

## Л 6 Граничные условия для электромагнитного поля.

Основная задача теории электромагнитного поля. Граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля. Уравнения Максвелла в комплексной форме.

Основной задачей теории электромагнитного поля является нахождение его векторов ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ) в определенной области пространства при заданных условиях, которые отражают предварительные сведения об электромагнитном процессе.

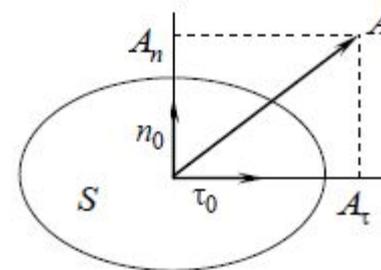
Задача имеет реальное физическое содержание, если эти сведения правильны и если они достаточны. Для определения поля внутри какой-либо области надо иметь некоторые данные о его характере на границе, например, границы между различными диэлектриками, границы между диэлектриками и проводниками, границы, на которых сосредоточены заряды или по которым протекают токи.

### Нормальные и тангенциальные составляющие векторов

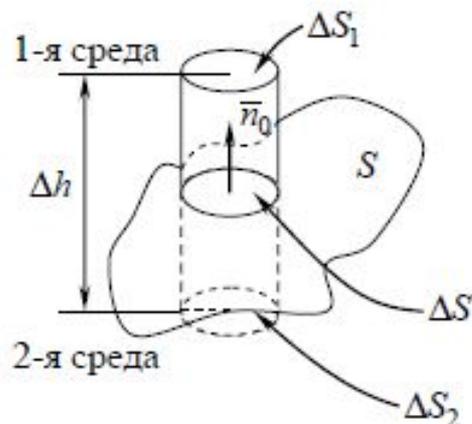
поверхность  $S$  — граница раздела двух сред,  
 $\mathbf{A}$  — произвольно ориентированный вектор,  
начало которого находится в точке на поверхности  $S$ ,  
 $\mathbf{n}_0$  — нормаль к поверхности,  
 $\boldsymbol{\tau}_0$  — касательный к поверхности  $S$  единичный вектор  
Векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{n}_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0$  лежат в одной плоскости.

$$\mathbf{A} = n_0 A_n + \boldsymbol{\tau}_0 A_\tau$$

Любой вектор вблизи граничной поверхности может быть представлен в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих.



## Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля



уравнение Максвелла  $\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q$ ,

где  $S$  — вся поверхность цилиндра.

$$\oint_{S_{\text{бок}}} \bar{D} d\bar{S} + \oint_{\Delta S_1} \bar{D}_1 d\bar{S} + \oint_{\Delta S_2} \bar{D}_2 d\bar{S} = \oint_V \rho dV.$$

$$\Delta h \rightarrow 0 \quad \oint_{S_{\text{бок}}} \bar{D} d\bar{S} \rightarrow 0 \quad \bar{D}_1 \bar{n}_0 \Delta S - \bar{D}_2 \bar{n}_0 \Delta S = q$$

$q$  — заряд, сосредоточенный на поверхности  $\Delta S$

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad q = \sigma \Delta S. \quad \bar{D}_1 \bar{n}_0 - \bar{D}_2 \bar{n}_0 = \sigma$$

В векторной форме  $\sigma = \bar{n}_0 (\bar{D}_1 - \bar{D}_2)$ .

Таким образом, нормальная составляющая вектора  $\bar{D}$  на границе раздела двух сред терпит разрыв, равный поверхностной плотности заряда.

1. Граница двух идеальных диэлектриков.

$$\sigma = 0 \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

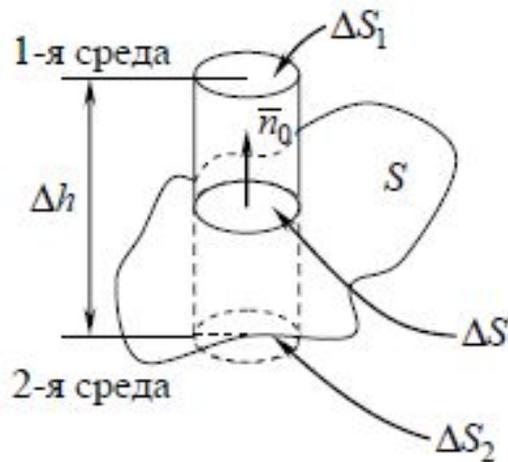
2. Граница «идеальный диэлектрик – идеальный проводник».

