

ЛЕКЦИЯ № 3

I. Динамика системы материальных точек

1. Система материальных точек. Центр масс (инерции). Аддитивность массы в нерелятивистской механике.
2. Полный импульс системы материальных точек.
3. Закон сохранения импульса. Внутренние и внешние силы.
4. Теорема о движении центра масс. Система центра масс.

II. Работа и энергия

5. Механическая работа. Мощность.
6. Кинетическая энергия частицы и системы частиц.
7. Консервативные, неконсервативные и гироскопические силы.

Система материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек с заданными массами m_i , где $i = 1, 2, \dots, n$ - номер частицы. Состояние системы материальных точек задаётся путём определения состояния всех материальных точек, входящих в данную систему:

$$\{\vec{r}_i(t), \vec{V}_i(t)\}$$

Центром масс (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка **C**, которая характеризует движение системы этих точек как некоего целого, и положение которой характеризуется распределением массы этой системы.

Ее **радиус-вектор** равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

Центр масс (инерции)

Воображаемую точку **C** с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

где i - номер точки,

n - количество точек,

m_i - масса i -ой точки и

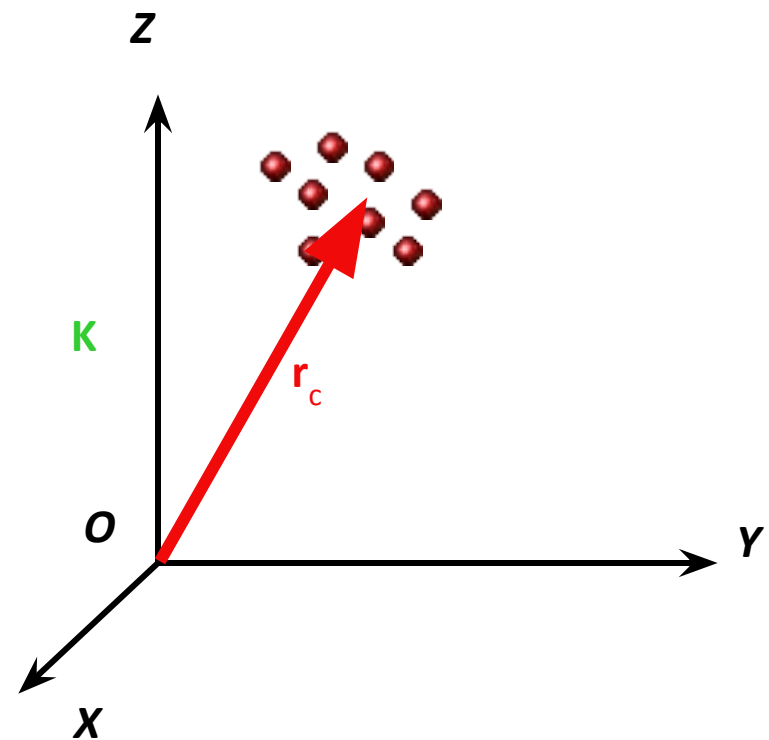
m - масса всей системы

точек

называют **центром масс**

системы материальных

точек



АДДИТИВНОСТЬ МАССЫ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ.

Полная масса системы материальных точек:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

в области малых скоростей $v \ll c$ находится путём сложения масс всех частиц систем (здесь используется **аддитивность массы в нерелятивистской механике). В релятивистской механике ($v \sim c$) масса системы частиц зависит от энергии взаимодействия между частицами, поэтому последняя формула не справедлива.**

Скорость центра масс системы материальных точек

Взяв производную $\overset{\Delta}{r}_c$ по времени, получим
скорость центра масс:

$$\overset{\Delta}{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overset{\Delta}{r}_i$$

$$\overset{\Delta}{v}_c = \frac{d\overset{\Delta}{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overset{\Delta}{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overset{\Delta}{v}_i$$

где $\frac{d\overset{\Delta}{r}_i}{dt} = \overset{\Delta}{v}_i$ - скорость i -ой материальной
точки системы

Отметим, что из формулы в красной рамке
следует $\sum_{i=1}^n m_i \overset{\Delta}{v}_i = m \overset{\Delta}{v}_c$

Полный импульс системы материальных точек (частиц)

В нерелятивистской механике **полный импульс системы материальных точек** равен сумме импульсов всех частиц системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

где $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ — импульс i -ой частицы.

