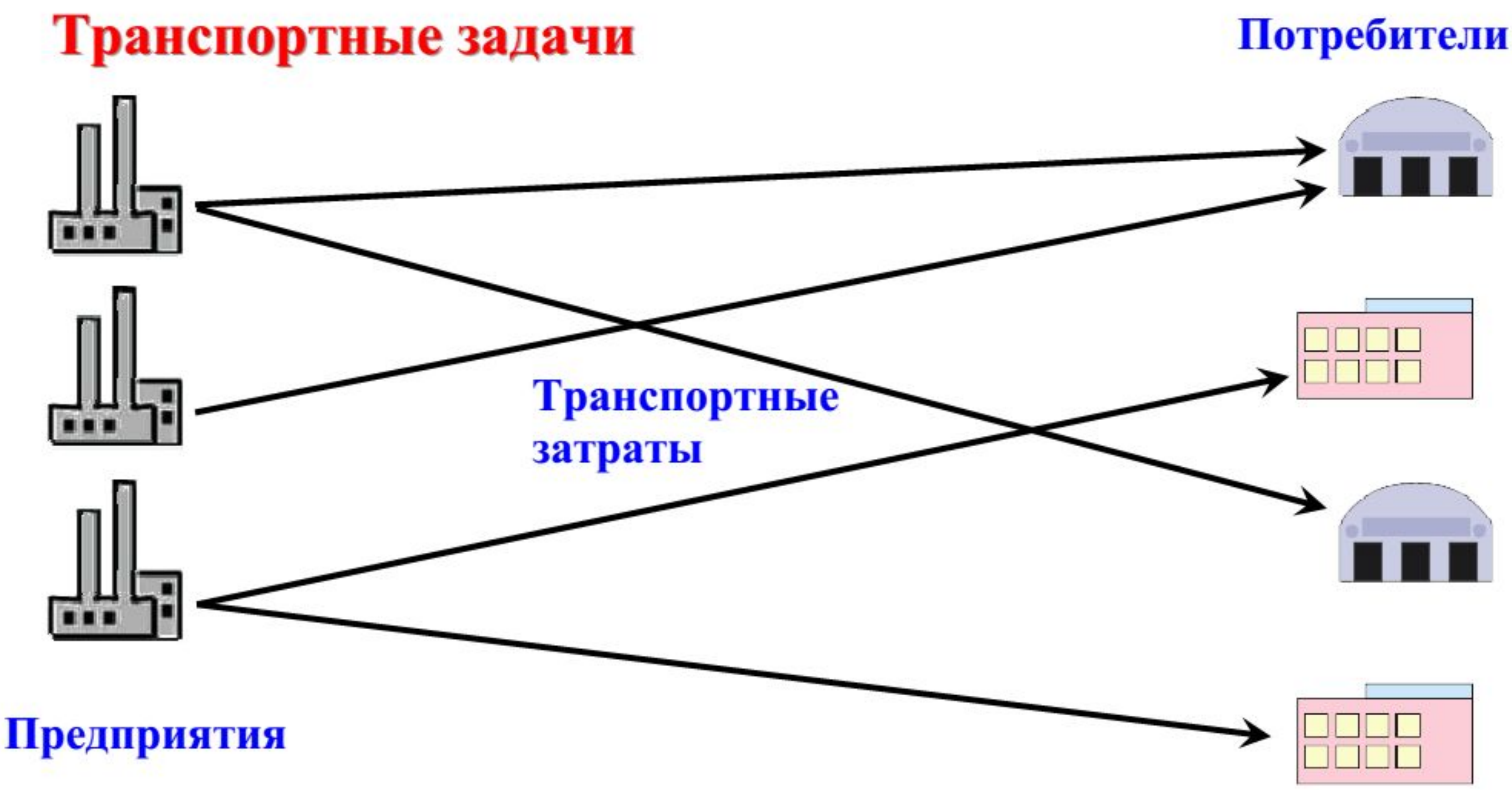
Лекция 2

Прикладные задачи, приводящие к задаче линейного программирования

Типовые задачи

1. Транспортные задачи
2. Задачи маршрутизации
3. Задачи теории расписаний
4. Задачи размещения
5. Задачи раскроя и упаковки
6. Матричные игры

