# Методы оптимальных решений

**Карташева Ольга Витальевна**

**к.п.н., доцент**

**o.kartasheva@list.ru**

# План лекции

1. Виды работ по дисциплине.
2. Методы оптимизации.
3. Задачи линейного программирования.
4. MS Excel как средство решения задач линейного программирования.

# ВИДЫ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

# Виды работ по дисциплине

| Вид работы | Баллы в БРС |
| --- | --- |
| Работа на занятиях | 20 |
| Контрольная работа | 20 |
| Экзамен | 60 |

86-100 – «отлично»
70-85 – «хорошо»
50-69 – «удовлетворительно»

# Литература

Теоретический материал

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

# Методы оптимизации

Поиск экстремума функции (в практических задачах — критериев оптимальности) при наличии ограничений или без ограничений очень широко используются на практике:

- оптимальное проектирование (выбор наилучших номинальных технологических режимов, элементов конструкций, структуры технологических цепочек, условий экономической деятельности, повышение доходности),
- оптимальное управление,
- построение нелинейных математических моделей объектов управления,
- другие аспекты решения экономических и соц
  проблем (например,
  управление запасами, трудовыми ресурсами, транспортными потоками).

# Суть принципа оптимальности

- состоит в стремлении выбрать такое управленческое решение, которое *наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной* деятельности хозяйствующего субъекта.

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

1) ***по характеру взаимосвязи между переменными:***

а) *линейные* — все функциональные связи в системе ограничений и функция цели — линейные функции;

б) *нелинейные* — наличие нелинейности хотя бы в одном из упомянутых в п. «а» элементов;

2) ***по характеру изменения переменных:***

а) *непрерывные* — значения каждой из управляющих переменных могут заполнять сплошь некоторую область;

б) *дискретные* — все или хотя бы одна переменная могут принимать некоторые целочисленные значения;

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

3) ***по учету фактора времени:***

а) *статические* — моделирование и принятие решений осуществляются в предположении о независимости от времени элементов модели в течение периода, на который принимается управленческое решение;

б) *динамические* — предположение о независимости элементов модели от времени в достаточной мере не обосновано;

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

4) ***по наличию информации о переменных:***

а) *задачи в условиях полной определенности* (детерминированные);

б) *задачи в условиях неполной информации* (случай риска) — отдельные элементы являются вероятностными величинами, однако известны или дополнительными статистическими исследованиями могут быть установлены их законы распределения вероятностей;

в) *задачи в условиях неопределенности* — можно сделать предположение о возможных исходах случайных элементов, но нет возможности сделать вывод о вероятностях исходов;

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

5) ***по числу критериев оценки альтернатив:***

а) *простые, однокритериальные* — задачи, где экономически приемлемо использование одного критерия оптимальности
или удается специальными процедурами свести многокритериальный поиск к однокритериальному;

б) *сложные, многокритериальные* — выбор управленческого решения по нескольким показателям.

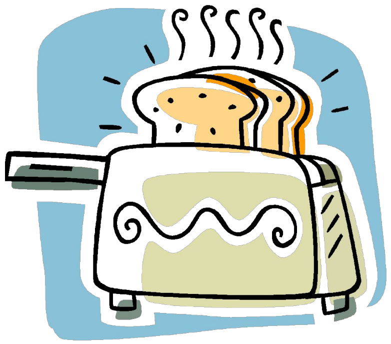
# Задачи линейного программирования

- Задачи нахождения значений параметров, при которых получается минимум или максимум целевой функции с учетом ограничений, наложенных на ее аргументы, называются задачами ***математического программирования***.
- Если целевая функция выражает линейную зависимость между величинами, мы имеем дело с частным случаем – с задачами ***линейного программирования***.

# Пример 1 Задача использования сырья

Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используется три вида сырья: С1 ,С2 и С3. Запасы сырья на складе и расход сырья на изготовление ед. продукции, приведены в таблице:

| Вид сырья | Запас сырья | Расход сырья | |
|---|---|---|---|
| | | П1 | П2 |
| С1 | 20 | 2 | 5 |
| С2 | 40 | 8 | 5 |
| С3 | 30 | 5 | 6 |



Прибыль от реализации единицы продукции П1 составляет 50 руб., а продукции П2 – 40 руб. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить max прибыль.

