Лекция №2

Статические и динамические характеристики объектов и звеньев управления

План лекции:

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ
5. ПОНЯТИЕ О СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ САУ

1. ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ
2. ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ САУ

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразованием Лапласа функции x(t) называется функция

$$X(p) = L[x(t)] = \int_{0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

Здесь x(t) - оригинал функции,

X(p) - ее изображение по Лапласу,

L – оператор преобразования.

Свойства преобразования Лапласа

Изображение производной:

$$L[x(t)] = X(p);$$

$$L[\dot{x}(t)] = p \cdot X(p) - x(0);$$ (1)

$$L[\ddot{x}(t)] = p^2 X(p) - px(o) - \dot{x}(0);$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$x(0), \dot{x}(0), \ \ldots$ *- начальные условия*

Изображение производной при нулевых условиях:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0, \qquad \ldots$$

$$L[x(t)] = X(p);$$

$$L[\dot{x}(t)] = p \cdot X(p);$$

$$L[\ddot{x}(t)] = p^2 X(p);$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{L[x^{(n)}(t)] = p^n X(p).} \qquad (2)$$

Изображение интеграла:

$$L\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(p)}{p} \qquad (3)$$

Предельные теоремы:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{p\to\infty} pX(p);$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p). \qquad (4)$$

Обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(p)\cdot e^{pt}\,dp,$$

Таблица преобразований Лапласа	Теорема разложения

Таблица преобразований Лапласа

$x(t) = L^{-1}[X(p)]$	$X(p) = L[x(t)]$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t^k	$\frac{k!}{p^{k+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$

2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть оператор САУ имеет вид:

$$a_3 y^{(3)}(t) + a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) =$$

$$b_2 x^{(2)}(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \qquad (5)$$

Слева – всегда оператор выходного сигнала, справа – оператор входного сигнала.

Размерность системы равна максимальной степени производной!!

Напомним, что

$L[\, y^{(n)}\,(t)]=p^n\, Y(p); \quad L[\, x^{(n)}\,(t)]=p^n\, X(p).$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (5),

$$a_3\, p^3\, Y(p) + a_2\, p^2\, Y(p) + a_1\, p\, Y(p) + a_0\, Y(p) = b_2\, p^2\, X(p) + b_1\, p\, X(p) + b_0\, X(p), \quad \Longrightarrow$$

$$(a_3\, p^3 + a_2\, p^2 + a_1\, p + a_0\,)Y(p) = (\, b_2\, p^2 + b_1\, p + b_0\,)\, X(p), \quad \Longrightarrow$$

$$A(p)\,Y(p) = B(p)\,X(p), \qquad (6)$$

$$A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0,$$

$$B(p) = b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0.$$

Уравнение (6) называется операторным.

Операторная форма позволяет свести анализ дифференциальных уравнений к исследованию алгебраических уравнений.

3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

П е р е д а т о ч н о й ф у н к ц и е й *линейной стационарной САУ называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала Y(p) к такому же изображению входного сигнала X(p) при нулевых начальных условиях:*

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \qquad (7)$$

Из операторной формы записи следует, что

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{b_m p^m+\ldots+b_1 p+b_0}{a_n p^n+\ldots+a_1 p+a_0}=\frac{B(p)}{A(p)} \quad (8)$$

Уравнение $A(p)=a_n p^n+\ldots+a_1 p+a_0=0$

называется характеристическим.

Корни знаменателя передаточной функции $A(p)=0$ называются ее полюсами, корни числителя $B(p)=0$ называются нулями.

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ САУ

Структурной схемой САУ называется графическое изображение ее элементов, представленных своими передаточными функциями, и связей между ними.

