \hat{t}^2)}{1 - \rho},$$

$$\hat{t} = \frac{2\Lambda}{\hat{m}_0}, \quad \tilde{\Gamma} = 1 + \frac{\bar{\theta}}{\ln r_0} \frac{(1 - \Delta)\hat{\Phi} - \Delta\bar{E}_A}{\hat{\Phi}^2}, \quad \hat{\lambda}^2 = (\hat{u}')^2 \quad (\hat{\lambda} = |\hat{u}'|).$$

# Численное решение

Используем итерационный метод установления.

ВВОДИМ

Временную переменную  $t$  для итерации

Оператор Соболёва  $B_t u = (k_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2}) \frac{\partial}{\partial t} u - f(r, u)$

$$B_t u = u_{rr} - f(r, u) \quad t \rightarrow \infty$$

# Численное решение

Введём сетку по временной переменной  $t$  с шагом  $\tau$  и узлами  $t_n = n\tau$ ,  $n \in N$

Приближим  $u_t$  конечной разностью  $(u^{[n]} - u^{[n-1]}) / \tau$

$$B_t u = u_{rr} - f(r, u) =$$

$$k_1 u^{[n]} - (k_2 + \tau) u_{rr}^{[n]} = (k_1 - k_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}) u^{[n-1]} - \tau f(r, u_r^{[n-1]}) = \tilde{f}(r, u^{[n-1]}). \quad (2)$$

Критерий остановки:  $\|B_t u\| \leq \varepsilon_S$ ,  $\varepsilon_S$  - невязка установления



# Алгоритм численного решения

$$\frac{\partial p_N(r, u)}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = \frac{2}{1-r_0} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N (-1)^{i+j} \frac{\sqrt{1-r_i^2}}{(r_i-r_j)\sqrt{1-r_j^2}} u_j - \frac{3}{2} \frac{r_i}{1-r_i^2} u_i \right) \quad (4)$$

Для приближения решения используем интерполяционный полином в форме Лагранжа с узлами в нулях многочлена Чебышёва

$$\frac{\partial^2 p_N(r, u)}{\partial r^2} \Big|_{x=x_j} = \frac{1}{(1-r_0)^2} \left( \sum_{j=1, i \neq j}^N (-1)^{i+j} \frac{1}{(r_i-r_j)^2 \sqrt{1-r_j^2} \sqrt{1-r_i^2}} u_j - \frac{1}{1-r_i^2} \left( (N^2+5) + \frac{3r_i^2}{1-r_i^2} \right) u_i \right)$$

$b_{ij}, i \neq j$ 
 $\mu_i$

$$p_N(r, u) = \sum_{j=1}^N \frac{w(r, r_j) T_N(r)}{(r-r_j) T'_N(r_j)} u(r_j), \quad r_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N} \quad w(r, r_j) = \frac{1-r^2}{1-r_j^2} \quad (3)$$

# Сведение к задаче линейной алгебры

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & v_2 & \dots & a_{2N} \\ \boxtimes & \boxtimes & \dots & \boxtimes \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & v_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mu_1 & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & \mu_2 & \dots & b_{2N} \\ \boxtimes & \boxtimes & \dots & \boxtimes \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & \mu_N \end{pmatrix}$$

Спектральное разложение  $A = R_A D_A R_A^{-1}$

Для аппроксимации первой и второй производной получаем

$$U_x = CU$$

$$U_{xx} = AU.$$

# Численные результаты

$$u_{rr} = f(r, u_r)$$

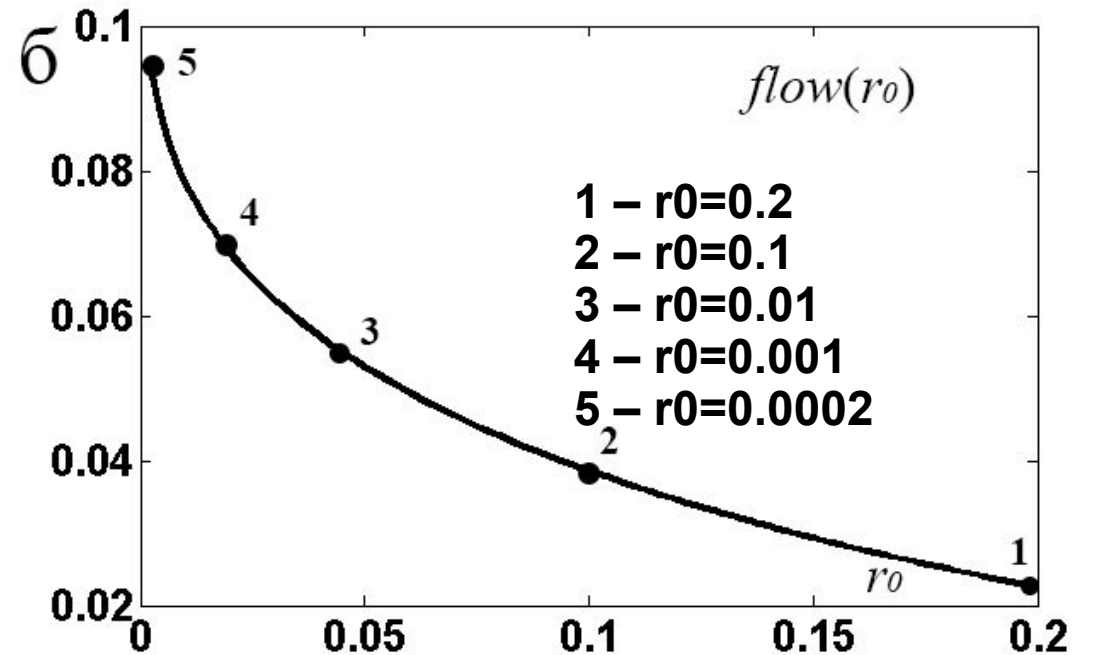
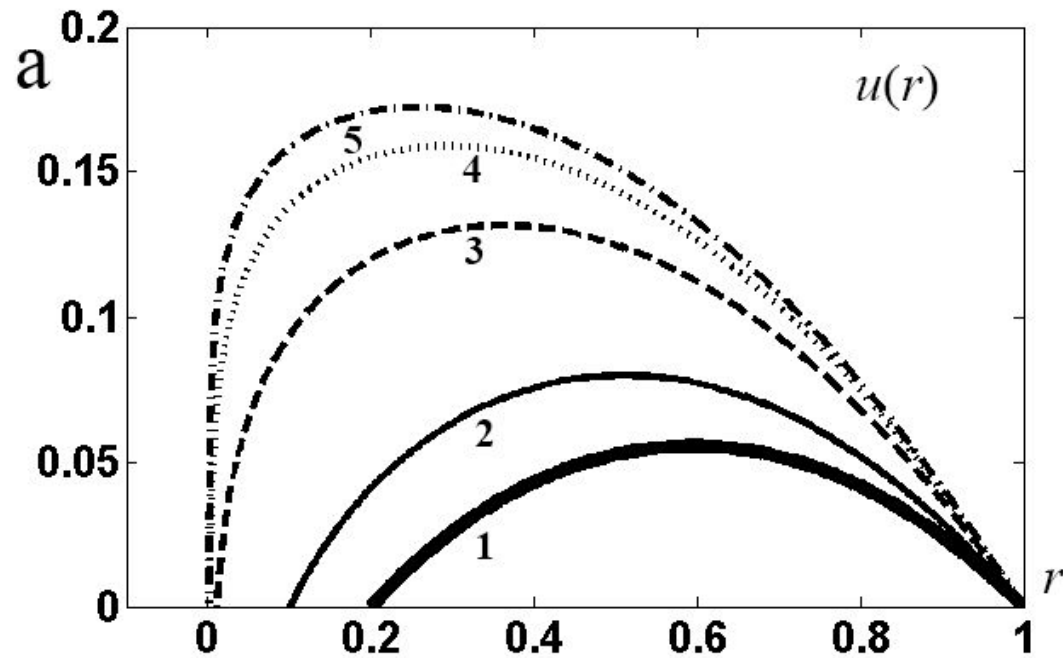
Параметр	Описание	Значение
$\beta$	Феноменологический параметр	0.01–0.9
$\hat{D}$	Характеристика градиента давления и вязкости жидкости ( $\hat{D} = \text{Re}\hat{A}$ )	0–8
$\bar{E}_A$	Энергия активации	0–10
$\bar{\theta}$	Относительная разность температур на верхней и нижней стенках канала	-0.5–10
$W$	Число Вейсенберга	0.01–2
$r_0$	Радиус внутреннего цилиндра	0.0001–0.99