# Пример 2 Задача о составлении пищевого рациона

Предприятие производит откорм бычков (свиней, уток). Имеется два вида продуктов П1 и П2. При откорме это животное должно ежедневно получать не менее 9 ед. питательного вещества С1, не менее 8 ед. вещества С2 и не менее 12 ед. вещества С3.

| Питательные вещества | Корм П1 | Корм П2 |
|---|---|---|
| С1 | 2 | 1 |
| С2 | 1 | 2 |
| С3 | 1 | 6 |

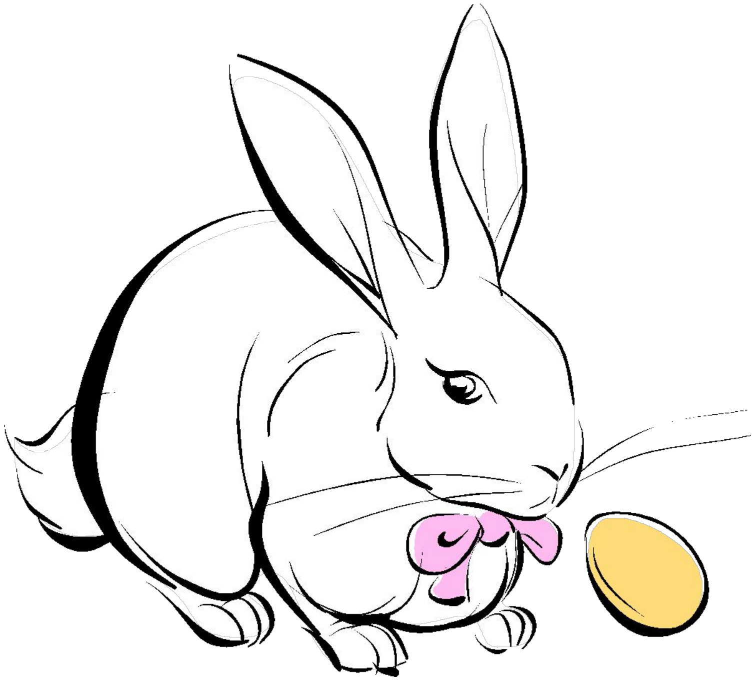
Требуется составить такой пищевой рацион, чтобы заданные условия по содержанию в рационе основных питательных веществ были выполнены, при этом стоимость рациона была бы минимальна.

# Пример 3 Нахождение максимума и минимума при условиях-ограничениях

Найдите максимум и минимум линейной функции $F = -2x_1 + 4x_2$

при условиях-ограничениях:

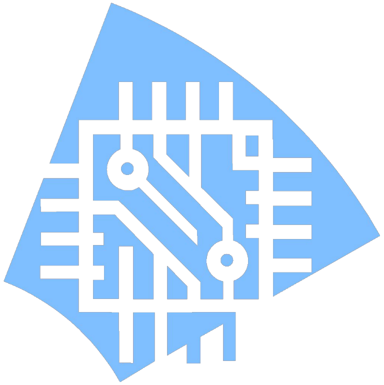
- $6x_1 - 2x_2 <= 12$,
- $- x_1 + 2x_2 <= 5$,
- $x_1 + x_2 * >= 1$,
- $x_1, x_2 >= 0$.



Независимо от смыслового значения все задачи математического программирования с формальной точки зрения сводятся к одной и той же проблеме: найти значения переменных которые удовлетворяют заданным ограничениям, и при которых целевая функция достигает максимального (минимального) значения. В задачах линейного программирования целевая функция имеет вид линейной функции.

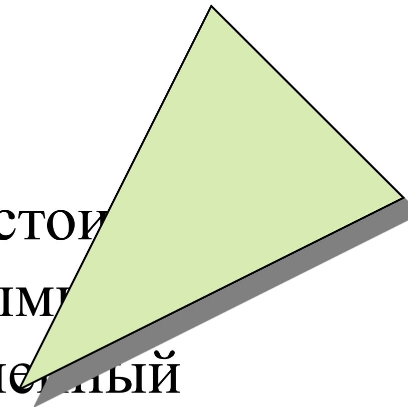
# Методы решения задач линейного программирования

- Геометрический
- С использованием электронных таблиц



# Выпуклое множество

- Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую комбинацию.
- Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий.
- Примерами выпуклых множеств являются прямолинейный отрезок, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.