Так как $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$, где $m = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса системы, $\vec{v}_c$ — скорость ц.м.

то импульс системы частиц можно определить по формуле:

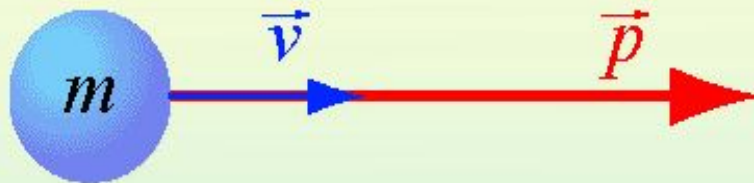
$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

$$\vec{p}_c = m\vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad - \text{ импульс центра масс}$$

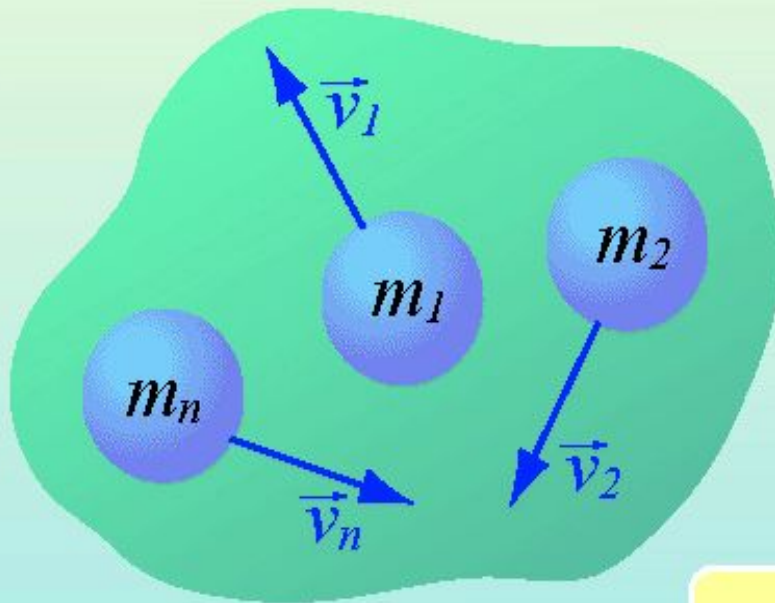
Импульс системы материальных точек (импульс центра масс) равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Таким образом, связь импульса $\vec{p}_c$ со скоростью $\vec{v}_c$ такая же, как для материальной точки с массой m (масса системы).

Импульс тела – мера механического движения



$$\vec{p} = m\vec{v}$$



$$\vec{p}_{\text{сум}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_{\text{сум}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n$$

Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы частиц

*Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют **внешними телами**, а силы, действующие на систему со стороны этих тел – **внешними силами**. Силы взаимодействия между телами внутри системы, называют **внутренними силами**.*

Результирующая всех внутренних сил действующих на i -ое тело:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр.}} = \sum_{k \neq i}^n \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in},$$

где $k \neq i$, т.к. i -ая точка не может действовать сама на себя.

Обозначим $\boxed{F}_i^{внеш.}$ – результирующая всех **внешних сил** приложенных к i -ой точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \boxed{v}_1) = \boxed{F}_1^{внеш.} + \boxed{F}_{12} + \boxed{F}_{13} + \dots + \boxed{F}_{1n},$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 \boxed{v}_2) = \boxed{F}_2^{внеш.} + \boxed{F}_{21} + \boxed{F}_{23} + \dots + \boxed{F}_{2n},$$

.....,

$$\frac{d}{dt}(m_n \boxed{v}_n) = \boxed{F}_n^{внеш.} + \boxed{F}_{n1} + \dots + \boxed{F}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}} + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + \dots + (\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}).$$

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда получаем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}}$$

Вектор $\vec{F}^{\text{внеш.}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}}$ — суммарный (резльтирующий) вектор всех внешних сил, тогда:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш.}}$$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$
 Скорость изменения импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на эту систему.