Условные обозначения структурных схем

Элемент САУ:

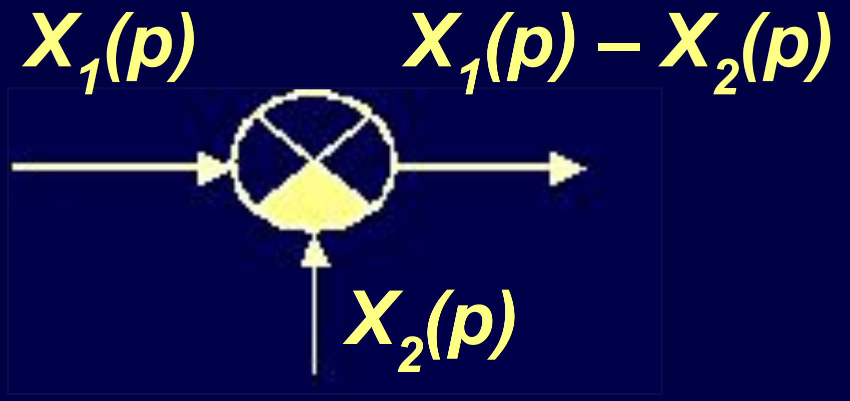
4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

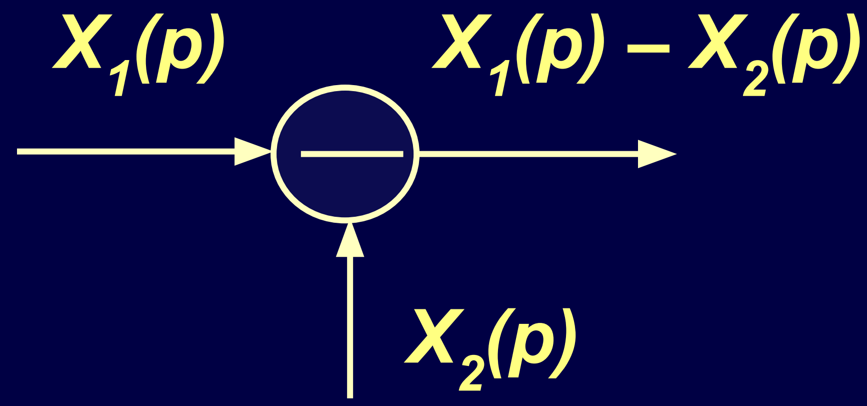
Структурной схемой САУ называется графическое изображение ее элементов, представленных своими передаточными функциями, и связей между ними.

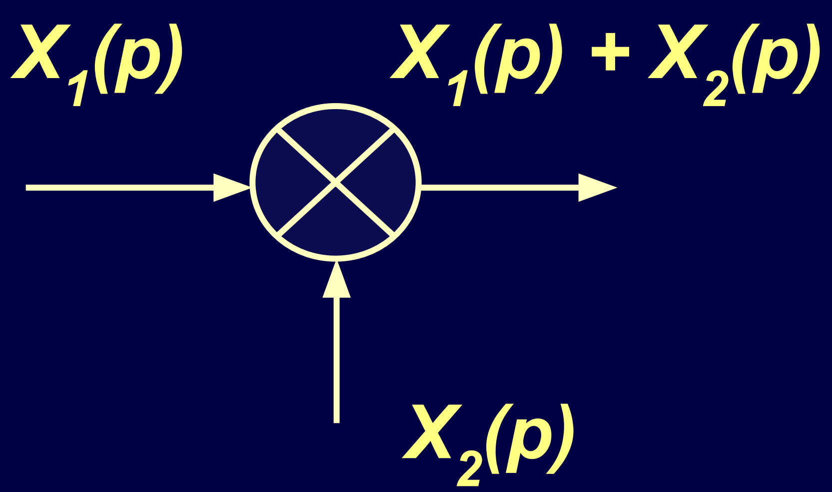
4.1. Условные обозначения структурных схем

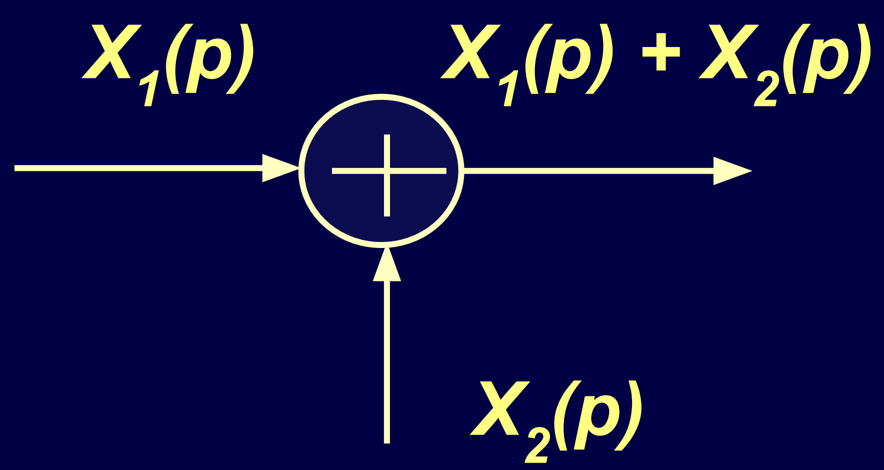
Элемент САУ:

