Перестановки и размещения

Цель лекции: перестановки и размещения упорядоченного множества; перестановки с повторениями; взаимно-однозначное соответствие и эквивалентность; сочетания с повторениями.

Упорядоченные множества. Перестановки и размещения

- Множество называется упорядоченным. Если каждому элементу множества противопоставлено некоторое число от 1 до n. Каждый элемент множества имеет свой номер.
- Упорядоченные множества, отличающиеся только номерами своих элементов, называются перестановками.
- ПРИМЕР. Составить все перестановки множества A={a,b,c}?

Варианты перестановок множества

- Пусть задано множество A из n – элементов, а Pn – число перестановок.
- ТЕОРЕМА:

$$P_n = n!$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Будем последовательно выбирать элементы множества A и размещать их в определенном порядке на n местах. На первом месте может оказаться любой из n. На втором любой из (n-1) и т.д. По правилу умножения:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1 = \mathrm{n}!$$

Примеры

- Задача 1. Сколькими способами можно поставить 4 книги на полке.
- Задача 2. Сколькими способами можно упорядочить множество {1,2,3…2n} так, чтобы каждому четному элементу множества соответствовал четный номер.

Перестановки данного множества

- Задача 3. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом.
- ПРИМЕР. Составить все перестановки множества A={a,b,c,d}, где a и d не стоят рядом?
- Найти……..написать на доске

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 3

- Шаг 1.Определим число перестановок, в которых a и b стоят рядом.
- Шаг 2. Возможны варианты: a стоит на первом месте, a стоит на втором месте, a стоит на (n-1) месте; b стоит правее a – таких случаев (n-1).
- Шаг 3. Кроме этого, a и b можно поменять местами и следовательно существует 2(n-1) способов размещения a и b рядом.
- Шаг 4. Каждому из этих способов соответствует   (n-2)! перестановок других элементов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 3

- Шаг 5. Таким образом число перестановок в которых a и b стоят рядом равно: $2*(n-1)*(n-2)! = 2(n-1)!$

  Общее число перестановок $n!$

  Число перестановок, где a и b не стоят рядом равно:

$$n!-2(n-1)!=(n-1)!*(n-2)$$

Задача

- Задача 4. Скольками способами можно расположить 8 ладей на шахматной доске так , чтобы они не могли бить друг друга.
- Ответ: $n! = 8! = 40320$

Задача 4

- Ответ: $n! = 8! = 40320$

Упорядоченные подмножества данного множества

- Задано множество А.
- ВОПРОС: Сколько можно получить упорядоченных подмножеств данного множества?
- 1. Число всех упорядоченных k- элементных подмножеств множества А равно: C_n^k
- 2. Каждое такое подмножество можно упорядочить k! способами.
- ОТВЕТ:

$$C_n^k \cdot k!$$

Упорядоченные подмножества данного множества

- ТЕОРЕМА: Число упорядоченных k-элементных подмножеств множества из n элементов равно:

$$A_n^k = k! \times C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$$

Это называется размещением из n по k

Задача 5

- Сколько способов размещения 4 студентов на 25 местах.

Ответ задачи 5

$$A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (\mathrm{n} - \mathrm{k} + 1) =$$

$$25 * 24 * 23 * 22 = 303600$$

Задача 6

- Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течении 8 дней. Сколько существует вариантов?
- А если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день?

Ответы задачи 6

1 $$A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1650$$

2 $$4 \times A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Перестановки с повторениями

- ВОПРОС: Сколько способов разложения множества А, состоящего из n элементов, на сумму множеств m

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m \text{..... ттакчтобы}$$

$$\mathrm{N}(\mathrm{B}_1) = k_1, \mathrm{N}(\mathrm{B}_2) = k_2$$

Где к1, k2,…km - числа больше или равные 0….n

Для этого надо найти все сочетания В

Перестановки с повторениями

$$B_1 = C_n^{k_1}$$

$$B_2 = C_{n-k_1}^{k_2}$$

Согласно правила умножения количество возможных перестановок равно:

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \ldots C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} =$$
$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \ldots$$
$$\ldots \frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

ИЗ этого получается следующая теорема

ТЕОРЕМА

Теорема. *Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — целые неотрицательные числа, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Число способов, которыми можно представить*

множество A из n элементов в виде суммы m множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, число элементов которых составляет соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, равно

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!}.$$

Числа $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ называются *полиномиальными коэффициентами*. Они имеют еще одну очень важную комбинаторную интерпретацию.

А именно, сколько можно составить слов из заданного алфавита?

Полиномиальные коэффициенты

- ЗАДАЧА 7. Число слов, которые можно получить из перестановки букв слова МАТЕМАТИКА.

Ответ задачи 7

- ОТВЕТ 10!/(2!*3!*2!)=151200

Полиномиальные коэффициенты

- Задача 8. Число слов, которые можно составить из 12 букв (4 буквы а; 4 буквы б; 2 буквы в; 2 буквы г).

Ответ на задачу 8

- $12! / (4!*4!*2!*2!) = 207900$

Взаимно-однозначное соответствие

- Пусть заданы два множества **A** и **B**.
- Будем считать, что между двумя множествами установлено соответствие, если каждому элементу **a** множества **A**, соответствует элемент **b** в множестве **B**.
- Это *взаимно-однозначное соответствие*, если каждому элементу множества **A**, соответствует элемент множества **B** и наоборот.