Это уравнение называют основным уравнением динамики поступательного движения системы тел. Так как импульс

системы $\vec{p} = m\vec{v}_c$ то:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}$$

Наконец, можно записать основное уравнение динамики поступательного движения системы тел в виде:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

где $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме внешних сил, приложенных к системе:

$$m \ddot{a}_c = \ddot{F}$$

Это утверждение представляет собой теорему о движении центра масс.

Закон сохранения импульса

Механическая система называется **замкнутой** (или изолированной), если на неё не действуют внешние силы, т.е. она не взаимодействует с внешними телами или $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш.}} = 0$.

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, т.к. подвержена, как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например – Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0$$

отсюда
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c = \text{const.}$$

Это есть закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.

Так как импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции:

$\vec{p} = m \vec{v}_c$ то :

$$m \vec{v}_c = \text{const}$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых (изолированных) системах, скорость центра масс сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц и для релятивистских скоростей, когда $U \approx c$.

Система центра масс

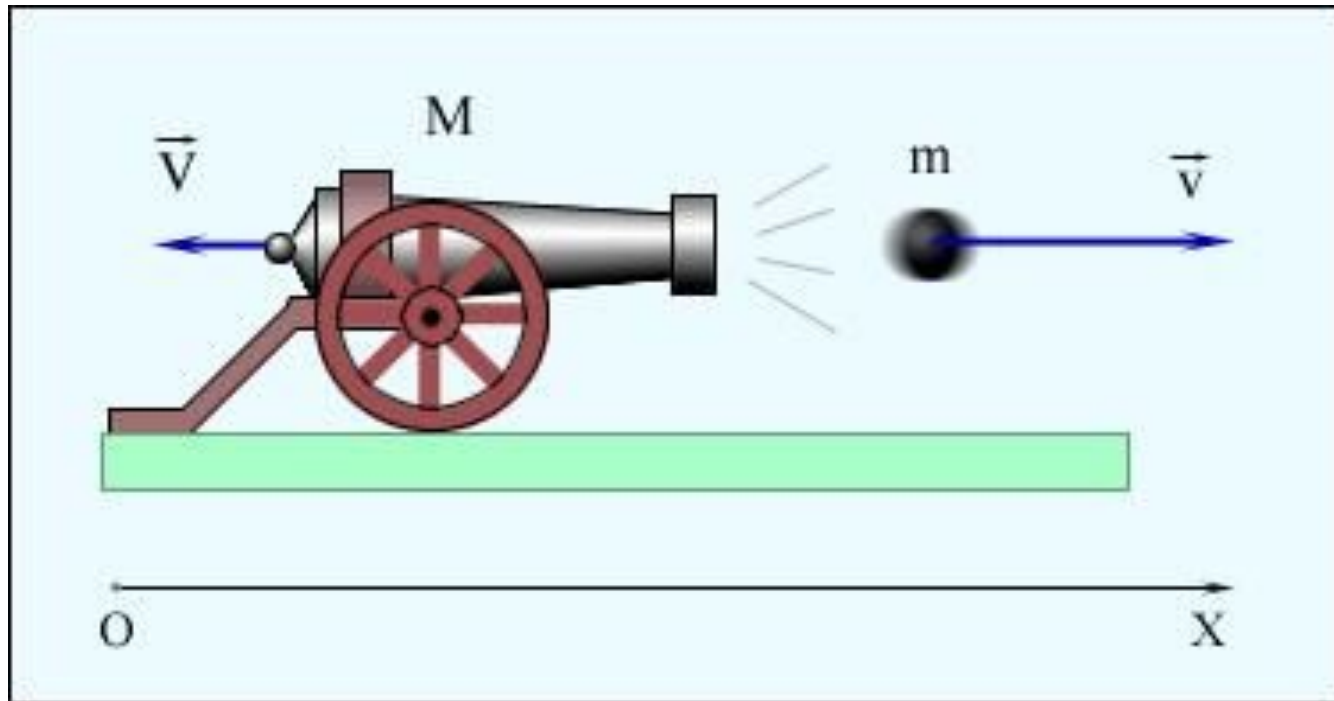
*Система отсчёта, движущаяся со скоростью центра масс, называется **системой центра масс(с.ц.м)**. В этой системе отсчёта начало системы координат помещается в центр масс, поэтому $\vec{r}_c = 0$,*