**Конечно-разностными методами решения найдены для  $r_0$  не меньше 0.15!**

*А.М Блохин, Р.Е Семенко.* Течение несжимаемой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами

# Результаты, полученные для малого $r_0$

$\Theta = \Theta_1$  — на первом этапе



$\beta=0.1, D=1, E_A=9, W=0.001$

# Контроль погрешности

Погрешность численного решения:  $\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_M$

$\varepsilon_R$  - Вычислительная погрешность, связанная с округлением действительных чисел в памяти ЭВМ

$\varepsilon_M$  - Погрешность использования метода приближения

Число  $a$  записывается в память ЭВМ так:  $a \rightarrow a + \delta_a$ , где  $|\delta_a| \leq \delta |a|$

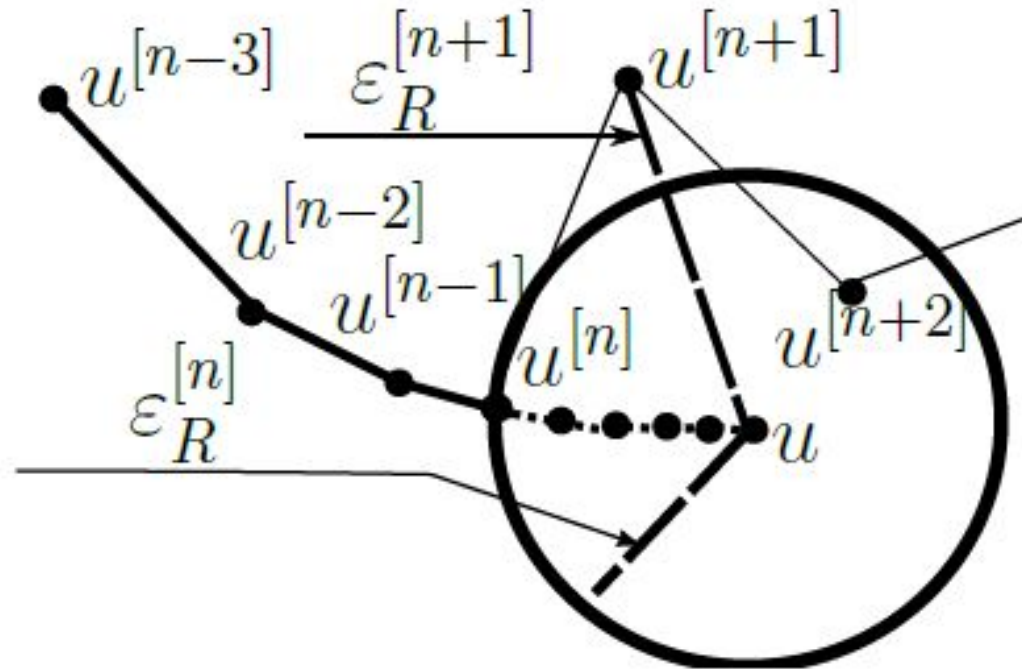
$$\delta = 10^{-l+1}$$

Для типа *double*  $l = 16$

## Верхняя оценка $\varepsilon_R$

$$u^{[n+1]} = (I - \tau A)^{-1} F(u^{[n]}) \Rightarrow u^{[n+1]} = S(u^{[n]})$$

$$\varepsilon_R \leq \frac{\|u^{[k-1]} - u^{[k]}\|}{1 - q} \quad (5)$$



# Погрешность метода $\varepsilon_M$

$$\varepsilon_M = \|P_N(u) - u\| \leq \frac{1}{1 - \varkappa_N} \|P_N(u) - P_{N+1}(u)\|, \quad (6)$$

$$\varkappa_N = \frac{\|P_{N+1}(u) - u\|}{\|P_N(u) - u\|}, \quad \varkappa_N \varkappa_{N-1} \sim \frac{R_{N+1}(x)}{R_{N-1}(x)}, \quad R_N(x) = |P_N(x) - u(x)|, \quad P_N(x) = P_N(u)(x) \quad (7)$$

