Лекция №3

по дисциплине : «Метрология стандартизация и сертификация»

Тема: «Теория погрешностей, случайные и систематические погрешности»

Учебные вопросы:

Вопрос №1 Случайные погрешности и способы их обнаружения.

Вопрос №2 Критерии для исключения систематических погрешностей.

Вопрос №3 Формы представления результатов измерения.

Вопрос №1

Случайные погрешности и способы их обнаружения.

Случайные погрешности.

<u>Случайная погрешность</u> – составная часть погрешности результата измерения, изменяющаяся случайно, незакономерно при проведении повторных измерений одной и той же величины. Появление случайных погрешностей нельзя предвидеть и предугадать, они неизбежны и неустранимы и всегда присутствуют в результатах измерений.

Каждая случайная погрешность возникает в результате воздействия многих факторов, каждый из которых сам по себе не оказывает значительного влияния на результат.

распределения.

X_1	X_2	...	X_n
P_1	P_2	...	P_n

Графическое изображение ряда распределения называют полигоном распределения случайной величины.

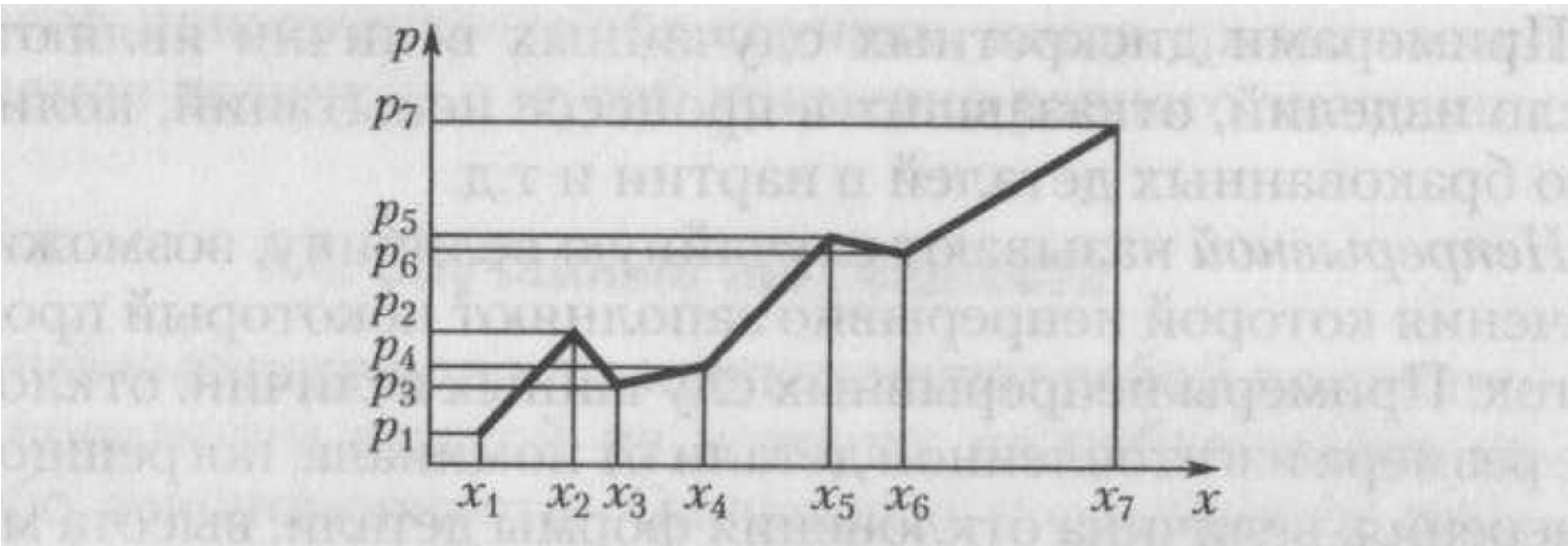


Рис. 4.1. **График распределения вероятностей дискретной случайной величины**

величин.