следовательно,

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = 0$$

Это означает, что полный импульс системы частиц равен нулю, и наблюдается только относительное движение частиц, поэтому она удобна для анализа столкновения частиц.

При стрельбе из орудия возникает **отдача** – снаряд движется вперед, а орудие – откатывается назад. Снаряд и орудие – два взаимодействующих тела. Скорость, которую приобретает орудие при отдаче, зависит только от скорости снаряда и отношения масс.



$$MV + mv = MV_0 + mv_0 = 0 \quad \text{т.к.} \quad V_0 = v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{MV}{m}$$

Механическая работа. Мощность.

Изменение механического движения тела вызывается силами, которые действуют на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергии между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы.

*Если тело движется **прямолинейно** и на него действует постоянная сила $\vec{F}$, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы F_s ($F_s = F \cos \alpha$) на перемещение точки приложения силы*

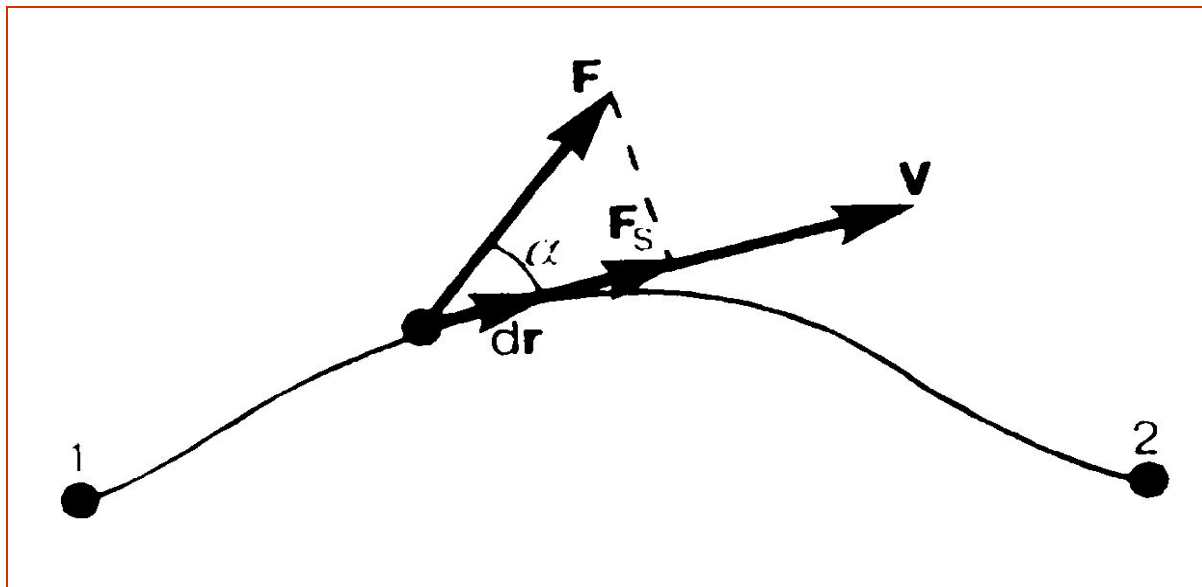
$$A = F_s s = F s \cos \alpha$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению.