Пусть  $N$  – нечетное количество узлов. Тогда 0 – узел интерполяции  $P_N$

$$\lambda_N = \sqrt{\frac{|P_N(0) - P_{N+1}(0)|}{|P_{N-1}(0) - P_N(0)|}}, \quad (8) \quad \lambda_N = \sqrt{\frac{|R_N(0) - R_{N+1}(0)|}{|R_{N-1}(0) - R_N(0)|}} = \sqrt{\frac{|R_{N+1}(0)|}{|R_{N-1}(0)|}} = \sqrt{\varkappa_N \varkappa_{N-1}} \quad (9)$$

Наблюдая за поведением величины  $\lambda_N$  можем сделать вывод о характере сходимости метода

# Погрешность метода

1) Степенная сходимость -  $\varkappa_N \sim \frac{(N+1)^{-r}}{N^{-r}} = \frac{N^r}{(N+1)^r}$

2) Экспоненциальная сходимость -  $\varkappa_N \sim \frac{\hat{q}^{N+1}}{\hat{q}^N} = \hat{q} < 1$

3) Факториальная сходимость -  $\varkappa_N \sim \frac{\tilde{q}^{N+1}}{(N+1)!} \frac{\tilde{q}^N}{N!} = \frac{\tilde{q}}{N+1}$

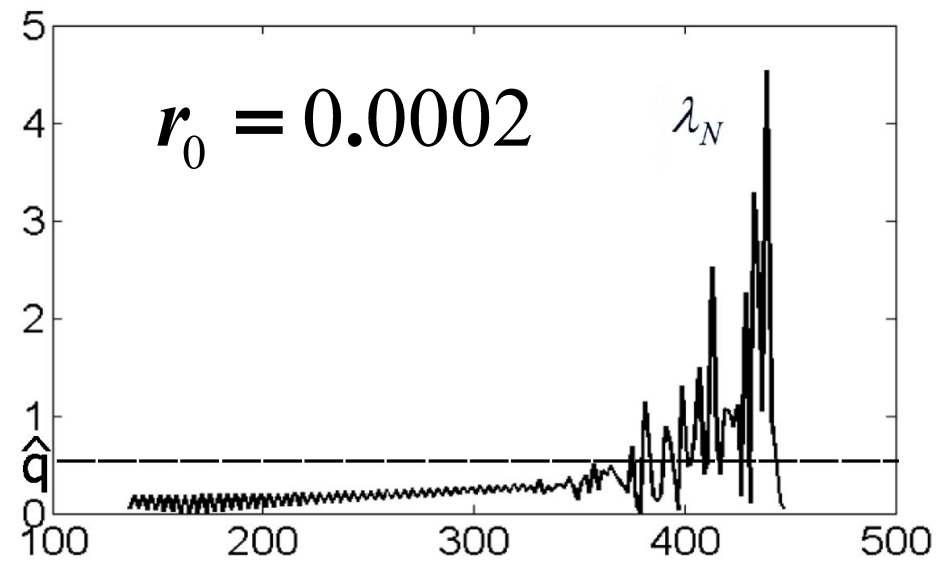
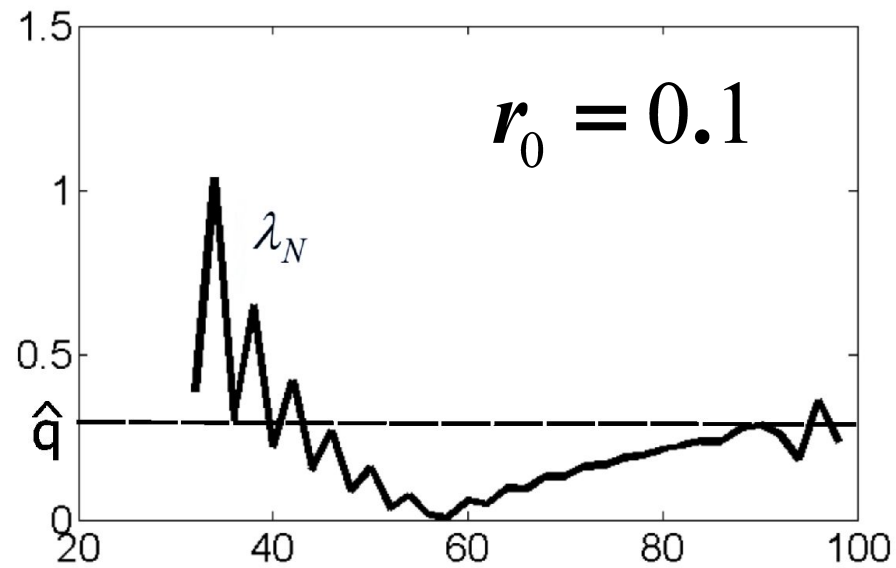
1) Bernstein S.N. "On the Best Approximation of Continuous Functions by Polynomials of a Given Degree",  
Soobshch. Khar'kov Mat.Obshch 13, 49--144 (1912)