Взаимно-однозначное соответствие?

- ПРИМЕР 1. А – множество студентов

  В – множество парт.

Каждому студенту, соответствует стол, за которым он сидит.

ОТВЕТ: 1 - это утверждение верно?.

2 – это утверждение не верно?.

Взаимно-однозначное соответствие?

- ПРИМЕР 2: А – множество жителей г. Владимира. В – множество домов в городе. Каждому жителю города соответствует дом, в котором он живет.

- ОТВЕТ: 1 - это утверждение верно.

  2 – это утверждение не верно.

Взаимно-однозначное соответствие?

- ПРИМЕР 3. Каждому элементу упорядоченного множества A из n элементов, соответствует свой номер.

Эквивалентность множеств

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

  Множества, для которых существует взаимно-однозначное соответствие называются эквивалентными.

- ТЕОРЕМА.

  Для того, чтобы два множества были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковое число элементов.

Эквивалентность множеств

Доказательство. Если множества A и B имеют одинаковое число элементов n, то, упорядочивая каждое из них некоторым образом и ставя в соответствие k-му элементу множества $\vec{A}$ k-й элемент множества $\vec{B}$, получим взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, т. е. множества A и B эквиваленты.

Допустим теперь, что A имеет n элементов и существует взаимно однозначное соответствие между A и B. Упорядочим множество A: пусть элементами A будут $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через b_k тот элемент B, который соответствует a_k. Поскольку каждому элементу из A соответствует элемент из B, различным элементам из A соответствуют различные элементы из B, и каждый элемент из B соответствует некоторому элементу из A, то B состоит из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, следовательно, B имеет n элементов.

Следствие. *Если два множества эквивалентны, то они имеют одинаковое число элементов.*

Это свойство эквивалентных множеств очень часто используют для вычисления количества элементов различных множеств.

Эквивалентность множеств

Использование следствия эквивалентности для вычисления числа Элементов множества.

Пример 3. Рассмотрим множество A последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из n чисел, где числа x_i принимают только значения 0 и 1 и среди них ровно k едииниц. Чтобы вычислить число элементов нашего множества, обратим внимание, что оно эквивалентно множеству B всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$: подмножество чисел $\{i_1, \ldots, i_k\}$ соответствует той последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, у которой $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = 1, \ldots, x_{i_k} = 1$. Следовательно, $N(A) = C_n^k$.

Сочетания с повторениями

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сочетаниями из m элементов по n элементам с повторениями называют группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из m типов.
- Дано множество A={a,b,c}, напишите согласно определения все сочетания с повторениями из 3 по 2.

Теорема вычисления сочетаний с повторениями

- Ответ: aa,ac,bc,ab,bb,cc – итого 6.
- ТЕОРЕМА. Число различных сочетаний из m элементов по n с повторениями равно:

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}$$

Задача 7

- Кости домино можно рассматривать как сочетание с повторениями по два элемента из семи цифр 0,1,2,3,4,5,6.
- Определите количество игровых костей по двум ранее указанным формулам.

Задача 8

- В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и картошка. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
- Тоже самое только положить пирожные в коробку, в которой четыре ячейки?

Бином Ньютона

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Как раскрыть скобки при вычислении выражения $(a+b)^n$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Имеет место равенство*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n, \quad (1)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$ Биноминальный коэффициент

Равенство 1 называют биномом Ньютона

Бином Ньютона

- Формулу бинома Ньютона можно свернуть до вида:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Напомним следующее важное свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \qquad (2)$$

Треугольник Паскаля

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Бесконечная таблица Биномиальных коэффициентов

Треугольник Паскаля

0:	1														
1:	1	1													
2:	1	2	1												
3:	1	3	3	1											
4:	1	4	6	4	1										
5:	1	5	10	10	5	1									
6:	1	6	15	20	15	6	1								
7:	1	7	21	35	35	21	7	1							
8:	1	8	28	56	70	56	28	8	1						
9:	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
10:	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
11:	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
12:	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
13:	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
14:	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

Закономерности треугольника Паскаля

- Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.
- В строке с номером *n*:
  - первое и последнее числа равны 1.
  - второе и предпоследнее числа равны *n*.
  - третье число равно треугольному числу , что также равно сумме номеров предшествующих строк.
  - четвёртое число является тетраэдрическим.
  - *m*-е число (при нумерации с 0) равно биномиальному коэффициенту .

Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема. *Выражение*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n.$$

равно сумме всех возможных слагаемых вида

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k},$$

где

$$(r_1 + r_2 + \ \ldots \ + r_k) = n,$$

т. е.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n =$$

$$= \sum_{\substack{r_1 \geq 0,\ \ldots,\ r_k \geqslant 0 \\ r_1 + \ \ldots \ + r_k = n}} \frac{n!}{r_1!\ \ldots\ r_k!}\, a_1^{r_1}\ \ldots\ a_k^{r_k}, \quad (3)$$

Полиномиальная теорема и бином Ньютона

При $k = 2$ равенство (3) имеет вид

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a_1^{n-r} a_2^r.$$

Это и есть бином Ньютона

Биномиальные тождества

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ \dots \ + C_n^n = 2^n,$$ A=b=1

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ \dots \ + (-1)^n C_n^n = 0.$$ A=1 b=-1

Задание: получите самостоятельно два последних тождества
Из формулы бинома Ньютона