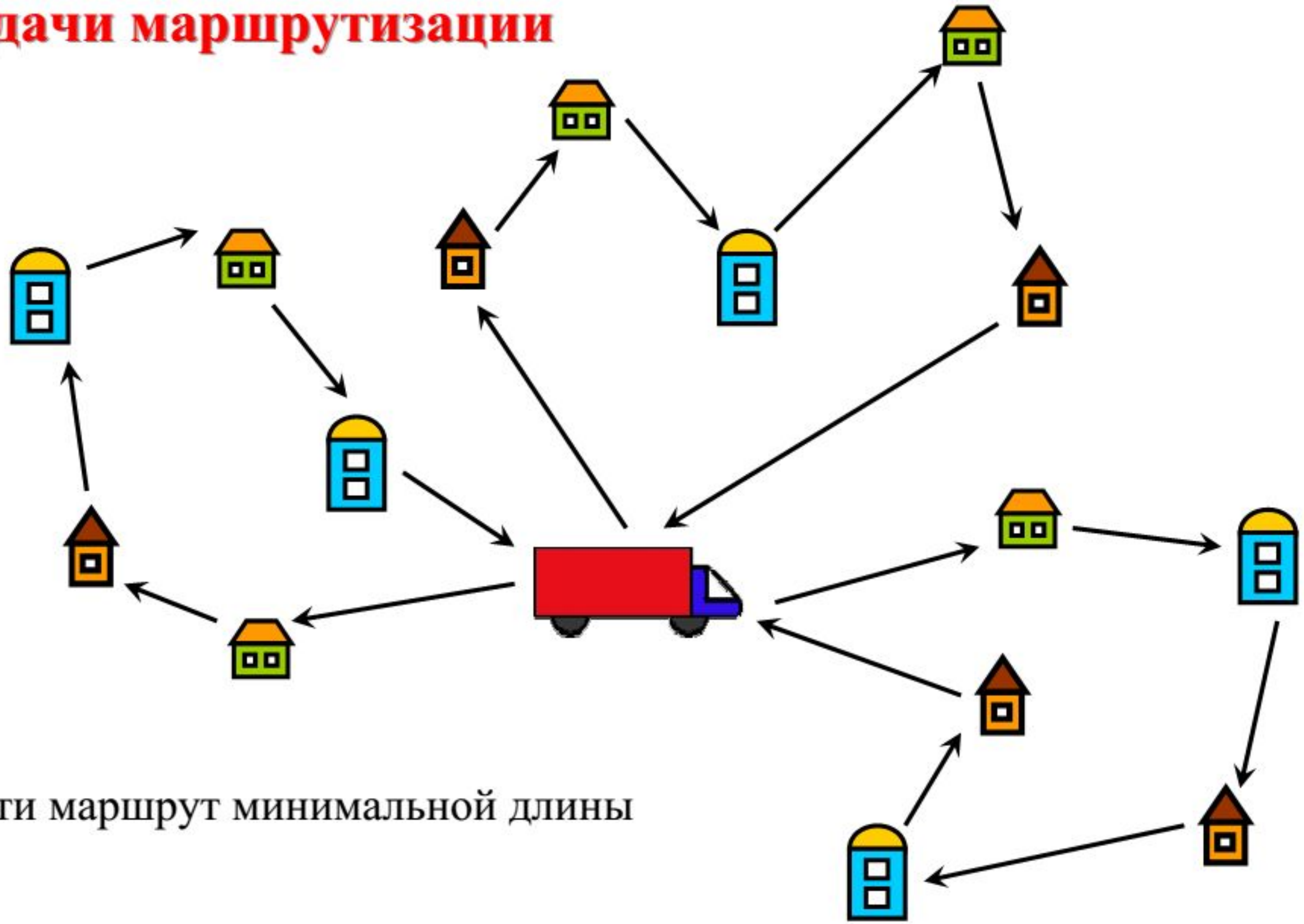
Типовые задачи



Минимизировать затраты на перевозку продукции

Типовые задачи

Задачи маршрутизации