2) Jackson D.} On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials

// Trans. Amer. Math. Soc. 1912. Vol. 13. 491 -- 515



# Определение величины $\hat{q}$

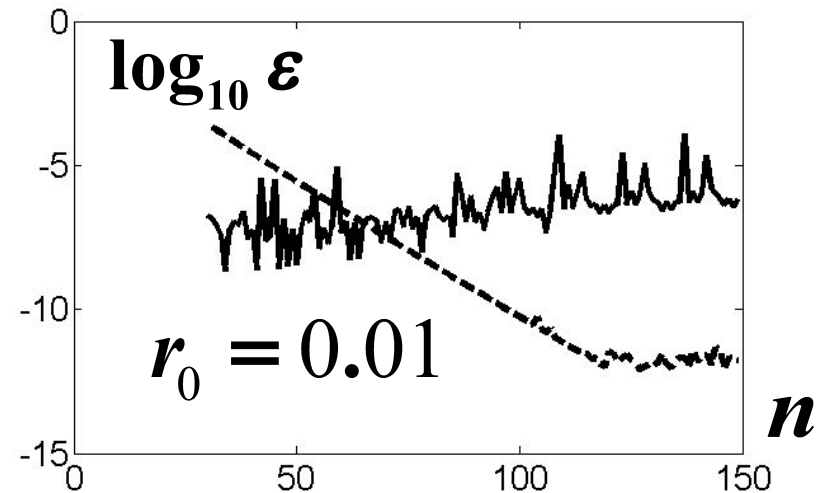
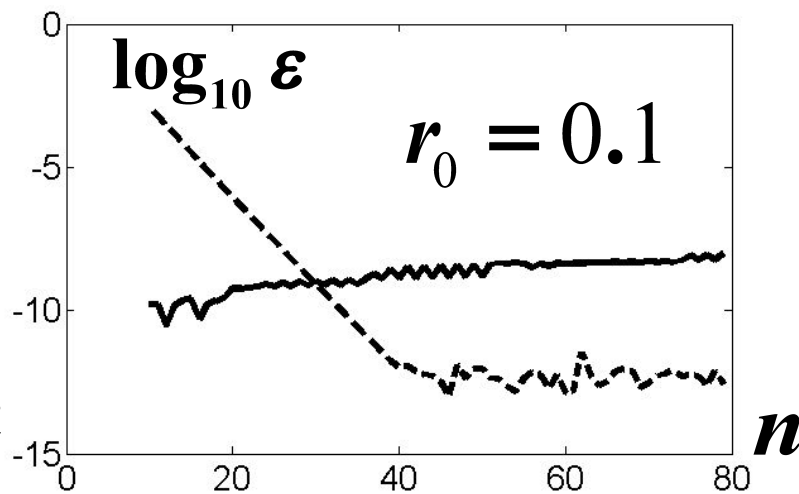
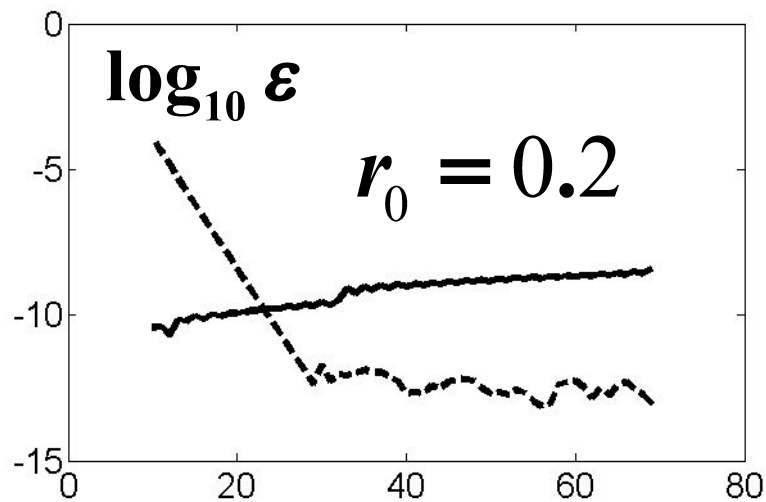


$$\lambda_N = \sqrt{\frac{|P_N(0) - P_{N+1}(0)|}{|P_{N-1}(0) - P_N(0)|}} \quad (8)$$

$$\varepsilon_M = \|P_N(u) - u\| \leq \frac{1}{1 - \varkappa_N} \|P_N(u) - P_{N+1}(u)\| \quad (6)$$

Экспоненциальная сходимость —  $\varkappa_N \sim \frac{\hat{q}^{N+1}}{\hat{q}^N} = \hat{q} < 1$

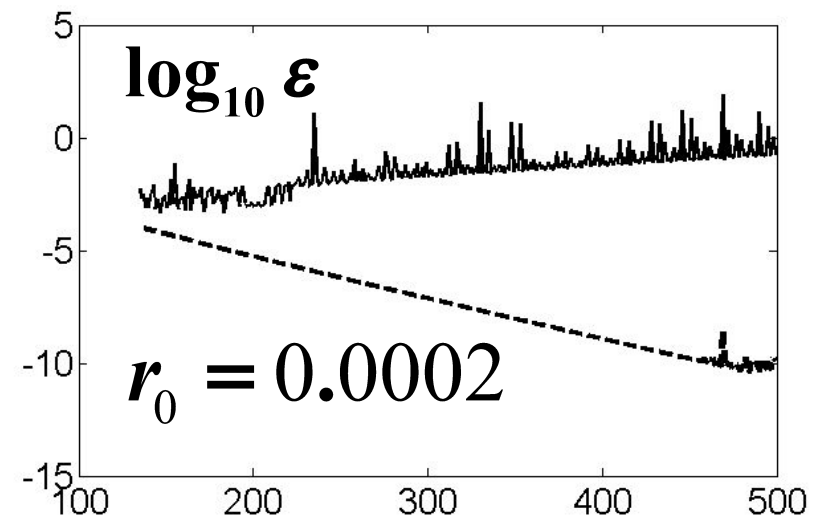
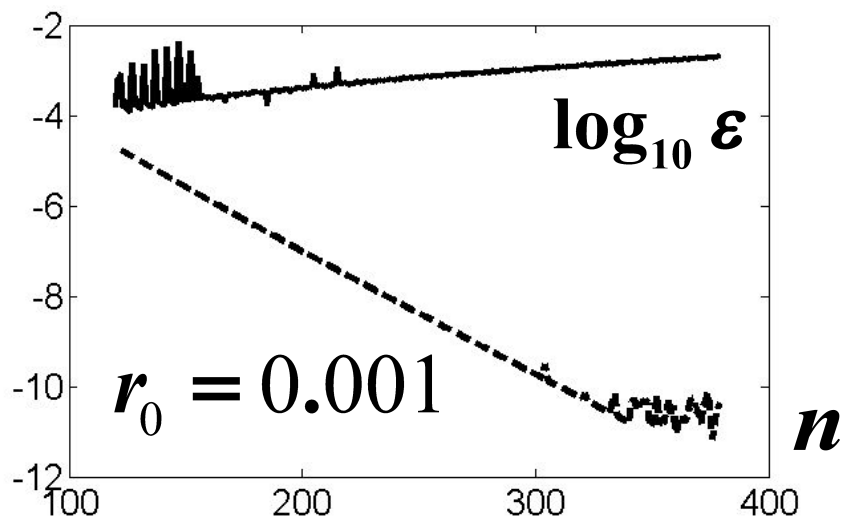
## Графики компонент погрешности $\varepsilon_R$ и $\varepsilon_M$ в логарифмической шкале