Поле в идеальном проводнике  $D_{2n} = 0$

$$D_{1n} = \sigma \text{ или } \sigma = (\bar{n}_0, \bar{D}).$$

Таким образом, для отыскания поверхностной плотности заряда достаточно определить нормальную компоненту вектора электрического смещения на границе с проводником.

## Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля



уравнение Максвелла  $\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0$ .

$$\oint_{S_{\text{бок}}} \bar{B} d\bar{S} + \oint_{\Delta S_1} \bar{B}_1 d\bar{S} + \oint_{\Delta S_2} \bar{B}_2 d\bar{S} = 0$$

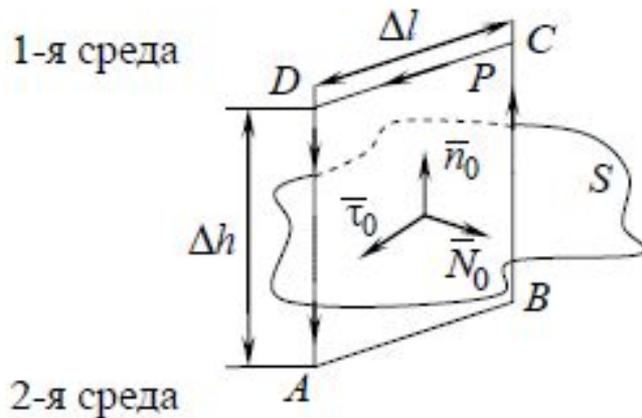
$$\Delta h \rightarrow 0 \quad \oint_{S_{\text{бок}}} \bar{B} d\bar{S} \rightarrow 0 \quad \bar{B}_1 \bar{n}_0 \Delta S - \bar{B}_2 \bar{n}_0 \Delta S = 0$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad B_{1n} = \mu_1 H_{1n} \quad B_{2n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$\mu_1$  и  $\mu_2$  — абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно.

## Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля



уравнение Максвелла:  $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$

$$I = \int_{AB} \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_{BC} \vec{H} d\vec{l} + \int_{CD} \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_{DA} \vec{H} d\vec{l}.$$

размеры контура очень малы и в его пределах поле однородно

$$I = \vec{H}_2(-\vec{\tau}_0)\Delta l + \vec{H}\vec{n}_0\Delta h + \vec{H}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{H}\vec{n}_0\Delta h.$$

Устремим  $\Delta h \rightarrow 0$   $I = \vec{H}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{H}_2\vec{\tau}_0\Delta l.$

Поверхностным током будем называть приведенный в движение поверхностный заряд. Плотность поверхностного тока определяется формулой

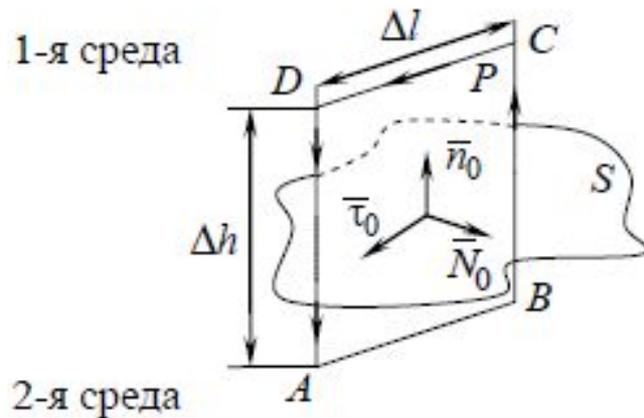
$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}, \quad \text{где } \vec{\eta}_0 \text{ — орт, показывающий направление тока;}$$

$\Delta I$  — часть тока, пересекающая отрезок  $\Delta l$ .

$$\vec{H}_1\vec{\tau}_0 - \vec{H}_2\vec{\tau}_0 = \eta_N \text{ или } H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta_N,$$

При наличии поверхностного тока на границе раздела тангенциальная составляющая напряженности вектора магнитного поля терпит разрыв, равный его плотности.

## Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля



уравнение Максвелла  $\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int \bar{B} d\bar{S}.$

аналогичные рассуждения  
приводят к соотношению

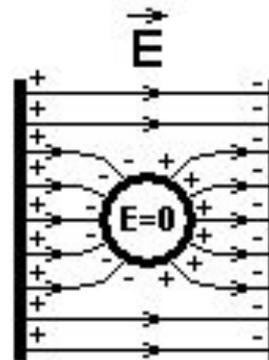
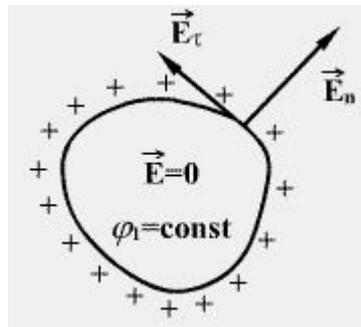
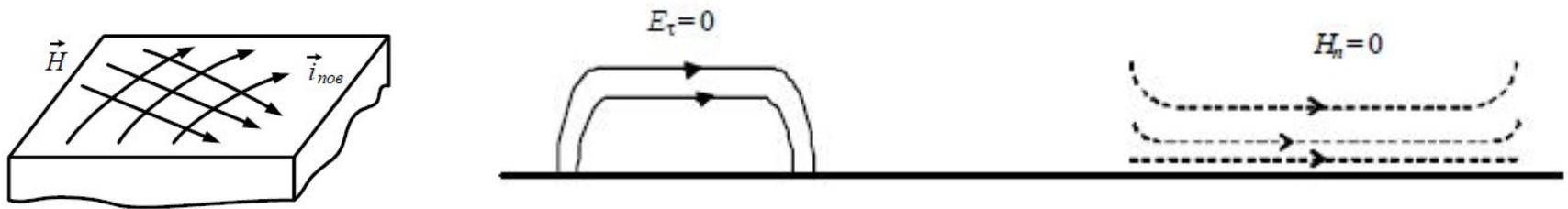
$$\bar{E}_1 \bar{\tau}_0 \Delta l - \bar{E}_2 \bar{\tau}_0 \Delta l = -\frac{d}{dt} (B \Delta h \Delta l).$$

Устремив высоту контура к нулю, получим

$$\text{Устремим } \Delta h \rightarrow 0 \quad E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

тангенциальная составляющая вектора  $\bar{E}$   
непрерывна на границе с любой средой.

1. Граница двух идеальных диэлектриков. В этом случае нет свободных зарядов, т.е.  $\sigma = 0$ , следовательно,  $D1n = D2n$ .
2. Граница «идеальный диэлектрик – идеальный проводник». Поле в идеальном проводнике равно нулю, значит,  $D2n = 0$  и  $D1n = \sigma$ .  $E2t = 0$ , то  $E1t = 0$ . Значит, линии вектора  $E$  и  $D$  всегда перпендикулярны поверхности идеального проводника. Таким образом, для отыскания поверхностной плотности заряда достаточно определить нормальную компоненту вектора электрического смещения на границе с проводником.  $H2t = 0$ , тогда  $H1t = \eta N$  на границе с идеальным проводником при наличии магнитного поля всегда возникает поверхностный ток.



Электростатическая защита.

Электростатическое поле не проникает внутрь проводника

## SUMMARY

If medium 2 is perfect conductor

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{H}}_{t1}} \\ \hline \xrightarrow{\bar{\mathbf{H}}_{t2}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon_1, \mu_1 \\ \epsilon_2, \mu_2 \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{t1} = \bar{\mathbf{H}}_{t2}$$

$$\hat{n} \times \bar{\mathbf{H}}_{t1} = \bar{\mathbf{J}}_s$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{t2} = 0$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\mathbf{E}}_{t1}} \\ \hline \xrightarrow{\bar{\mathbf{E}}_{t2}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon_1, \mu_1 \\ \epsilon_2, \mu_2 \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{t1} = \bar{\mathbf{E}}_{t2}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{t1} = 0$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{t2} = 0$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \bar{\mathbf{H}}_{n1} \\ \hline \downarrow \bar{\mathbf{H}}_{n2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon_1, \mu_1 \\ \epsilon_2, \mu_2 \end{array}$$

$$\mu_1 \bar{\mathbf{H}}_{n1} = \mu_2 \bar{\mathbf{H}}_{n2}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{n1} = 0$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{n2} = 0$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \bar{\mathbf{E}}_{n1} \\ \hline \downarrow \bar{\mathbf{E}}_{n2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon_1, \mu_1 \\ \epsilon_2, \mu_2 \end{array}$$

$$\epsilon_1 \bar{\mathbf{E}}_{n1} = \epsilon_2 \bar{\mathbf{E}}_{n2} + \rho_s$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{n1} = \rho_s / \epsilon_1$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{n2} = 0$$