Найти маршрут минимальной длины

Типовые задачи

Задачи теории расписаний

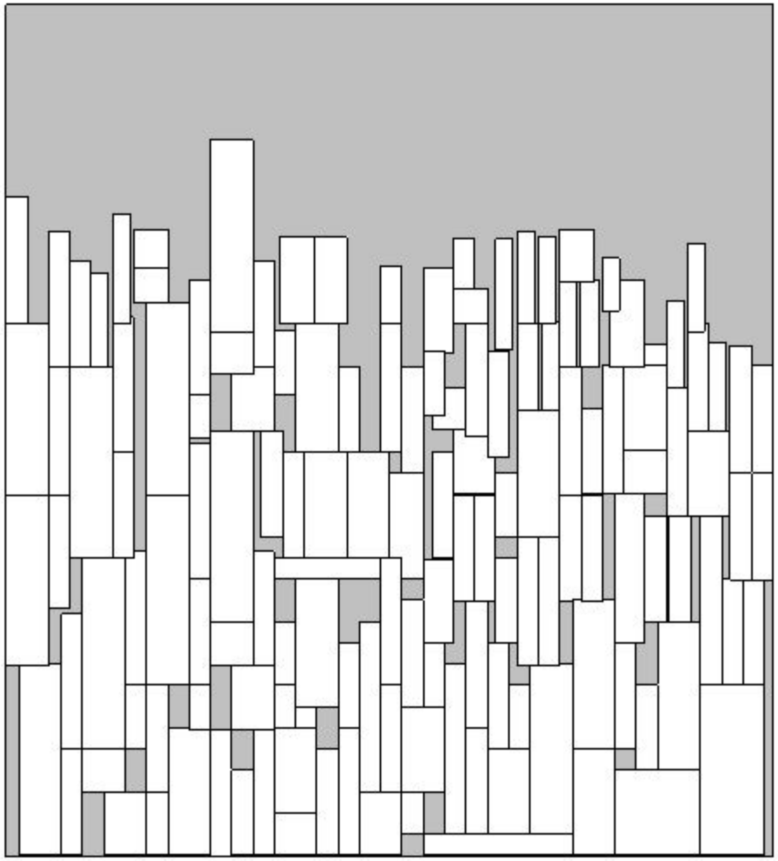
Графики движения поездов, рабочие бригады, ремонт составов