Сумматор:



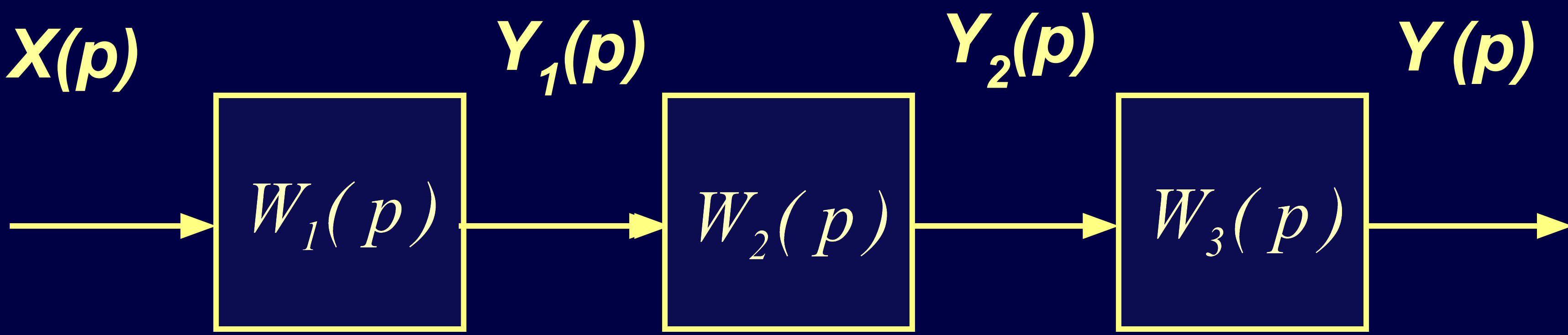






4.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СОЕДИНЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ САУ

Последовательное соединение звеньев



$Y_1(p) = W_1(p) \times X(p);$

$Y_2(p) = W_2(p) \times Y_1(p);$

$Y(p) = W_3(p) \times Y_2(p).$

Исключая промежуточные переменные, получим:

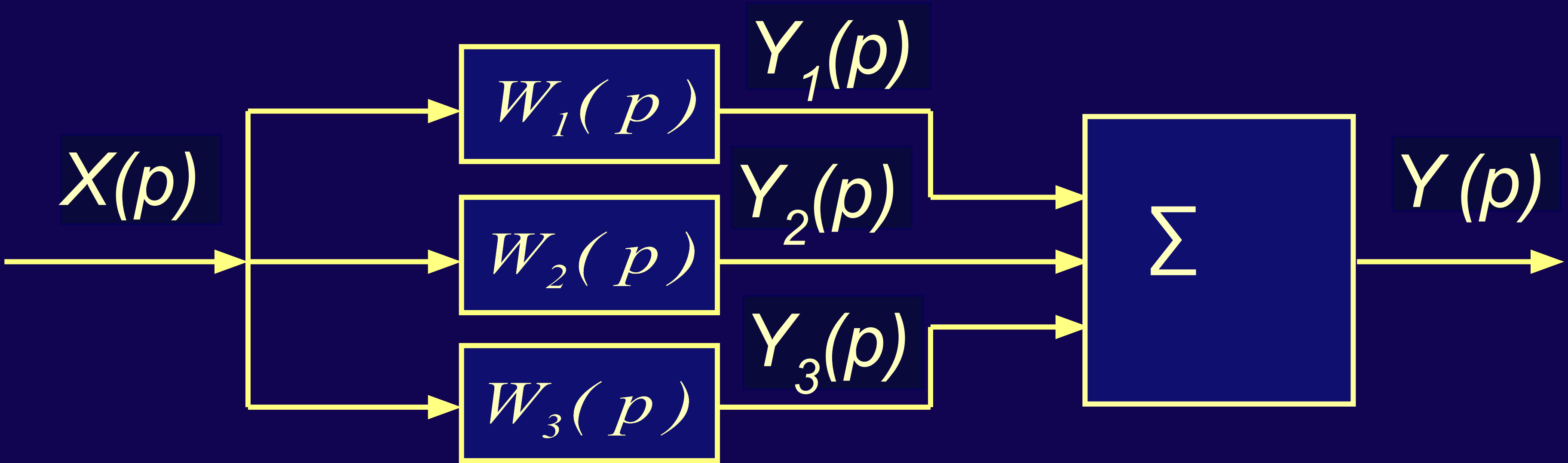
$$Y_2(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot X(p);$$