Функцией распределения случайной величины X называют вероятность выполнения неравенства X< x .

$$F(x) = P(X - x)$$

где: x - неслучайный аргумент.

Функция распределения F(x) должна быть неубывающей функцией своего аргумента.

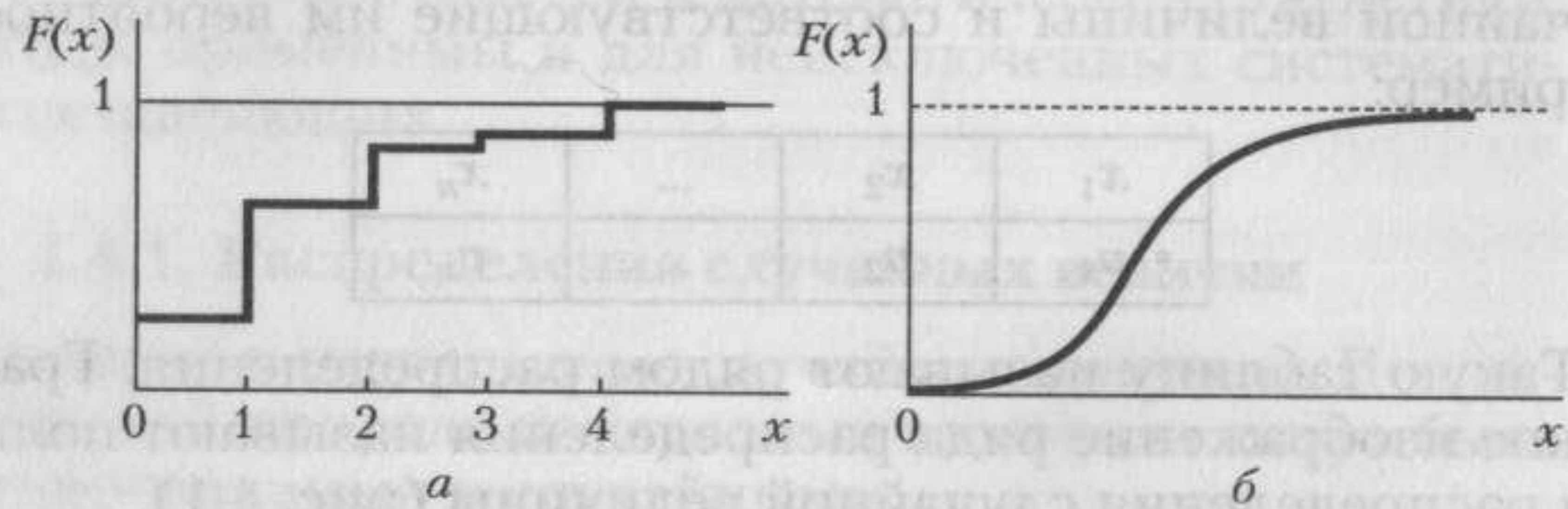


Рис. 4.2. **Функции распределения дискретной (*а*) и непрерывной (*б*) случайных величин**

Основные законы распределения.

Использование на практике вероятностного подхода к оценке погрешностей результатов измерений, прежде всего предполагает знание аналитической модели закона распределения рассматриваемой погрешности.

Множество законов распределения случайных величин используемых в метрологии целесообразно классифицировать следующим образом:

- Трапецеидальные (плосковершинные) распределения. К ним относятся: равномерное, собственно трапецеидальное и треугольное (Симпсона)
- Уплощенные (приблизительно плосковершинные) распределения;
- Экспонециальные распределения;
- Семейство распределений Стьюдента;
- Двухмодальные распределения.

величин.

Для изучения распределения случайных величин пользуются рядом числовых характеристик: мер положения и мер рассеивания.

К характеристикам положения относятся: ***математическое ожидание, мода, медиана.***

Математическое ожидание M(x) дискретной случайной величины X называется сумма произведений возможных ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

где n – число возможных значений случайной величины.