Сплошная –  $\varepsilon_R$

Пунктир –  $\varepsilon_M$

$r_0$	$\hat{q}$	$q_{\max}$
0.2	0.2	0.3780
0.1	0.27	0.4587
0.01	0.4	0.7989
0.001	0.6	0.8130
0.0002	0.7	0.9584



# Основные результаты

- 1. Для мезоскопической модели Покровского-Виноградова дана постановка задачи о стационарном неизотермическом течении вязкоупругой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами**
- 2. Разработан вариант численного алгоритма без насыщения, позволяющий решать задачу с малым параметром**
- 3. Проведён анализ зависимости численных решений от параметров задачи.**
- 4. Получены решения для предельно малого радиуса сечения нагревательного элемента ( $r_0=0.0001$ )**
- 5. Получена оценка вычислительной погрешности и погрешности метода**

# Список публикаций

- Блохин А.М., Круглова Е.А., Семисалов Б.В. Стационарные неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2017. Т. 57. № 7, С. 99-112
- Блохин А.М., Круглова Е.А., Семисалов Б.В. Численное моделирование неизотермического течения полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами с контролем погрешности // Тез. док. XVII Всерос. конф. мол. учёных по мат. мод. и информац. тех. Новосибирск, 30 октября–3 ноября 2016 г. С. 46.
- Блохин А.М., Круглова Е.А., Семисалов Б.В. Расчёт неизотермического течения полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами // Тез. док. VIII Всероссийской конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвящ. памяти акад. А.Ф. Сидорова, и Всероссийской молодёжной школы-конференции. Абрау-Дюрсо, 5–10 сентября 2016 г. С. 16–17.
- Круглова Е.А. Численный анализ свойств неизотермического течения полимерной жидкости в цилиндрическом канале с тонким нагревательным элементом // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференций (ISSC). Россия. Новосибирск, 16.04 – 20.04.2016. С. 50.
- Круглова Е.А. Численное моделирование неизотермического течения полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами с контролем погрешности // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференций (ISSC). Россия. Новосибирск, 16.04 – 20.04.2017. С. 153.

**Спасибо за внимание!**

*Круглова Е.А гр. 13111*

*Научный руководитель: Семисалов Б.В*

---

2017  
МНСК Международная научная  
студенческая конференция

**ДИПЛОМ**  
ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ  
присуждается

*Кругловой  
Екатерине Алексеевне*

за работу, представленную  
на 55-ю Международную научную студенческую конференцию  
МНСК-2017

Председатель оргкомитета МНСК-2017  
ректор НГУ, член-корреспондент РАН



Федорук М. П.

Новосибирск  
2017



Выступления на  
спецсеминарах:

1) «Проекционные методы  
решения PDE»  
(руководитель: Шапеев В.П)

2) «Вычислительная  
топология»  
(руководитель: Базайкин Я.В)

# Модель Покровского - Виноградова

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}_t + \nabla P = \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div}(\Phi \Pi) + \frac{\operatorname{Ra}}{\operatorname{Pr}} \frac{\Phi - 1}{\bar{\theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(a_{11})_t - 2A_1 u_x - 2a_{12} u_y - 2a_{13} u_z + L_{11} = 0, \quad (a_{22})_t - 2a_{12} v_x - 2A_2 v_y - 2a_{23} v_z + L_{22} = 0,$$

$$(a_{33})_t - 2a_{13} w_x - 2a_{23} w_y - 2A_3 w_z + L_{33} = 0,$$

$$(a_{12})_t + w_z a_{12} - A_1 v_x - A_2 u_y - v_z a_{13} - u_z a_{23} + L_{12} = 0,$$

$$(a_{13})_t - w_y a_{12} - A_1 w_x - A_3 u_z + v_y a_{13} - u_y a_{23} + L_{13} = 0,$$

$$(a_{23})_t + u_x a_{23} - A_2 w_y - A_3 v_z - w_x a_{12} - v_x a_{13} + L_{23} = 0, \quad \Phi_t = \Delta_{x,y,z} \Phi / \operatorname{Pr}.$$

Здесь  $t$  – время;  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости в декартовой с.к.  $x, y, z$ ;

$P$  – давление;  $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  – компоненты тензора анизотропии  $\Pi = (a_{ij}) = (a_1, a_2, a_3)$  ранга 2

# Уравнение движения модели Покровского- Виноградова

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\Phi \Pi) + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{\Phi - 1}{\bar{\theta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Силы давления

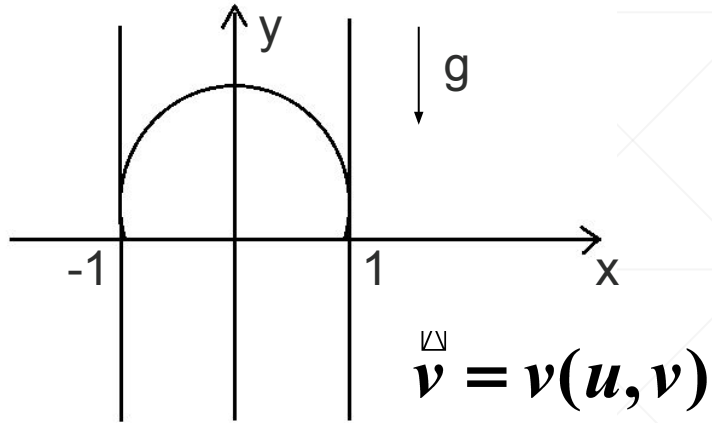
Силы вязкоупругого  
сопротивления

Сила, связанная с  
конвекцией в поле  
тяжести

---



# Пример устанавливающегося течения для уравнений Навье-Стокса



$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -(\underline{v} \nabla) \underline{v} + \mu \Delta \underline{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g}, \quad (1)$$

$$\nabla(\rho \underline{v}) = 0. \quad \text{- уравнение неразрывности}$$

В координатном виде.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

# Пример устанавливающегося течения для уравнений Навье-Стокса

Ищем стационарное решение Пуазейля  $(\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ -v \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p(y), \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0, \\ v = v(x). \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g = \lambda, -\text{const} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \lambda.$$