- ***Угловыми точками*** выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух произвольных точек множества. Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, круга — точки окружности, которые его ограничивают.
- Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто). Непустое множество планов называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений - вершиной.

- Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то целевая функция задачи принимает максимальное значение в одной из вершин многогранника решений.
- Если максимальное значение достигается более чем в одной вершине, то целевая функция принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

# Этапы решения задачи линейного программирования геометрическим методом

1. На плоскости строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Строят многоугольник решений.
4. Строят вектор, который указывает направление возрастания целевой функции.
5. Строят начальную прямую целевой функции затем передвигают ее в направлении вектора до крайней угловой точки многоугольника решений.

## Этапы решения задачи линейного программирования геометрическим методом

6. В результате находят точку, в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо множество точек с одинаковым максимальным значением целевой функции, если начальная прямая сливается с одной из сторон многоугольника решений, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки максимум функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.
8. Минимальное значение линейной функции цели находится путем передвижения начальной прямой в направлении, противоположном вектору.

# Пример. Задача о костюмах.

Намечается выпуск двух видов костюмов - мужских и женских. На женский костюм требуется 1м шерсти, 2м полиэстера и 1человеко-день трудозатрат. На мужской –3,5м шерсти, 0,5м полиэстера и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350м шерсти, 240 м полиэстера и150 человекодней трудозатрат.

Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского-20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

# Решение.

Обозначим: $x_1, x_2$-число женских и число мужских костюмов соответственно.

Целевая функция $F = 10x_1 + 20x_2 \to \max$

Ограничения
$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \le 350, \\ 2x_1 + 0,5x_2 \le 240, \\ x_1 + x_2 \le 150, \\ x_2 \ge 60, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0.$$

Построим прямые

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 = 350, \\ 2x_1 + 0,5x_2 = 240, \\ x_1 + x_2 = 150, \\ x_2 = 60 \end{cases}$$

Первая прямая пересекает оси координат в точках (350;0) и (0;100), вторая – в точках (120;0) и (0;0;480), третья – в точках (150;0) и (0;150). Четвертая прямая проходит параллельно оси

. $Ox_1$

Строим все прямые и получаем четырехугольник, все точки которого удовлетворяют всем четырем функциональным ограничениям. Легко проверить: например, т.(0;0) лежит ниже всех трех первых прямых, но не удовлетворяет последнему соотношению. Так что, все точки внутри многоугольника удовлетворяют всем четырем неравенствам. Теперь построим градиент целевой функции (10;20).

Для этого соединим точку (10,20) с началом координат. Можно построить вектор, пропорциональный этому вектору, т.е. длиннее или короче в зависимости от масштаба

Затем перпендикулярно ему основную прямую  и будем перемещать ее в направлении градиента до ее выхода из ОДР. Это произойдет в точке пересечения прямых