Математическим ожиданием M(x) непрерывной случайной величины X называется определенный интеграл от произведения плотности вероятности φ(x) на действительную переменную x, взятую в пределах от -∞ до +∞:

$$M(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$$

Модой Mo(x) называют значение случайной величины, имеющее у дискретной величины наибольшую вероятность, а у непрерывной – наибольшую плотность вероятности.

Медианой случайной величины X называют такое ее значение ***Me(x)***, для которого функция распределения равна 0,5.

распределения.

<u>Теорема закона нормального распределения</u>:

если случайная величина ***X*** представляет сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин ***x1, x2…xn***, влияние каждой из которых на всю сумму незначительно, то независимо от того, каким законам распределения подчиняются слагаемые ***x1,x2…xn,*** сама величина ***X*** будет иметь распределение вероятностей, близкое к нормальному, и тем точнее, чем больше число слагаемых.

Плотность вероятности или дифференциальная функция распределения случайной величины непрерывного типа, подчиняющаяся закону нормального распределения, имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

где: x – переменная случайная величина;

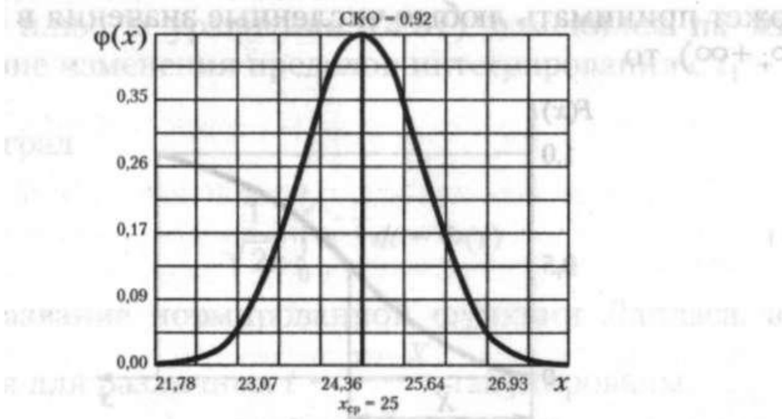
φ(x) – плотность вероятности;

σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины x от Ẍ – среднее значение (математическое ожидание) величины x;

e – основание натуральных логарифмов, e=2,71828.

распределения.

Дифференциальная функция нормального распределения графически выражается в виде кривой колокообразного типа. Из вида кривой нормального распределения следует, что она симметрична относительно ординаты точки $x=\overline{X}$.



. Теоретическая кривая нормального распределени при среднем значении $x_{ср}$ = 25 и СКО = 0,92

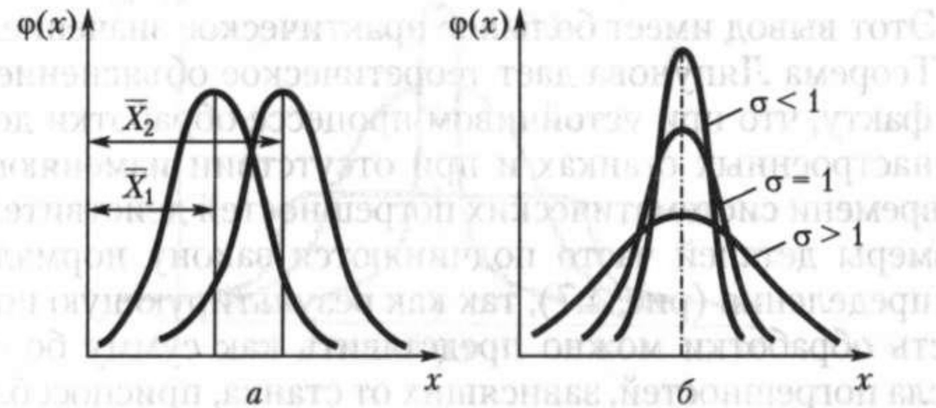
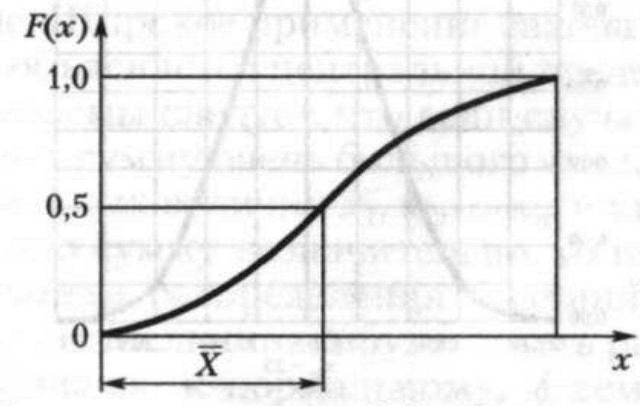