$$Y(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot X(p).$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \ldots = \prod_{i=1}^{n} W_i(p).$$

При последовательном соединении звеньев их ПФ перемножаются:

Параллельное соединение звеньев

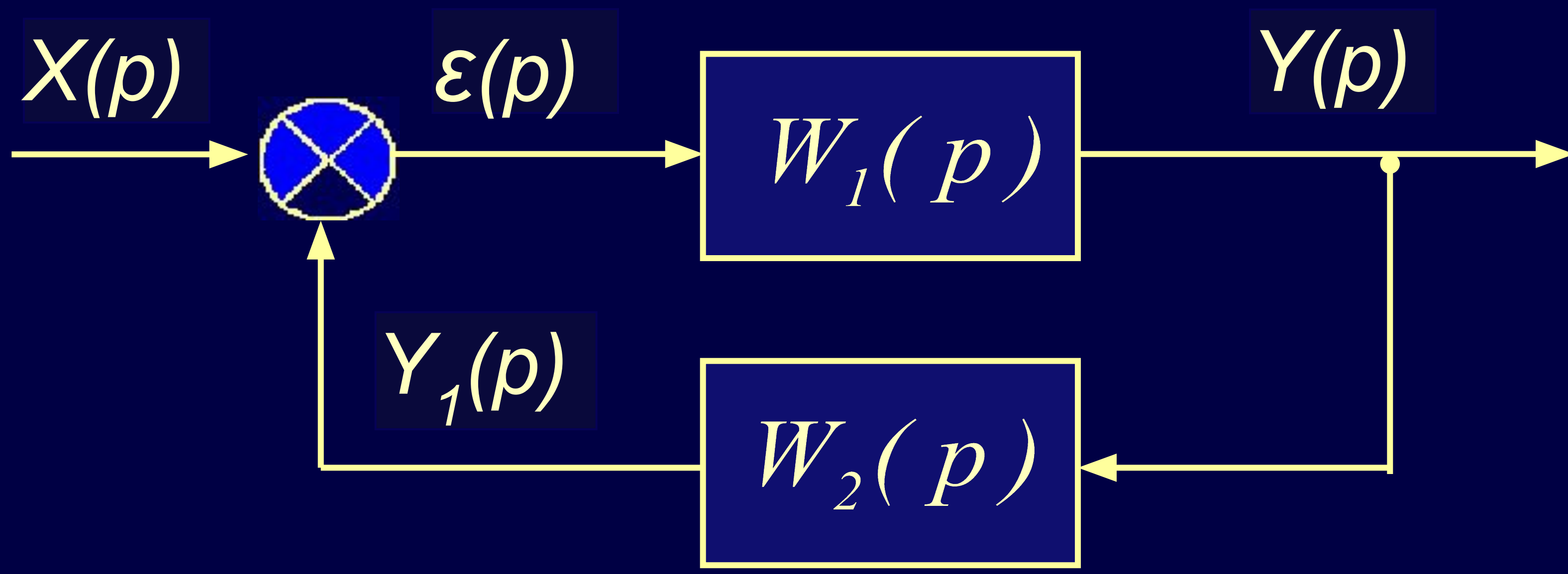


$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)] \cdot X(p).$$

$$W_{ЭК}(p) = W_1(p) + W_2(p) + \ldots = \sum_{i=1}^{n} W_i(p).$$

При параллельном соединении звеньев их ПФ складываются.