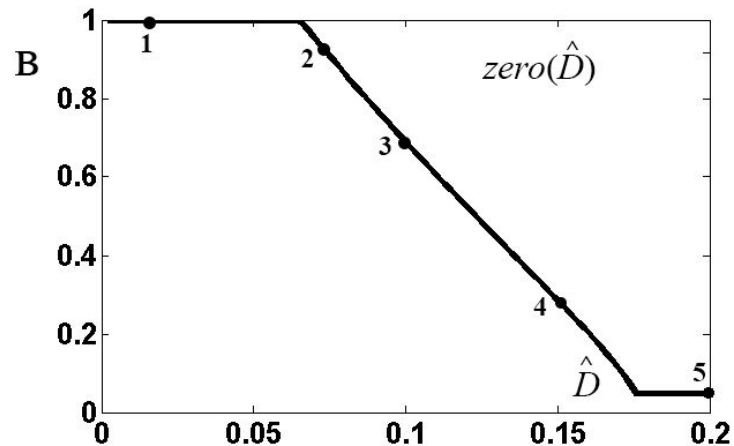
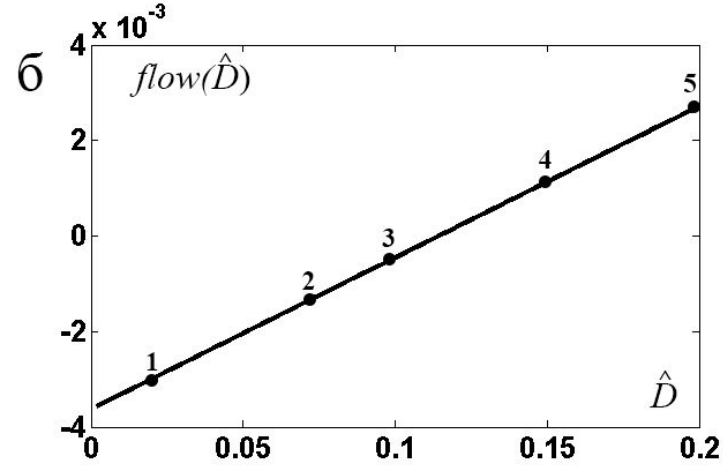
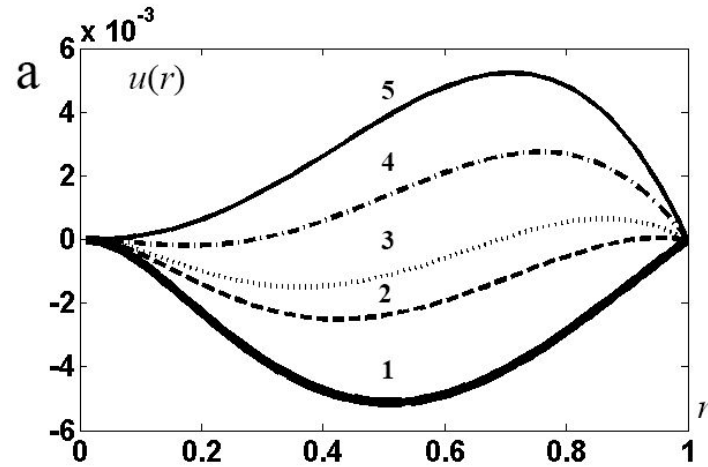
$$v(x) = \frac{\lambda + g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

Добавим условия прилипания

$$v(-1) = v(1) = 0$$

$$v(x) = \frac{\lambda + g}{2\mu} (x^2 + 1)$$

# Положительные и отрицательные значения решения



$$\theta = -0.5$$

$$E_A = 9$$

$$r_0 = 0.01$$

$$\beta = 0.1$$

$$W = 0.1$$

# Методы без насыщения

*К. И. Бабенко* Основы  
численного анализа, 2002

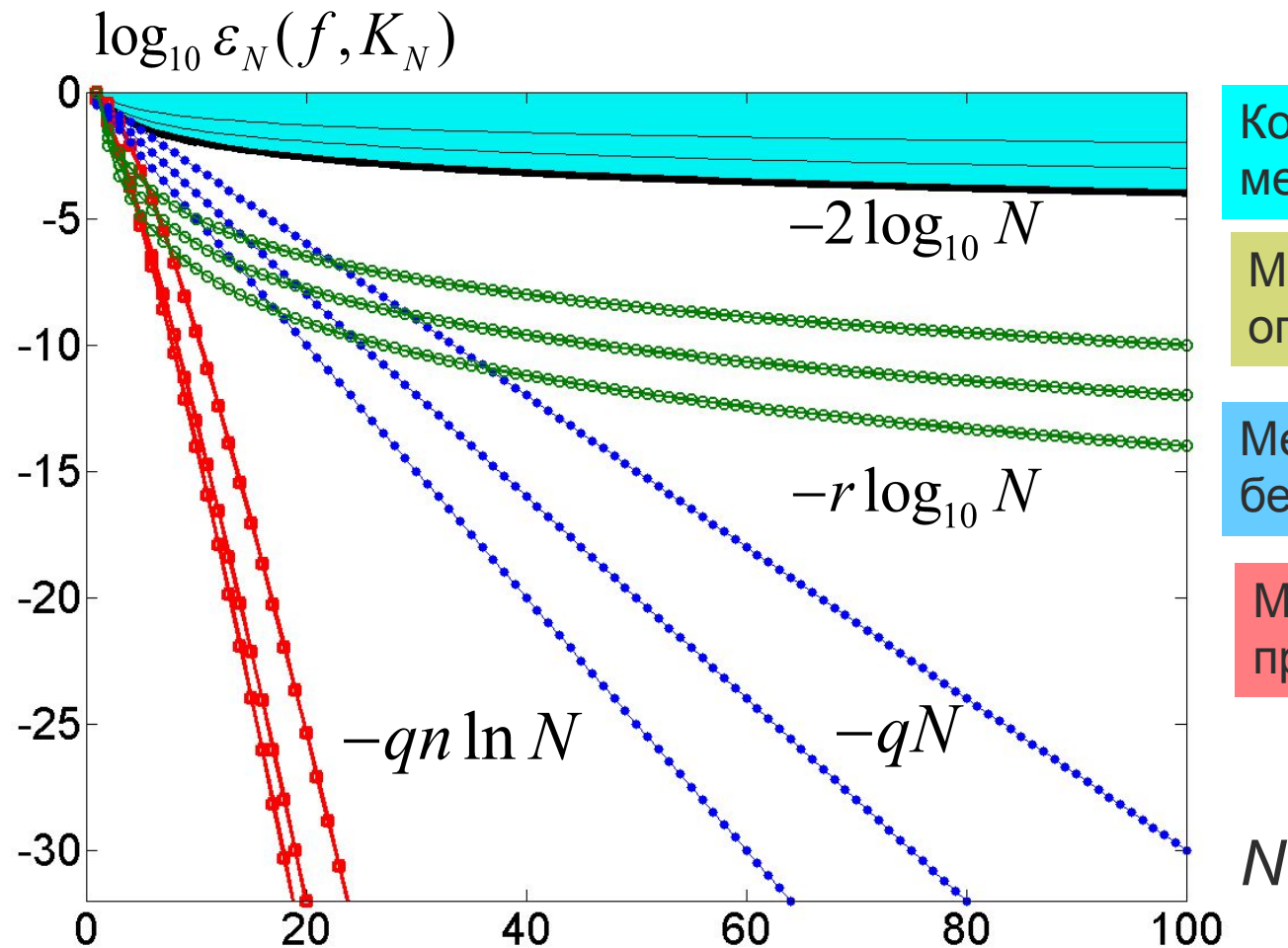
Метод, обладающий асимптотикой погрешности наилучшего приближения для любой степени гладкости решений