Рис. 4.8. **Влияние среднего арифметического $\overline{X}$ и среднего квадратичного σ значений на положение и форму кривой нормального распределения**



Кривая интегральной функции нормального распределения

Интегральный закон нормального распределения выражается следующим об

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}$$

Для оценки отклонений эмпирического распределения от нормального используются безразмерные характеристики: коэффициент асимметрии α и коэффициент эксцесса τ.

Мера асимметрии вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_i - \bar{X})^3}{n\sigma^3}$$

где n – объем совокупности.

Мера эксцесса распределения вычисляется по формле:

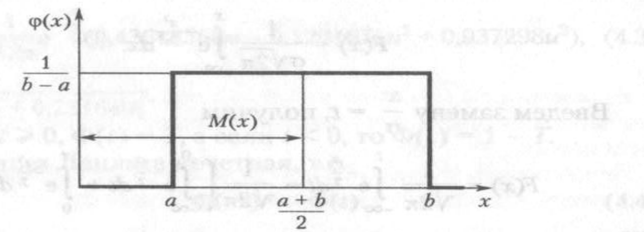
$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^4}{n\sigma^4} - 3$$

распределения.

Равномерным распределением называют такое распределение случайной величины, когда она с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в заданных пределах.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, \text{при } a\le x\le b\\ 0, \text{при } x>b\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<a\\ \int\limits_a^x \varphi(x)dx=\int\limits_a^x \dfrac{dx}{b-a}=\dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a\le x\le b\\ 1, \text{при } x>b\end{cases}$$



Плотность вероятности (дифференциальная функция) равномерного распределения

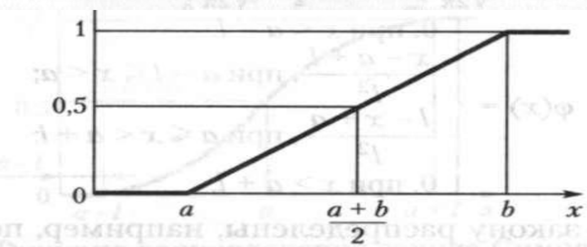


Рис. 4.11. **График интегральной функции равномерного распределения**

Математическое ожидание (*M (x)*), дисперсия (*D(x)*) и среднее квадратическое отклонение (σ) случайной величины, подчиняющейся равномерному распределению, соответственно

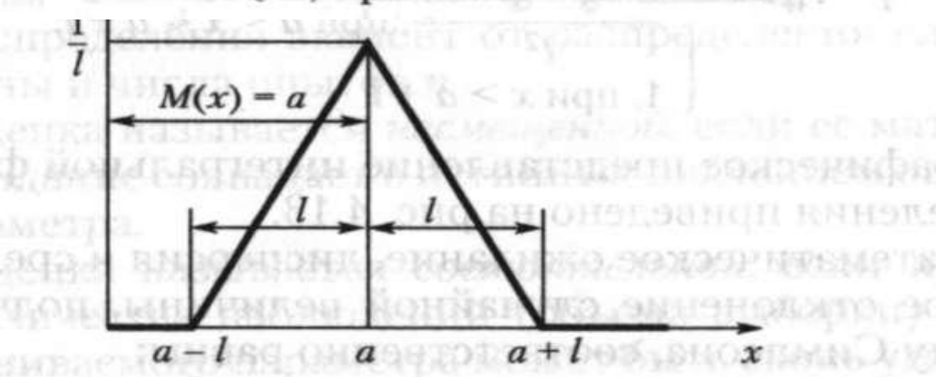
$$M(x)=\frac{a+b}{2};\ D(x)=\frac{(a+b)^2}{12};\quad \sigma=\frac{b+a}{2\sqrt{3}}$$

Закон Симпсона.