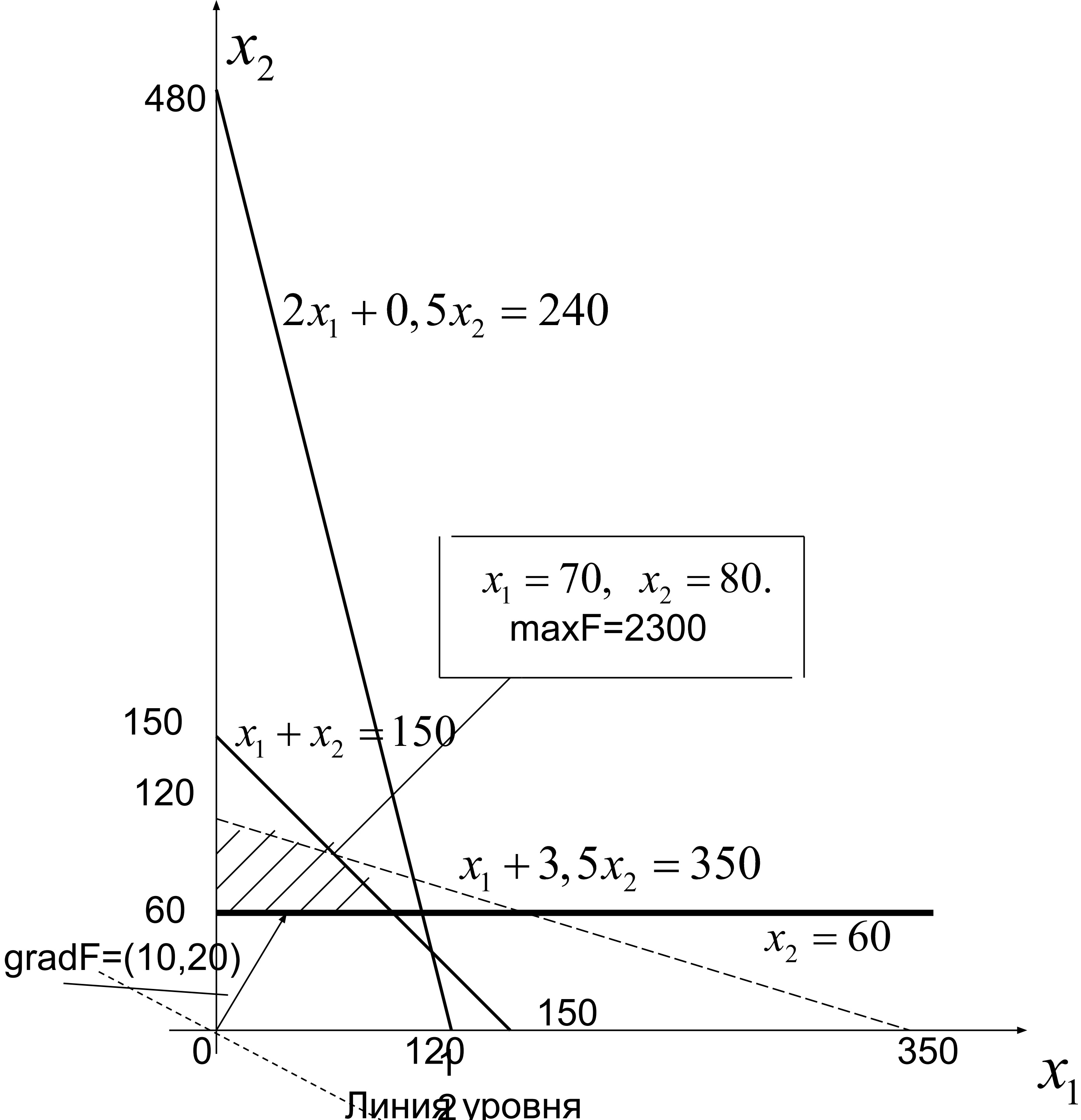
$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 = 350, \\ x_1 + x_2 = 150. \end{cases}$$

Решим систему двух уравнений

и получим точку $\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 = 350, \\ x_1 + x_2 = 150. \end{cases}$