Типовые задачи

Задачи размещения

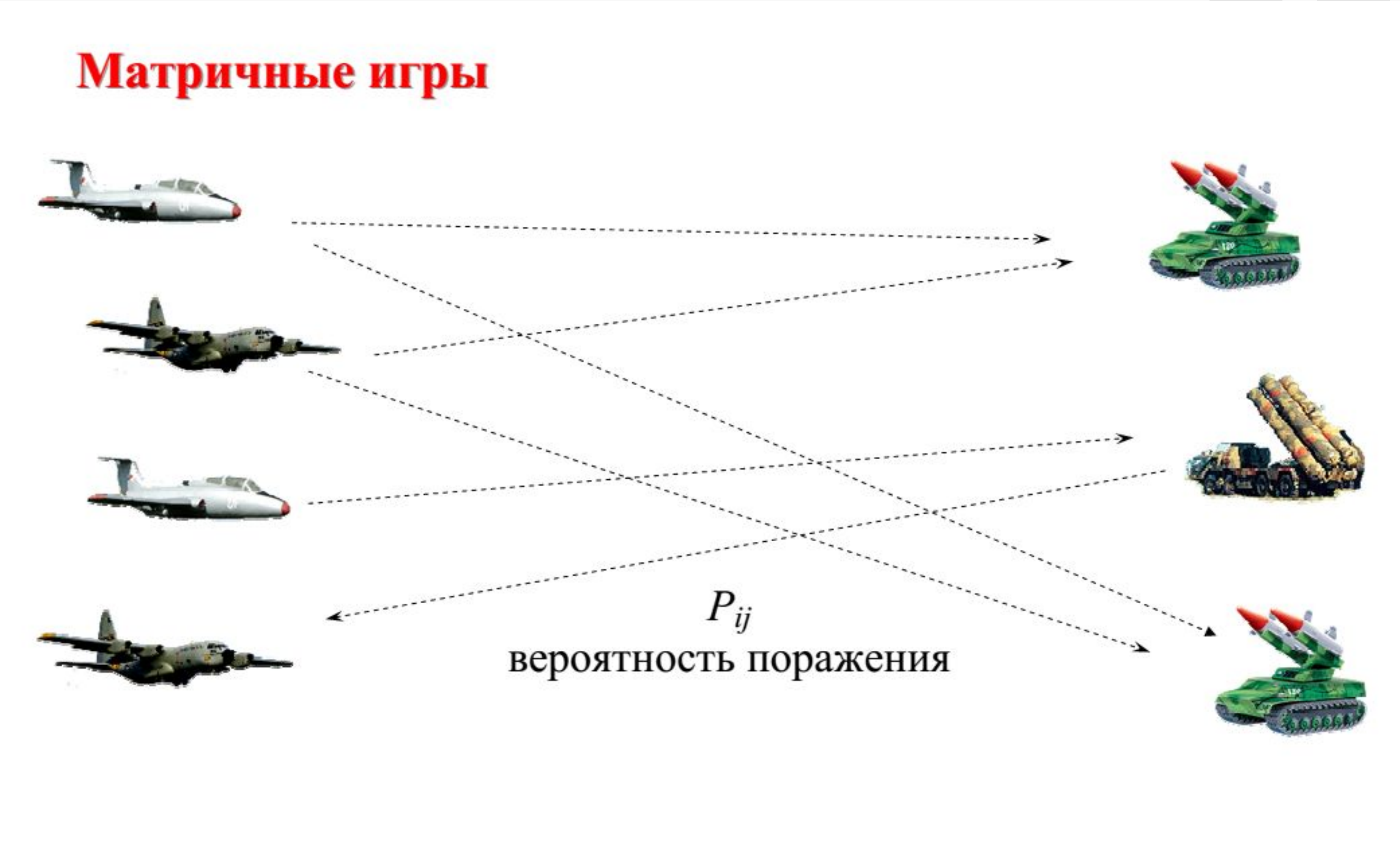
Системы сотовой связи, филиалы банков, пожарные бригады, скорая помощь

Типовые задачи



Раскрой пиломатериала, листового железа, станки с ЧПУ

Типовые задачи



Задача об оптимальном использовании ресурсов

n – количество видов выпускаемой продукции

m – количество необходимых для производства ресурсов

a_{ij} – технологические коэффициенты, т.е. количество единиц i -го ресурса, необходимого для производства единицы j -го вида продукции

b_i – полные объемы имеющихся ресурсов

c_j – прибыль, получаемая при реализации единицы j-го вида продукта.

$x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ – план выпуска продукции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n})$$

Задача о смесях

m – число необходимых питательных веществ

n – число продуктов питания

a_{ij} – количество единиц *i*-го питательного вещества, содержащееся в единице *j*-го вида продукта питания

b_i – норма потребления *i*-го питательного вещества

c_j – цена j-го продукта питания

x_j – количество единиц *j*-го продукта, используемого в рационе, подлежащее определению

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Задача о назначениях

n – число видов работ

n – число специалистов, выполняющих все виды работ

c_{ij} – эффективность выполнения i-ым специалистом j-ой работы

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, \ i-\text{ый}\ \text{человек выполняет}\ j-\text{ую}\ \text{работу} \\ 0, \ i-\text{ый}\ \text{человек не выполняет}\ j-\text{ую}\ \text{работу} \end{cases}$$

$$\sum \sum c_{i,j} x_{i,j} \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1 \ (i = \overline{1,n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1 \ (j = \overline{1,n})$$