Если рассматривать элементарное перемещение $\vec{dr}$, то силу $\vec{F}$ можно считать постоянной, а движение точки – прямолинейным.

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{dr}$ равна скалярному произведению:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{dr} = F \cos \alpha \cdot ds = F_s \cdot ds$$



где

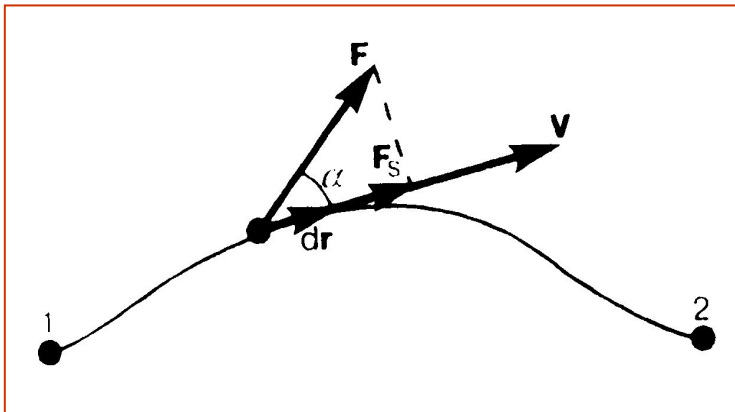
α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{dr}$

$ds = |\vec{dr}|$ - элементарный путь

F_s - проекция вектора силы на перемещение

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути.

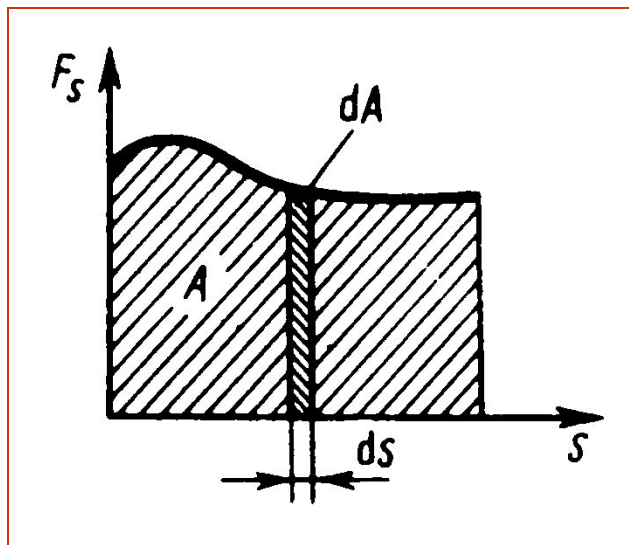
Эта сумма равна определенному интегралу:



$$A = \int_1^2 F \cos \alpha ds = \int_1^2 F_s ds$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_s от пути S вдоль траектории 1-2.

Если такая зависимость представлена графически, тогда искомая работа численно равна площади фигуры между осью S и кривой $F_s(S)$.



Если, например, *тело движется прямолинейно*, сила

$$F = \text{const} \quad \text{и} \quad \alpha = \text{const} ,$$

то интеграл легко определяется:

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = Fs \cos \alpha$$

где S - пройденный путь.

Как следует из определения работы при:

1) $\alpha < \frac{\pi}{2}$ *работа силы положительна.*

2) $\alpha > \frac{\pi}{2}$ *работа силы отрицательна.*

3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *работа силы равна нулю, так как вектор силы перпендикулярен вектору перемещения.*

*· Единица работы – **джоуль [Дж]***

$$1\text{Дж} = 1\text{Н}\cdot\text{м}$$

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности**

$$N = \frac{dA}{dt}$$

За время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$, и мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени:

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

то есть равна скалярному произведению силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

Мощность N - величина скалярная.