Встречно-параллельное соединение звеньев



$$\varepsilon(p) = X(p) - Y_1(p);$$

1

$$Y(p) = W_1(p)\,\varepsilon(p);$$

$$Y_1(p) = W(p)\,Y(p).$$

2

1. Исключаем $\boldsymbol{\varepsilon}(p)$:

$$Y(p) = W_1\ (p)\ [X(p) - Y_1(p)];$$

$$Y_1\ (p) = W_2(p)\ Y(p).$$

2. Исключаем $Y_1(p)$:

$$Y(p) = W_1(p)\ [\ X(p) - W_2(p) Y(p)\ ] \Longrightarrow$$

$$[1 + W_2(p)\ W_1(p)]\ Y(p) = W_1(p)\ X(p) \Longrightarrow$$

$$\boxed{W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) W_2(p)}.}$$

ПФ встречно-параллельного соединения звеньев с положительной обратной связью :

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}.$$

Для определения ПФ САУ методом преобразования структурных схем последовательно упрощают структурную схему САУ, объединяя звенья, соединенные последовательно, параллельно и встречно-параллельно с использованием полученных формул.

5. ПОНЯТИЕ О СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ САУ

Системы автоматического управления являются динамическими системами, поэтому их качество оценивается по поведению в двух режимах работы.

Установившийся (статический режим)

Переходный (динамический режим)

Установившийся (статический режим)

- это реакция системы, остающаяся спустя большой промежуток времени с момента приложения входного сигнала.

Решаются две задачи:
согласование диапазонов изменения переменных в элементах СУ с диапазоном изменения переменных ОУ и определение коэффициента усиления УУ.

Зависимость между входным и выходным сигналами в установившемся режиме называется статической.