**Основная идея** – использовать информацию о гладкости решения

**Обоснование** содержится в работах по теории приближений Фурье, Чебышёва, Лебега, Джексона, Бернштейна, Бабенко

---

# Асимптотики приближений



Конечно-разностные методы,  
методы конечных элементов

Методы без насыщения при  
ограниченной гладкости  $f$

Методы без насыщения при  
бесконечной гладкости  $f$

Методы без насыщения  
при целой  $f$

$K_N$  - пространство алгебраических или тригонометрических многочленов степени  $N$

# Уравнение модели

$\beta$  – феноменологический параметр реологической модели, учитывающий ориентацию макромолекулярного клубка  
 $Re$  – число Рейнольдса  
 $W$  – число Вейсенберга  
 $Ra$  – число Релея  
 $Pr$  – число Прандтля  
 $\hat{A}$  – перепад давления вдоль  $Ox$   
 $E_A$  – энергия активации  
 $\theta$  – относительная разность температур между цилиндрами  
 $\Phi$  – температурный фактор  
 $Ga$  – число Грасгофа

$$(\hat{u}_y/\hat{K})_y + (\hat{u}_z/\hat{K})_z = -\hat{G}, \quad (y, z) \in \Omega.$$

$$\hat{K} = \frac{\tilde{K}}{J}, \quad \tilde{K} = \frac{1}{4} \left( \hat{m}_0 + \frac{4\alpha\epsilon^2\Lambda^2}{\hat{m}_0} \right), \quad J = \exp\left(-\bar{E}_A \frac{\hat{\Phi} - 1}{\hat{\Phi}}\right),$$

$$\hat{m}_0 = \sqrt{\hat{g}_0}(\sqrt{2} + \sqrt{\hat{g}_0}), \quad \hat{g}_0 = 1 + \sqrt{1 + 4\Lambda^2},$$

$$\Lambda = \sqrt{1 - \rho^2 W \tau_0 \hat{\lambda}}, \quad \tau_0 = J/\hat{\Phi}, \quad \hat{\lambda} = \sqrt{\hat{u}_y^2 + \hat{u}_z^2},$$

$$\rho = 2\beta - 1, \quad \alpha\epsilon^2 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho},$$

$$\hat{G} = Re \left( \hat{A} + Ga \frac{\hat{\Phi} - 1}{\theta} \right), \quad \hat{\Phi} = 1 + \bar{\theta} \frac{\ln r}{\ln r_0}, \quad \hat{D} = Re \hat{A},$$

## Сведение к задаче линейной алгебры

Умножим на  $R_A^{-1} * | k_1 U^{[n]} - (\tau + k_2) A U^{[n]} = F(U^{[n-1]})$ ,

Обозначим  $V^{[n]} = R_A^{-1} U^{[n]}$ ,  $G = R_A^{-1} F(U^{[n-1]})$ ,

Тогда  $k_1 V^{[n]} - (k_2 + \tau) D_A V^{[n]} = G$ ,

$$v_j = \frac{g_j}{k_1 - (k_2 + \tau) d_A^j}.$$

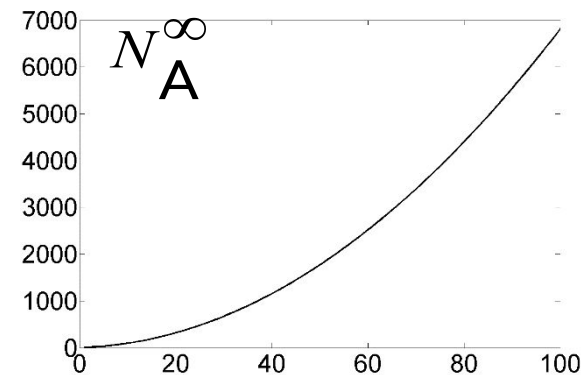
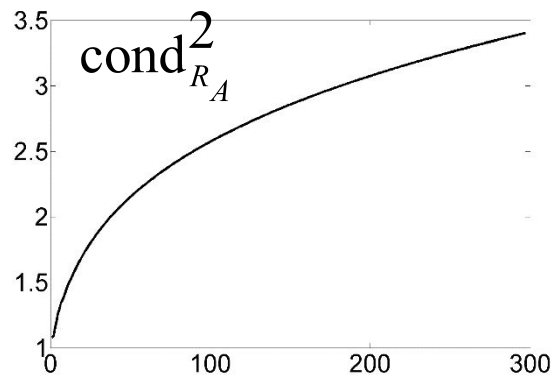
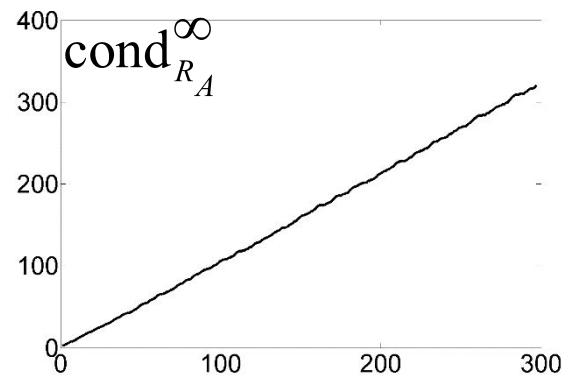
Ответ получим из