Единица мощности – ватт [Вт] $1\text{Вт} = 1\text{Дж/с}$

Математическая справка

Нахождение определенного интеграла:

$$F = \int_0^a kx^n dx = \left| k \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^a = k \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} - 0 \right)$$

где $k = \text{const}$

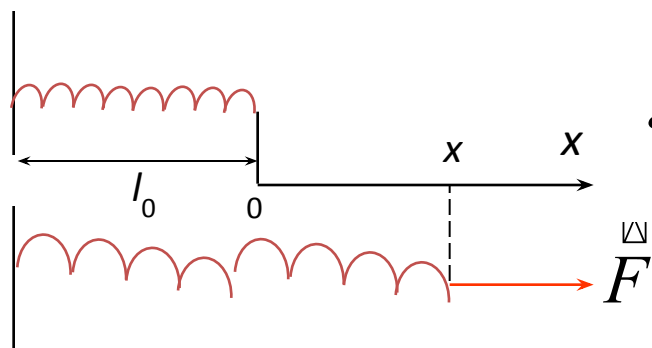
x^n - степенная функция с показателем степени n

0 и a – пределы интегрирования

Примеры вычисления работы

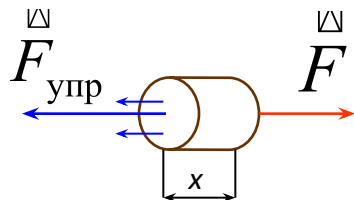
Пример. Рассмотрим в качестве примера работу, совершаемую при деформации пружины.

В случае упругой деформации пружины $F = k \cdot x$



где F – приложенная сила,
 x – деформация пружины

Сила упругости пропорциональна деформации:



$$F_{\text{упр}} = -F = -kx.$$

где F_x - проекция силы упругости на ось X ;
 k - коэффициент упругости (для пружины – жесткость), а знак минус указывает, что сила направлена в сторону, противоположную деформации.

Элементарная работа dA , совершаемая силой при бесконечно малой деформации dx , равна:

$$dA = F_x dx = kx dx$$

Полная работа силы F_x равна:

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

Кинетическая энергия частицы.

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы.

Имеем покоящееся тело. На него действует сила $\vec{F}$, под действием которой тело начинает двигаться.

При этом сила совершает работу, а *энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы.*

Работа dA силы $\vec{F}$ на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до v , идет на увеличение кинетической энергии. Покажем это.

Работа силы на конечном перемещении:

$$A_{1-2}(\vec{F}) = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S}$$

Элементарная работа суммы сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$:

$$dA(\vec{F}) = dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n$$

Работа суммы сил: $A_{1-2}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n A_{1-2}(\vec{F}_i)$, то есть:

$$A_{1-2}(\vec{F}) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_1^2 \frac{d\vec{P}}{dt} V dt.$$

$$A_{1-2}(F) = \int_1^2 F dS = \int_1^2 \frac{dP}{dt} V dt.$$

Здесь $dS = V dt$ $F = \frac{dP}{dt}$ ил
 $F = \frac{d}{dt}(P) = \frac{d}{dt}(mV) = m \frac{dV}{dt}$ и

Полная работа определяется следующим выражением:

$$A_{1-2}(F) = m \int_1^2 V dV = m \int_{V_1}^{V_2} V dV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

Выражение $\frac{mV^2}{2} = K$ **кинетическая энергия**

Полная работа связана с изменением кинетической энергии следующим образом:

$$A_{1-2}^{\text{вс}} = K_2 - K_1$$

Работа всех сил, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии этой системы.

Полученную формулу можно записать компактно:

$$A = \Delta K \quad \text{или} \quad dK = dA.$$

Последнее выражение можно озвучить так:

Изменение кинетической энергии dK равно работе внешних сил dA .

Важно отметить, что *приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.*

Кинетическая энергия зависит от массы и скорости тела .

Говорят : *кинетическая энергия системы есть функция состояния движения.*

В разных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга, скорость тела, а ,следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы.