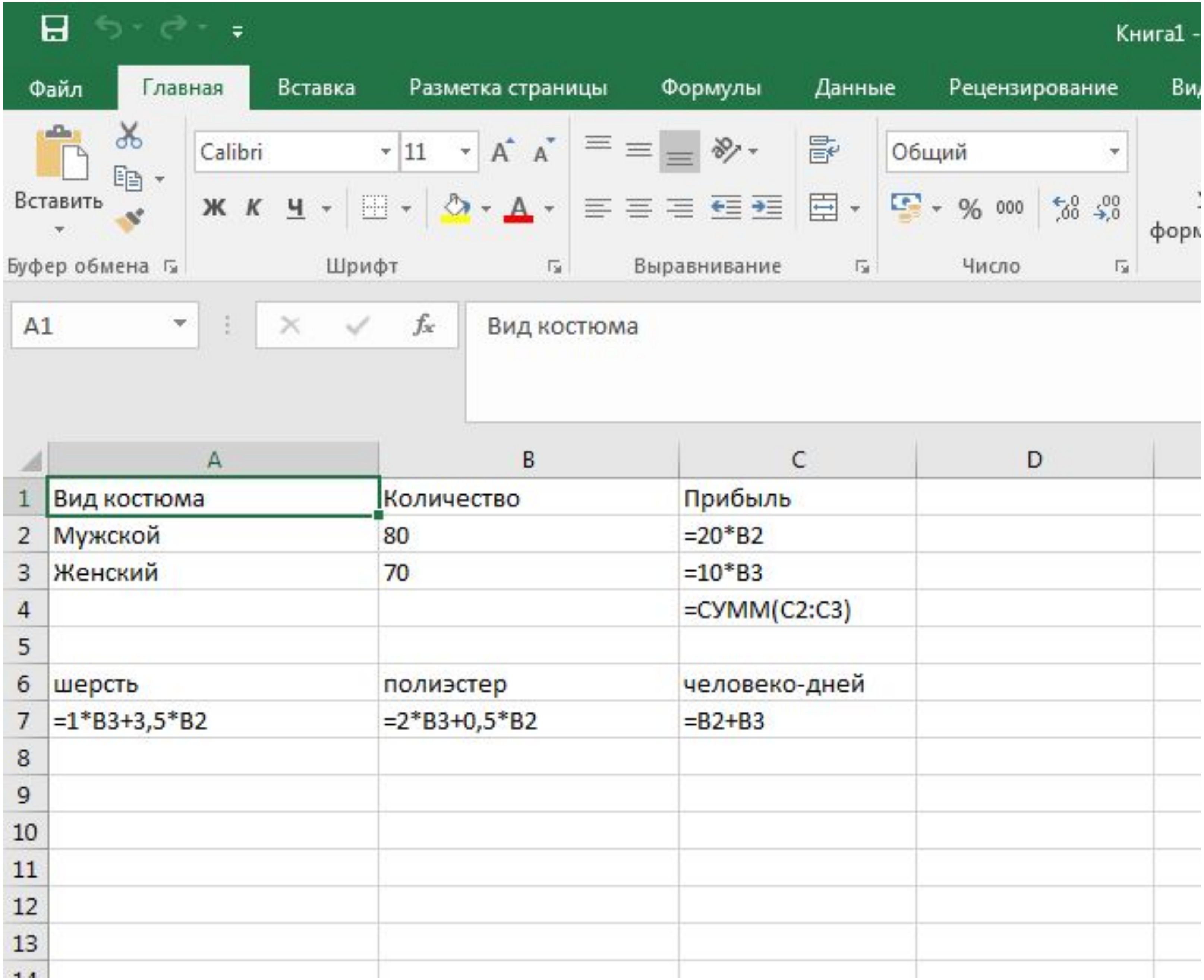
При этих значениях $x_1 = 70, \quad x_2 = 80.$