Статические характеристики

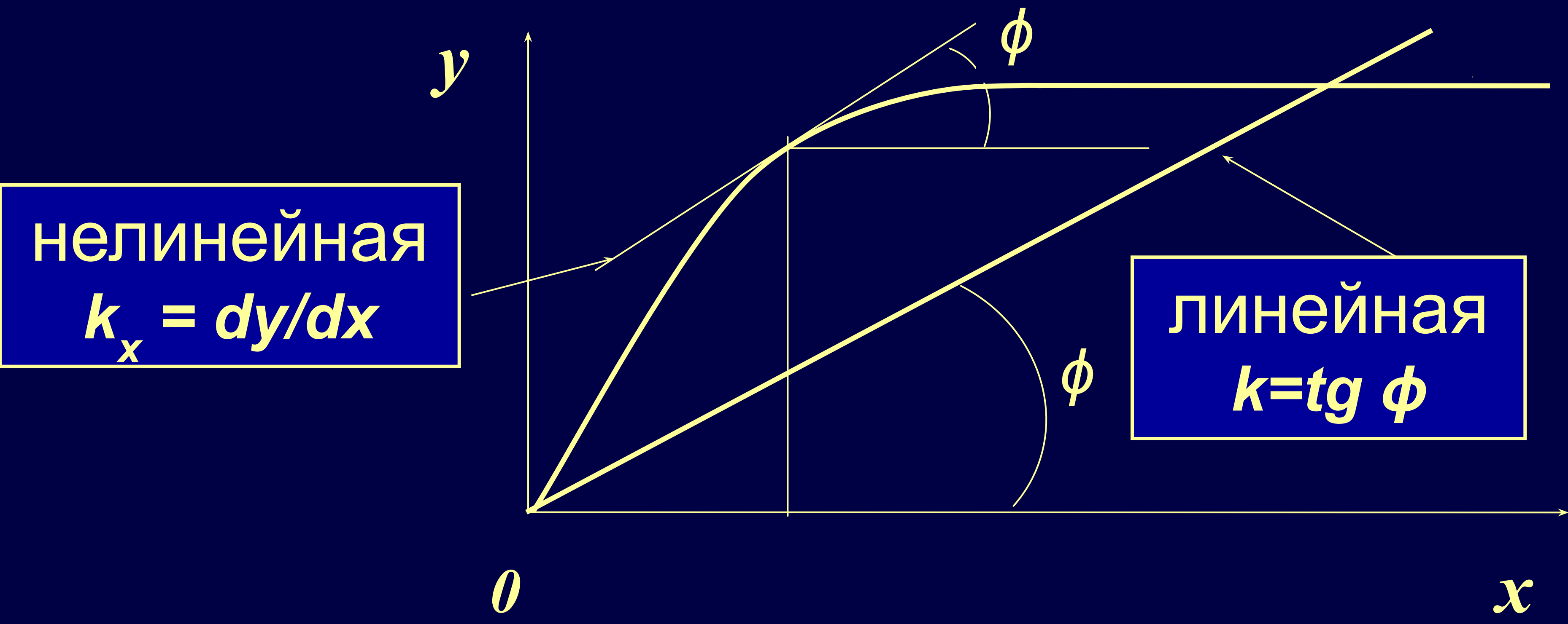
линейные

нелинейные

Линейными называются статические характеристики, описываемые уравнением

$$y = k \cdot x + b,$$

Примеры статических характеристик



Значение производной dy/dx *в какой-либо точке статической характеристики называется коэффициентом усиления в этой точке.*

Переходный (динамический режим)

- характеризуется переходом динамической системы из одного равновесного состояния в другое.

Характеристики поведения САУ в ПП называются ДИНАМИЧЕСКИМИ.

УСТАНОВИВШЕМСЯ называется режим, наступающий после завершения ПП.

Любая САР состоит из 2-х основных элементов: объекта регулирования (ОР) и регулятора. Основными свойствами объектов регулирования являются емкость объекта, самовыравнивание, время регулирования и запаздывания.

Емкость объекта – способность объекта аккумулировать вещество или энергию.

Самовыравнивание – свойство ОР после внесения возмущения (например, нарушение равновесия между притоком и расходом вещества) самостоятельно, без участия человека или регулятора, переходить в новое равновесное состояние. Самовыравнивание облегчает функционирование регулятора.

Объекты регулирования, обладающие свойством самовыравнивания, называются статическими, а не обладающие этим свойством – астатическими.

6. ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

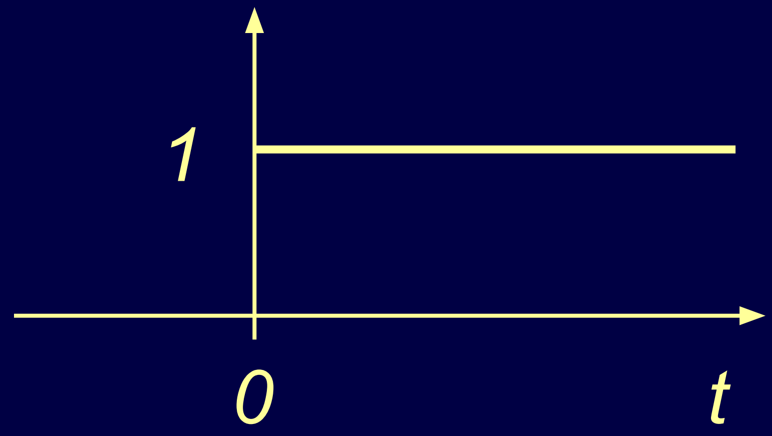
О динамических свойствах системы судят по ее реакции на типовые входные воздействия.

Временной характеристикой звена называют закон изменения выходной величины звена во времени y(t) в ответ на изменение входного воздействия x(t) при условии, что до приложения входного воздействия звено находилось в покое.