Таким образом, *кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.*

Из теоремы Кенинга следует

В системе центра масс: $\sum V'_c = 0$

$$K = K' + \frac{MV_0^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в её относительном движении по отношению к центру масс.

Консервативные и неконсервативные силы.

Консервативными называются силы, *работа которых не зависит от того, по какой траектории произошло перемещение тела, а зависит только от его начального и конечного положений.* Примеры таких сил : *упругие силы и гравитационные силы.* Работа упругих сил была рассмотрена ранее.

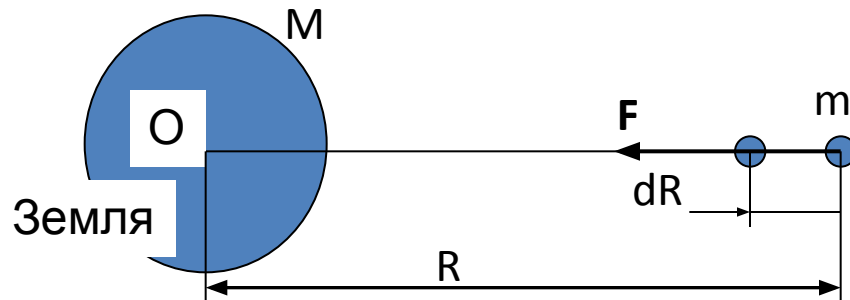
Определим *работу, совершаемую силой тяготения* при перемещении ею материальной точки массой m .

На расстоянии R на данное тело действует сила:

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

При перемещении этого тела на расстояние dR совершается работа

$$dA = G \frac{mM}{R^2} dR$$



Направления силы и перемещения совпадают.

Если тело перемещать с расстояния R_1 до R_2 , то работа

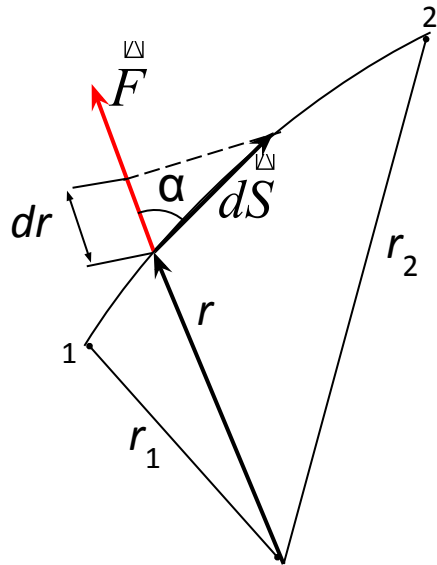
$$A_{12} = \int_{R_1}^{R_2} dA = \int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = m \left(\frac{GM}{R_1} - \frac{GM}{R_2} \right)$$

Из полученного выражения видно, что **работа зависит только от начального и конечного положения тела.**

Сила тяготения является *центральной силой*. Сила называется центральной, если она направлена к одной и той же точке (или от нее) и зависит от расстояния до этой точки, которая называется силовым центром.

(Центральной силой является также сила Кулона).

Покажем, что работа *центральной силы* зависит только от начального и конечного положения материальной точки.



Элементарная работа центральной силы F :

$$dA = F dS = F dS \cdot \cos \alpha = F dS_r$$

Из рисунка видно, что

$$dS_r = ds \cos \alpha = dr, \Rightarrow$$

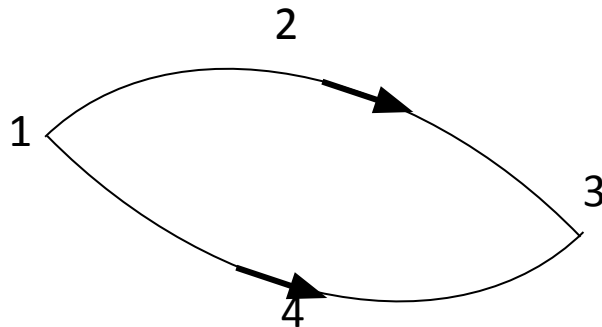
Поэтому: $dA = F(r) dr$

Окончательно полная работа:
$$A_{1-2}(F) = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr.$$

Так как по определению величина центральной силы есть функция только расстояния r , то значение определённого интеграла будет зависеть только от величин r_1 и r_2 , и не будет зависеть от формы траектории.