$$U^{[n]} = R_A V^{[n]}$$

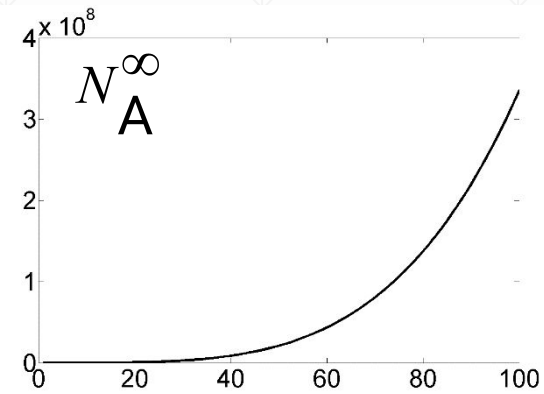
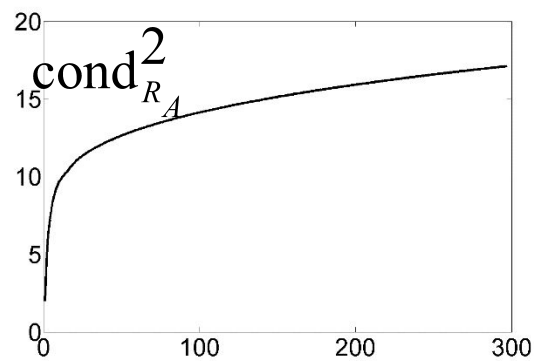
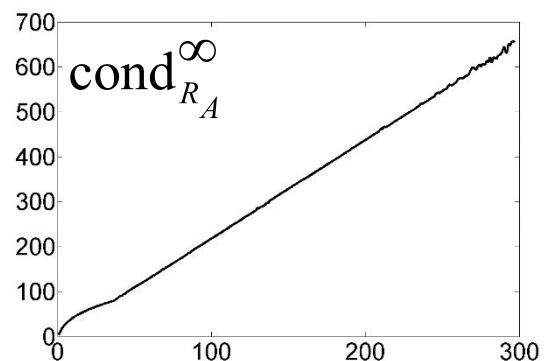
---

# Анализ величин обусловленности и норм аппроксимирующих матриц

Условия Дирихле



Условия Неймана





# Основные оценки

1) Элементы массива решения  $\mathbf{U}$  имеют погрешности  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} + \delta_{\mathbf{U}}$ ,  $\|\delta_{\mathbf{U}}\| \leq \delta \|\mathbf{U}\|$

$\delta_{\mathbf{U}}$  - массив, элементы которого суть возмущения элементов;

$\|\delta_{\mathbf{U}}\|$  - максимальное из этих возмущений

2) При поиске значений производных  $\mathbf{U}$  погрешность возрастает:

$$A\mathbf{U} \rightarrow (A + \delta_A)(\mathbf{U} + \delta_{\mathbf{U}}) = A\mathbf{U} + \delta_{A\mathbf{U}}, \quad \|\delta_{A\mathbf{U}}\| \leq \|\delta_A \mathbf{U}\| + \|A\delta_{\mathbf{U}}\| + \|\delta_A \delta_{\mathbf{U}}\|,$$

$$\|\delta_A \mathbf{U}\| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |(\delta_A)_{ij} u_j| \leq \delta \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \max_{j=1, \dots, N} |u_j| \leq \delta N_A^\infty \|\mathbf{U}\|, \quad N_A^\infty = \|A\|_\infty,$$

$$\|A\delta_{\mathbf{U}}\| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij} (\delta_{\mathbf{U}})_j| \leq \delta \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \max_{j=1, \dots, N} |(\delta_{\mathbf{U}})_j| \leq \delta N_A^\infty \|\delta_{\mathbf{U}}\|.$$

$$\|\delta_{A\mathbf{U}}\| \leq N_A^\infty (\delta \|\mathbf{U}\| + \|\delta_{\mathbf{U}}\|)$$

---

# Основные оценки

$$k_1 \mathbf{U}^{[n]} - (\tau + k_2) A \mathbf{U}^{[n]} = F(\mathbf{U}^{[n-1]}) * R_A^{-1}$$

$$k_1 \mathbf{V}^{[n]} - (\tau + k_2) D_A \mathbf{V}^{[n]} = \mathbf{G}$$

$$\|\delta_V\| \leq \frac{N_{R_A^{-1}}^\infty \|\delta_G\|}{\min_{j=1, \dots, N} (k_1 - (\tau + k_2) d_A^j)}$$

$$\|\delta_G\| \leq k_1 \|\delta_U\| + |k_1| \delta \|\mathbf{U}\| + (\tau + k_2) (\|\delta_{AU}\| + \|AU\| \delta) + [\varepsilon_S + \Psi(N_A^\infty, \delta, \|\mathbf{U}\|)]$$

$$\varepsilon_R = \|\delta_U\| \leq \delta N_{R_A}^\infty \|\mathbf{V}\| + \text{cond}_{R_A}^\infty \frac{k_1 \|\delta_U\| + |k_1| \delta \|\mathbf{U}\| + (\tau + k_2) (\|\delta_{AU}\| + \|AU\| \delta) + [\varepsilon_S + \Psi(N_A^\infty, \delta, \|\mathbf{U}\|)]}{\min_{j=1, \dots, N} (k_1 - (\tau + k_2) d_A^j)}$$


---