А) Единичная ступенчатая функция

Е Д И Н И Ч Н О Й С Т У П Е Н Ч А Т О Й называется функция, удовлетворяющая условиям:

$$1(t)=\begin{cases}0 & \forall\ t<0,\\ 1 & \forall\ t\ge 0.\end{cases}$$

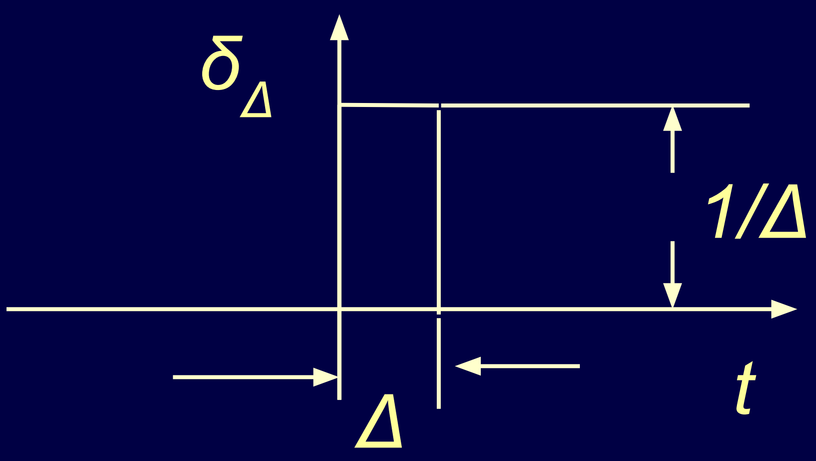


$$L[1(t)]=\int_0^\infty 1(t)\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{p}.$$

Б) Единичный импульс

Е Д И Н И Ч Н Ы М И М П У Л Ь С О М (“дельта”функцией, функцией Дирака) называется функция, удовлетворяющая условиям:

$$\int_0^t \delta(\tau)d\tau = 1; \qquad \delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall\, t \neq 0, \\ \infty & \forall\, t = 0. \end{cases}$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t).$$

$$L[\delta(t)] = 1.$$

В) Гармонический входной сигнал

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ВХОДНОЙ СИГНАЛ имеет вид:

$$x(t) = A_x \ \mathrm{Sin} \, (\omega t + \phi_x),$$

A_x *- амплитуда входного сигнала;*

$\boldsymbol{\omega}$ *- круговая частота (рад/с);*

ϕ_x *- начальная фаза (рад).*

7. ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ САУ

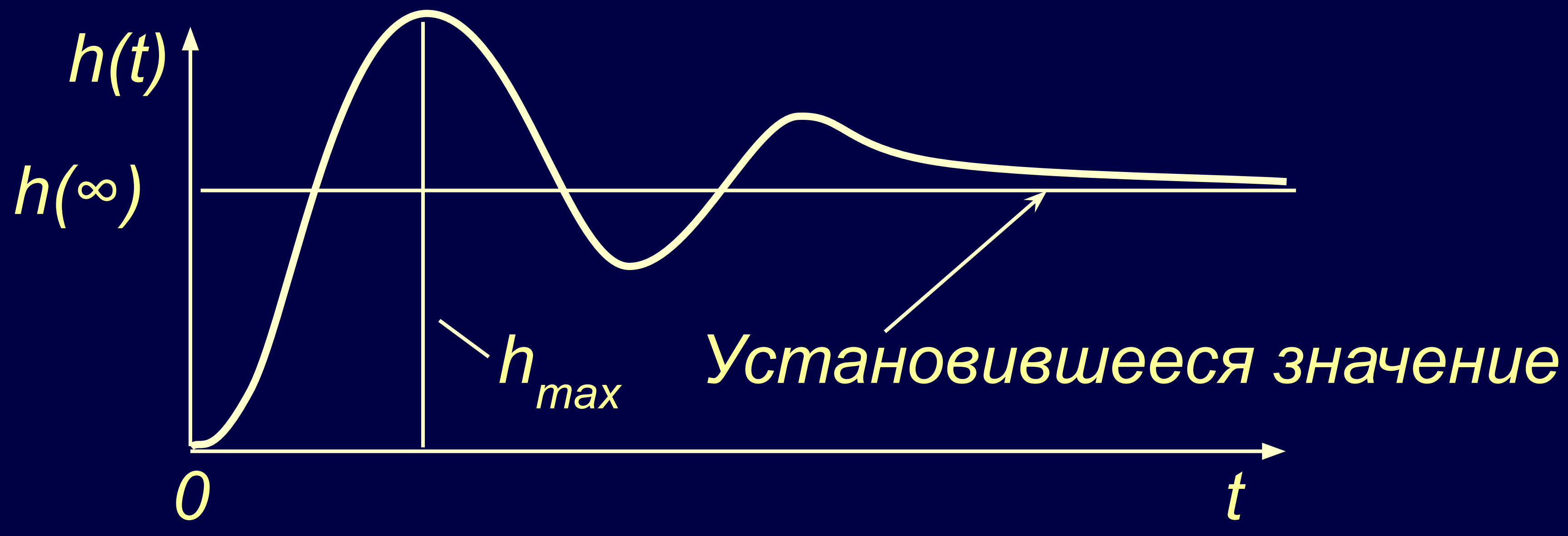
При анализе качества системы управления обычно выбирается ступенчатый сигнал