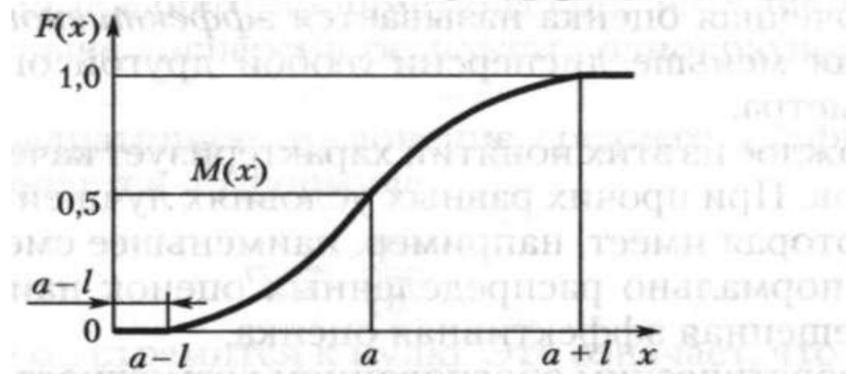
Закон Симсона – закон треугольного распределения плотности вероятности.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < a - l; \\ \dfrac{x - a + l}{l^2}, \text{ при } a - l \leqslant x < a; \\ \dfrac{l - x + a}{l^2}, \text{ при } a \leqslant x < a + l; \\ 0, \text{ при } x > a + l. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < a - l; \\ \dfrac{[x - (a - l)]^2}{2l^2}, \text{ при } a - l \leqslant x \leqslant a; \\ \dfrac{|x - (a + l)]^2}{l^2}, \text{ при } a < x \leqslant a + l; \\ 1, \text{ при } x > a + l. \end{cases}$$



12. Плотность вероятности закона Симпсона



Функция распределения закона Симпсона

Математическое ожидание (*M (x)*), дисперсия (*D(x)*) и среднее квадратическое отклонение (σ) случайной величины, подчиняющейся закону Симпсона, соответственно равны:

$$M(x) = a \qquad D(x) = \frac{l^2}{6} \qquad \sigma = \frac{l}{\sqrt{6}};\ l = \sigma\sqrt{6}$$

характеристик.

Интервал значений случайной величины, внутри которого с заданной вероятностью находиться истинное значение погрешности результата измерений, называется ***доверительным интервалом*** погрешности результата измерения, а соответствующая ему вероятность – ***доверительной вероятностью Р***.

Нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала называют доверительными границами.

Из статистики известно, что если генеральная совокупность имеет нормальное распределение, то величина $t = \frac{|\bar{X} - \bar{X}_0|}{\sigma_x}$ при любом ***n*** следует закону Стьюдента.

характеристик.

С достаточной для практических целей точностью значение t_p можно определить по следующим уравнениям, полученным в результате апроксимации табличных значений для наиболее употребительных значений p=0,9; 0,95; 0,99:

$$t_{0,9;k} = 1{,}6405758736 + \frac{1{,}644822988}{k} + \frac{0{,}644822988}{k^2} + \frac{2{,}380179149}{k^3}$$

$$t_{0,95;k} = 1{,}938097113 + \frac{2{,}953233299}{k} - \frac{0{,}6521848}{k^2} + \frac{8{,}470266311}{k^3}$$

$$t_{0,99;k} = 2{,}611993239 + \frac{3{,}623001823}{k} + \frac{21{,}81293438}{k^2} - \frac{34{,}8629238}{k^3} + \frac{70{,}47492516}{k^4}$$

характеристик.

По выборке из n=20 найдено $\overline{X}$ = 19,235 и s=0,08. Определить значение ***генеральной средней*** $\overline{X_0}$.