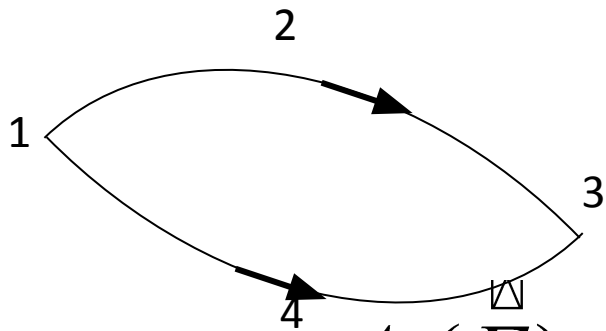
Можно дать *другое определение консервативной силы*.

Рассмотрим перемещение частицы из положения 1 в положение 3 под действием консервативной силы $\vec{F}$.



Работа, совершаемая при этом силой $\vec{F}$, не зависит от траектории, то есть:

$$A_{123}(\vec{F}) = A_{143}(\vec{F}).$$



Тогда *работа по замкнутой траектории*:

$$A_0(\vec{F}) = A_{12341}(\vec{F}) = A_{123}(\vec{F}) + A_{341}(\vec{F}).$$

Но так как:

$$A_{341}(\vec{F}) = -A_{143}(\vec{F}) = -A_{123}(\vec{F}).$$

Окончательно:

$$A_0(\vec{F}) = A_{123}(\vec{F}) + A_{341}(\vec{F}) = A_{123}(\vec{F}) - A_{123}(\vec{F}) = 0.$$

Отсюда следует еще одно определение консервативных сил:

работа консервативных сил по любой замкнутой траектории равна нулю.

Математическая запись этого утверждения может быть представлена, исходя из определения работы, следующим образом:

$$\oint_S \vec{F} d\vec{r} = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0$$

Интеграл по замкнутому контуру S : $\oint_S \vec{F} d\vec{r}$
называется циркуляцией вектора $\vec{F}$.

Введение нового математического понятия векторного анализа позволяет дать еще одно определение консервативной силы:

Если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна.

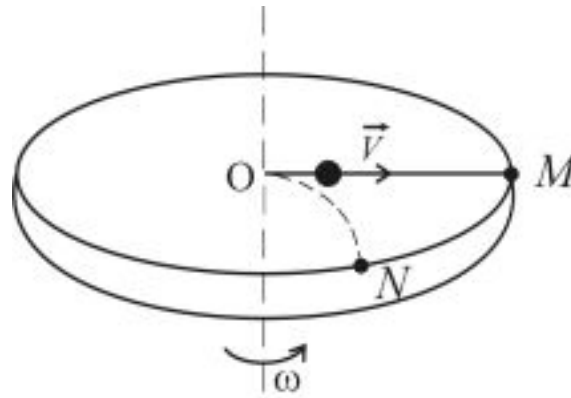
Неконсервативные силы. К ним относятся прежде всего, так называемые, *диссипативные* силы: трение, сила вязкого сопротивления. Эти силы *зависят не только от конфигурации тел, но и от относительных скоростей движения.*

Сила трения направлена против скорости тела, поэтому *работа сил трения отрицательна.*

Отсюда определение:

Диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

Еще один вид неконсервативных сил гироскопические силы.
Эти силы *зависят от скорости материальной точки и перпендикулярны к этой скорости. Работа таких сил равна нулю.* Примером таких сил является *сила Кориолиса*:



По определению, элементарная работа *силы Кориолиса*:

$$dA = \vec{F}_K d\vec{S} = F_K dS \cdot \cos \alpha = 0$$

так как $\cos \alpha = 0$, поскольку $\alpha = \frac{\pi}{2}$.