Транспортная задача

m – число пунктов отправления (A_i – пункт отправления)

n – число пунктов назначения (B_j – пункт назначения)

$a_i (i = \overline{1,m})$ – объем продукта в пункте отправления

$b_j (j = \overline{1,n})$ – потребность в пункте назначения

c_{ij} – затраты на перевозку единицы продукта из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = (\leq\geq) \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (*)$$

Если выполняется условие (*), то перед нами транспортная задача *закрытого типа*. В противном случае это – задача *открытого типа*.

Составить такой план перевозок, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

	B_1	B_2	…	Bn
A_1	X_{11}, C_{11}	X_{12}, C_{12}	…	X_{1n}, C_{1n}
A_2	X_{21}, C_{21}	X_{22}, C_{22}	…	X_{2n}, C_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	X_{m1}, C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…	X_{mn}, C_{mn}

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, (i = \overline{1,m}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, (j = \overline{1,n}) \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Задача линейного программирования

- целевая функция;
- система ограничений;
- ограничения на знак переменных

ЗЛП – это задача следующего вида:

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \rightarrow \max(\min) \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (\leq, \geq, =) \; b_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,l}) \quad l \leq n \qquad (3)$$

Уравнение (1) – это целевая функция, а (2) и (3) – это система ограничений.

Задача линейного программирования

Вектор $X=(x_1,\ldots,x_n)$ называется допустимым планом ЗЛП, если он удовлетворяет ограничениям (2) и (3).

Вектор $X^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ называется оптимальным планом ЗЛП, если он является допустимым и обеспечивает минимум или максимум целевой функции.

Множество всех допустимых планов ЗЛП образует область допустимых значений (ОДЗ).

Каноническая форма записи ЗЛП

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

В системе ограничений стоят знаки только равенства.

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

$$b_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (4)$$

В системе ограничений присутствует выделенный исходный базис.

Фирма «Фасад»

Фирма «Фасад» производит двери для продажи местным строительным компаниям. Репутация фирмы позволяет ей продавать всю производимую продукцию. На фирме работает 10 рабочих в одну смену (8 рабочих часов), 5 дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами: собственно производством и конечной обработкой дверей. Из 400 рабочих часов в неделю 250 отведены под собственно производство и 150 под конечную обработку. «Фасад» производит 3 типа дверей: стандартные, полированные и резные. В таблице приведены временные затраты и прибыль от продажи одной двери каждого типа.

	Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль
Стандартные	30	15	$ 45
Полированные	30	30	$ 90
Резные	60	30	$120

a. Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?
b. Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами (производство и конечная обработка)? Как изменится прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

Фирма «Фасад»

	A	B	C	D	E	F
1	**Фирма «Фасад»**					
2		Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль, $	Переменные	
3	Стандартные	30	15	45	**0**	X1
4	Полированные	30	30	90	**100**	X2
5	Резные	60	30	120	**200**	X3
6					Целевая функция	
7		15000	9000		**33000**	
8	Ограничения	15000	9000			

Фирма «Фасад»

	A	B	C	D	E	F
1	Фирма «Фасад»					
2		Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль, $	Переменные	
3	Стандартные	30	15	45	0	X1
4	Полированные	30	30	90	400	X2
5	Резные	60	30	120	0	X3
6					Целевая функция	
7		12000	12000	24000	36000	
8	Ограничения	15000	9000	24000		

Фирма «Фасад»

Фирма «Фасад»							
	Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль, $	Переменные		Всего	Заказ
Стандартные	30	15	45	0	X1	1900	280
Полированные	30	30	90	0	X2	120	120
Резные	60	30	120	100	X3	100	100
Стандартные П		6	15	1900	X4		
Полированные П		30	50	120	X5		
	Полное время			Целевая функция			
	6 000	18 000	24 000	**46 500**			
Ограничения			24 000				