Генеральная средняя определяется доверительным интервалом:

$$X - t_p\sigma_x < X_0 < X + t_p\sigma_x$$

Задаваясь вероятностью p, например равной 0,95, из уравнения приведенного на предыдущем слайде, определяем $\boldsymbol{t_{0,95;k}}$. Число степеней свободы *k=20-1=19*.

$$t_{0,95\,;k} = 1{,}938097113 + \frac{2{,}953233299}{19} - \frac{0{,}6521848}{19^2} + \frac{8{,}470266311}{19^3} = 2{,}0929$$

Учитывая, что $\sigma_x = \frac{s}{\sqrt{n}}$, будем иметь:

$$19{,}235 - 2{,}0929\frac{0{,}08}{\sqrt{20}} < \overline{X_0} < 19{,}235 + 2{,}0929\frac{0{,}08}{\sqrt{20}}$$

Следовательно, с вероятностью 95%, генеральная средняя будет находиться в интервале 19,198< $\overline{X_0}$ <19,272.

Вопрос №2

Критерии для исключения систематических погрешностей.

погрешностей. Способ последовательных разностей.

Переменные систематические погрешности могут быть выявлены средствами статического анализа.

Одним из таких способов является способ последовательных разностей. Для обнаружения такой погрешности определяют несмещенную оценку дисперсии ***(Dx)*** результатов измерения обычным способом по формуле:

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

и способом вычисления суммы ***(Qx)*** квадратов последовательных (в порядке последовательности измерений) разности $(x_{j+1} - x_i)^2$

$$Q(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2}{2(n-1)}$$

Отношение суммы квадратов последовательных разностей к дисперсии результатов измерения является критерием для обнаружения систематических смещения центра группирования и получило название ***критерия Аббе***.

Аббе.

Аппроксимирующие уравнения по расчету критических значений критерия Аббе.

$$A_{0,001,n} = \frac{0,5703 + n(-0,7146 + n(0,2878 - 0,031n))}{1 + n(-1,3243 + n(0,645 - 0,0885n))} (0,15\%)$$

$$A_{0,01,n} = 0,8277 + \\ + \frac{1}{n}\left(-9,018 + \frac{1}{n}\left(74,4506 + \frac{1}{n}\left(-394,8118 + \frac{1}{n}\left(1120,111 - \frac{1146?675}{n}\right)\right)\right)\right)(0,32\%)$$

$$A_{0,05,n} = -11,782 + 0,0135n + \frac{65,1879}{\ln n} - \frac{60,34 \ln n}{n} (0,63\%)$$

Если полученное значение критерия Аббе меньше ***Aq*** (при принятом уровне значимости ***q*** и числе измерений ***n***), то нулевая гипотеза о постоянстве центра группирования результатов измерений ***(x)*** отвергается, т.е. имеет место систематическая составляющая.

Формулы справедливы для $4 \le n \le 60$

Таблица критических значений критерия Аббе (Aq,n)

n	$A_{0,001,n}$	$A_{0,01,n}$	$A_{0,05,n}$
4	0,295	0,313	0,390
5	0,208	0,269	0,410
6	0,182	0,281	0,445
7	0,185	0,307	0,468
8	0,201	0,331	0,491
9	0,221	0,354	0,512
10	0,241	0,376	0,531
11	0,260	0,396	0,548
12	0,278	0,414	0,564
13	0,295	0,431	0,578
14	0,311	0,447	0,591
15	0,327	0,461	0,603
16	0,341	0,474	0,614
17	0,355	0,487	0,524
18	0,368	0,499	0,633
19	0,381	0,510	0,642
20	0,393	0,520	0,650

Пример расчета по критерию Аббе.

Для некоторой величины имеем результаты измерений, выполненных через равные промежутки времени.