# Монохроматическое поле, метод комплексных амплитуд

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad \bar{A} = \bar{A}_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega$  — круговая частота гармонических колебаний;  $\varphi$  — фаза.

$$\dot{\psi} = \psi_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \psi_m (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)),$$

$$\dot{\bar{A}} = \bar{A}_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \bar{A}_m (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)).$$

$$\psi = \operatorname{Re} \dot{\psi} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \operatorname{Re} \dot{\bar{A}}.$$

$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\bar{A}} = j\omega \dot{\bar{A}}$ ,  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_m e^{j\omega t}$  и  $\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{A}}_m e^{j\omega t}$ , где  $\dot{\psi}_m = \psi_m e^{j\varphi}$  и  $\dot{\bar{A}}_m = \bar{A}_m e^{j\varphi}$  — комплексные амплитуды.

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t},$$

где  $\left. \begin{array}{l} \dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m e^{-jkz}, \\ \dot{\vec{H}}_m = \vec{H}_m e^{-jkz} \end{array} \right\}$  — комплексные амплитуды векторов поля.

Теперь можем записать:

$$\operatorname{rot} \bar{\vec{H}} = \sigma \bar{\vec{E}} + \varepsilon \frac{d\bar{\vec{E}}}{dt} \Rightarrow \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \sigma \dot{\vec{E}} + j\omega \varepsilon \dot{\vec{E}};$$

$$\operatorname{rot} \bar{\vec{E}} = -\mu \frac{d\bar{\vec{H}}}{dt} \Rightarrow \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\mu\omega \dot{\vec{H}}.$$

$$\operatorname{rot} \ddot{H}_m = j\omega \left( \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \ddot{E}_m;$$

$$\operatorname{rot} \ddot{E}_m = -j\omega \mu \ddot{H}_m.$$

$\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \hat{\varepsilon}$  — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Обозначим  $\varepsilon' = \varepsilon$ ,  $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$ , тогда  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ .

$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg} \Delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь.

$$\operatorname{rot} \ddot{H}_m = j\omega \left( \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \ddot{E}_m;$$

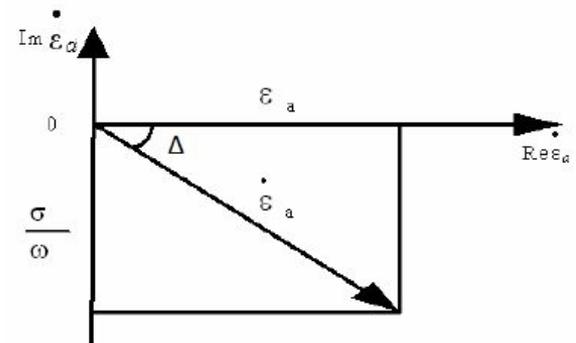
$$\operatorname{rot} \ddot{E}_m = -j\omega \mu \ddot{H}_m.$$

$\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \hat{\varepsilon}$  — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Обозначим  $\varepsilon' = \varepsilon$ ,  $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$ , тогда  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ .

$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg} \Delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь.

$\mu = \mu' - j\mu''$ ,  $\frac{\mu''}{\mu'} = \operatorname{tg} \Delta_m$  — потери на перемангничивание.



Уравнения Максвелла  
для комплексных векторов —

$$\operatorname{rot} \ddot{H} = j\omega \hat{\varepsilon} \ddot{E},$$

$$\operatorname{rot} \ddot{E} = -j\omega \mu \ddot{H};$$

для комплексных амплитуд —

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = j\omega \hat{\varepsilon} \dot{E}_m,$$

$$\operatorname{rot} \dot{E}_m = -j\omega \mu \dot{H}_m.$$

$$\operatorname{div} \ddot{E} = 0;$$

$$\operatorname{div} \ddot{H} = 0.$$

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \dot{j} = -j\omega \rho; \quad \dot{\rho} = -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \dot{j};$$

$$\dot{j} = \sigma \dot{E};$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\sigma}{j\omega} \operatorname{div} \dot{E}; \quad \operatorname{div} \dot{D} = \dot{\rho};$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \dot{E} + \frac{\sigma}{j\omega} \operatorname{div} \dot{E} = 0; \quad \left( \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right) \operatorname{div} \dot{E} = 0.$$

Так как выражение в скобках не может равняться нулю,  $\operatorname{div} \dot{E} = 0$ .