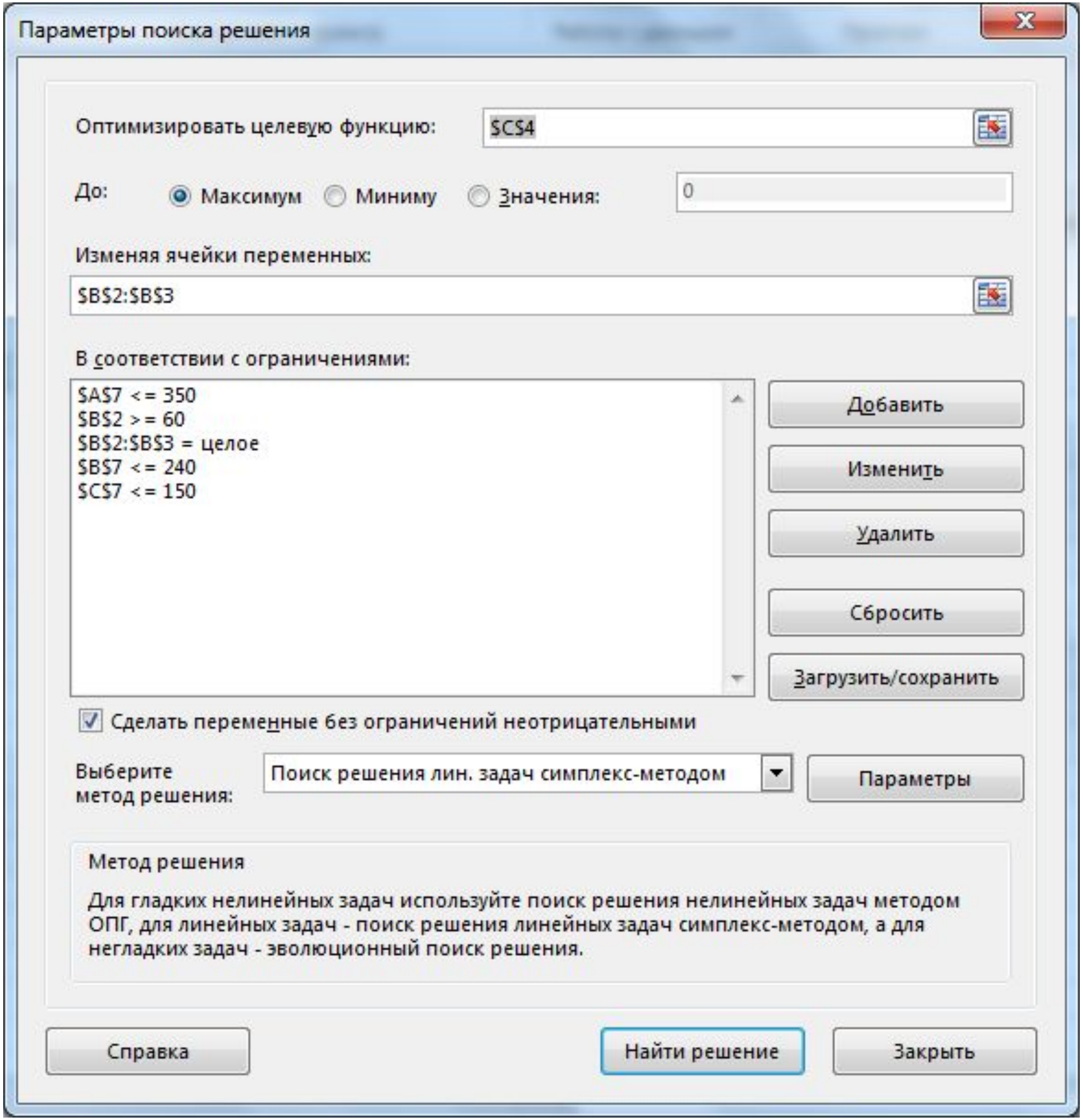
$$\max F = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 80 = 2300.$$



$x_2$
480
$2x_1 + 0,5x_2 = 240$
$x_1 = 70, \quad x_2 = 80.$
maxF=2300
150
$x_1 + x_2 = 150$
120
$x_1 + 3,5x_2 = 350$
60
$x_2 = 60$
gradF=(10,20)
150
0
120
350
$x_1$
Линия уровня

# MS Excel как средство решения задач линейного программирования


Книга1 -
Файл
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Calibri
11
Общий
Вставить
Ж К Ч
Буфер обмена
Шрифт
Выравнивание
Число
A1
Вид костюма
A B C D
1 Вид костюма | Количество | Прибыль
2 Мужской | 80 | =20*B2
3 Женский | 70 | =10*B3
4 | | =СУММ(C2:C3)
5
6 шерсть | полиэстер | человеко-дней
7 =1*B3+3,5*B2 | =2*B3+0,5*B2 | =B2+B3
8
9
10
11
12
13


Параметры поиска решения
Оптимизировать целевую функцию:
$C$4
До:
Максимум
Миниму
Значения:
0
Изменяя ячейки переменных:
$B$2:$B$3
В соответствии с ограничениями:
$A$7 <= 350
$B$2 >= 60
$B$2:$B$3 = целое
$B$7 <= 240
$C$7 <= 150
Добавить
Изменить
Удалить
Сбросить
Загрузить/сохранить
Сделать переменные без ограничений неотрицательными
Выберите метод решения:
Поиск решения лин. задач симплекс-методом
Параметры
Метод решения
Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.
Справка
Найти решение
Закрыть