№ п.п.	Результаты измерений	№ п.п.	Результаты измерений	№ п.п.	Результаты измерений	№ п.п.	Результаты измерений
1	40,15	5	40,17	9	40,18	13	40,18
2	40,16	6	40,16	10	40,17	14	40,17
3	40,15	7	40,16	11	40,17	15	40,20
4	40,16	8	40,17	12	40,19	16	40,18

Определяем значение ***D(x)*** и ***Q(x)*** по формулам приведенным выше:

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{2{,}493\text{x}10^{-4}}{16-1} = 1{,}66247 * 10^{-4}$$

$$Q(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x)^2}{2(n-1)} = \frac{2{,}3001435 * 10^{-3}}{30} = 7{,}667145 * 10^{-5}$$

Фактическое значение критерия Аббе $A = \frac{Q(x)}{D(x)} = \frac{7{,}667145 * 10^{-5}}{1{,}66247 * 10^{-4}} = 0{,}4611$

Критические значения критерия Аббе $\boldsymbol{A}_{0,01}$=0,477 и $\boldsymbol{A}_{0,05}$=0,611

Так как при принятых уровнях значимости фактическое значение критерия Аббе меньше критических, то следует вывод о наличии систематической составляющей в погрешностях измерений.

Метод Фостера - Стьюдента.

Одним из самых простых, дающих практически надежные результаты является метод, предложенный Фостером и Стьюдентом.

Суть метода сводиться к следующему:

По данным исследований ряда измерений определяют величины u_t и l_t . Их значения находят путем последовательного сравнения уровней ряда. Если какой-либо уровень превышает по своей величине каждый из предыдущих уровней, то величине u_t присваивается значение 1, а в остальных случаях – 0.:

$$u_t = \begin{cases} 1, \text{если } y_t > y_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_1 \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Наоборот, если уровень меньше предыдущих, то l_t присваивают значение 1.:

$$l_t = \begin{cases} 1, \text{если } y_t < y_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_1 \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По значениям u_t и l_t определяют вспомогательные показатели S и d:

$$S = \sum_{t=1}^{n} (u_t + l_t) \qquad d = \sum_{t=1}^{n} (u_t - l_t)$$

(продолжение).

Гипотеза о наличии тенденции проверяется с помощью критерия Стьюдента:

$$t_1 = \frac{|d|}{\sigma_2} \;;\; t_2 = \frac{|S-\mu|}{\sigma_1}$$

где: $\boldsymbol{\mu}$ – математическое ожидание величины $\boldsymbol{S}$, определенное для случайного расположения уровней;

$\boldsymbol{\sigma_1}$ – средняя квадратическая ошибка $\boldsymbol{S}$;

$\boldsymbol{\sigma_2}$ – средняя квадратическая ошибка $\boldsymbol{d}$.

Значения величины $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_1}$, можно определить по следующим формул

$$\mu = \frac{1{,}693872\ln n - 0{,}299015}{1 - 0{,}035092\ln n + 0{,}002705(\ln n)^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{0{,}991867\ln n - 0{,}552174}{1 + 0{,}155285\ln n - 0{,}002514(\ln n)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{0{,}899576\ln n + 0{,}514914}{1 + 0{,}146453\ln n - 0{,}002893(\ln n)^2}$$

(продолжение).

Критические значения критерия Стьюдента $t_{кр}$ определяются в зависимости от принятого значения доверительной вероятности P.

При $P=0,9$ $$t_{кр} = 1,6406 + \frac{1,64482}{n-1} + \frac{0,64482}{(n-1)^2} + \frac{2,3802}{(n-1)^3}$$

При $P=0,95$ $$t_{кр} = 1,9381 + \frac{2,95323}{n-1} + \frac{0,65218}{(n-1)^2} + \frac{8,47027}{(n-1)^3}$$

При $P=0,99$ $$t_{кр} = 2,612 + \frac{3,623}{n-1} + \frac{21,8129}{(n-1)^2} + \frac{34,8629}{(n-1)^3} + \frac{70,4749}{(n-1)^4}$$

Если $t_1 > t_{кр}$ при принятом уровне доверительной вероятности Р, то гипотеза об отсутствии систематической погрешности в серии отвергается.

Если $t_2 > t_{кр}$ при принятом уровне доверительной вероятности Р, то гипотеза об отсутствии систематической погрешности в дисперсии отвергается.

Стьюдента.

Имеется ряд измерений:

Номер измерения, t.	Значение	u_t	l_t
1	10,3	0	0
2	14,3	1	0
3	7,7	0	1
4	15,8	1	0
5	14,4	0	0
6	16,7	1	0
7	15,3	0	0
8	20,2	1	0
9	17,1	0	0
10	7,7	0	0
11	15,3	0	0
12	16,3	0	0
13	19,9	0	0
14	14,4	0	0
15	18,7	0	0
16	20,7	1	0
$S=\sum_{t=1}^{16}(u_t+l_t)=5+1=6$		5	1
$d=\sum_{t=1}^{16}(u_t-l_t)=5-1=4$			

$$\mu=\frac{1{,}693872\ln 16-0{,}299015}{1-0{,}035092\ln 16+0{,}002705(\ln 16)^2}=4{,}762$$

$$\sigma_1=\frac{0{,}991867\ln 16-0{,}552174}{1+0{,}155285\ln 16-0{,}002514(\ln 16)^2}=1{,}557$$

$$\sigma_2=\frac{0{,}899576\ln 16+0{,}514914}{1+0{,}146453\ln 16-0{,}002893(\ln 16)^2}=2{,}182$$

Подставляя полученные значения в формулу для определения t_1 и t_2 получим:

$$t_1=\frac{|d|}{\sigma_2}=\frac{4}{2{,}182}=1{,}833\ ;\ t_2=\frac{|S-\mu|}{\sigma_1}=\frac{6-4{,}762}{1{,}557}=0{,}795$$

Критические значения критерия Стьюдента соответственно равны: при P=0,9 $t_{кр}$=1,754, при P=0,95 $t_{кр}$=2,135 и при P=0,99 $t_{кр}$=2,492.

Так как при P=0,9 $t_1>t_{кр}$ (1,833>1,754), то гипотеза об отсутствии тенденции в серии отвергается.

При других значениях Р (0,95 и 0,99) гипотеза об отсутствии тенденции в средней должна быть принята.

Гипотеза об отсутствии тенденции в дисперсии принимается т.к. $t_2 < t_{кр}$

Вопрос №3

Формы представления результатов измерения.

Правила округления чисел.

Необходимо пользоваться основным правилом: погрешность, получаемая в результате вычислений, должна быть на порядок (в 10 раз) меньше суммарной погрешностью измерений.

Округление числа представляет собой отбрасывание значащих цифр справа до определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

При округлении результата измерений необходимо использовать следующие правила теоретической метрологии:

1. Результаты измерений округляются до того же десятичного разряда, которым окачивается округленное значение абсолютной погрешности.

Например, результат 4,0800, погрешностью ± 0,001 результат округляется до 4,080. Результат 25,6341, погрешностью ± *0,01*; результат округляется до 25,63. Тот же результат при погрешности в ± 0,015 округляется до 25,634.

2. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, а в десятичных дробях отбрасываются. Например, число 165 245 при сохранении четырех значащих цифр округляется до 165 200, а число 165,245 – до 165,2

3. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр числа меньше 5, остающиеся цифры не изменяются. Если отбрасываемая цифра числа равна 5, а следующие за ней цифры – это нули, то последняя сохраняемая цифра не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Например, число 106,4 при сохранении трех значащих цифр округляется до 106; число 534,5 округляется до 534, а число 675,5 – до 676.

(Продолжение)

4. Если отбрасываемая цифра числа равна 5, а следующие за ней цифры больше 0, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на 1.

5. Погрешность позволяет определить те цифры результата измерений, которые является достоверными. Часто исходными данными для расчета являются нормируемые значения погрешности используемого средства измерений, которые указывается всего с одной или двумя значащими цифрами. Вследствие этого и в окончательном значении рассчитанной погрешности не следует удерживать более двух значащих цифр.

6. Округляют цифры лишь в окончательном ответе, а все промежуточные результаты целесообразно представлять тем числом разрядов, которые удается получить.