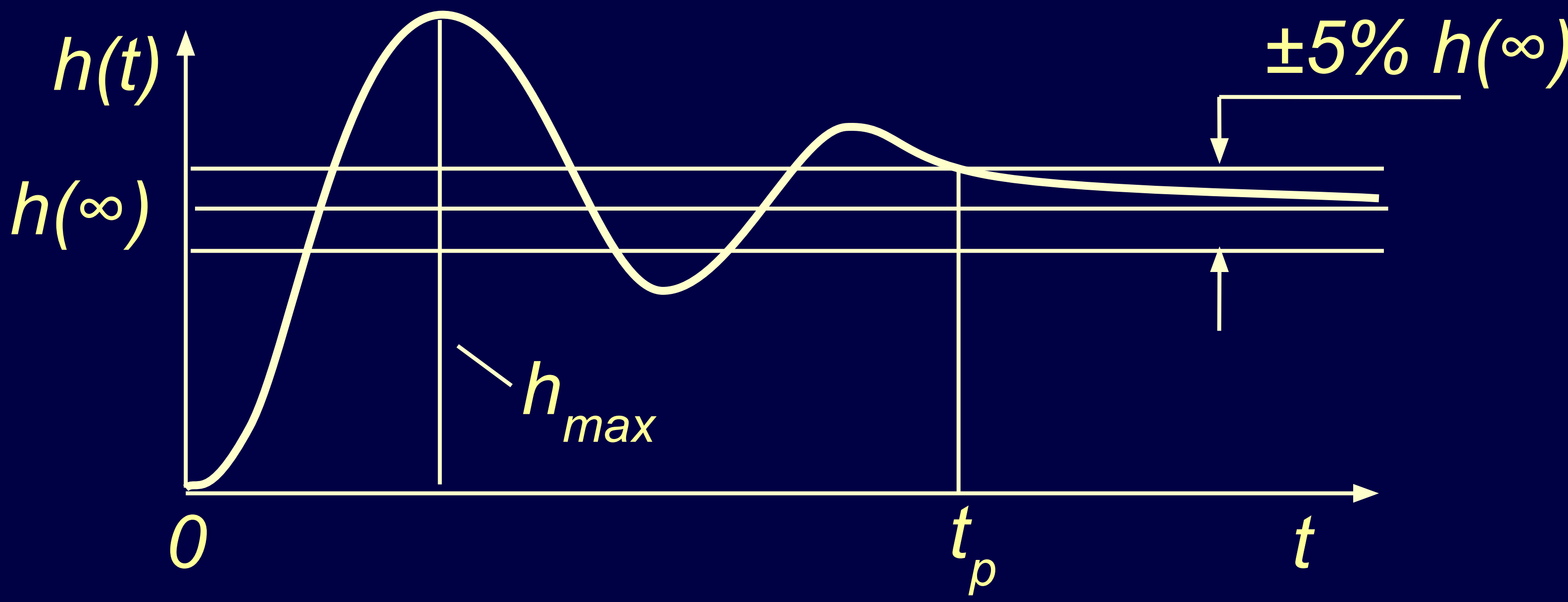
П Е Р Е Х О Д Н О Й Ф У Н К Ц И Е Й h(t) САУ называется ее реакция на е д и н и ч н ы й с т у п е н ч а т ы й сигнал при нулевых начальных условиях.

Функция h(t) характеризует переход САУ из одного равновесного состояния в другое.

Графическое изображение переходной функции – ***переходная характеристика***.

Время переходного процесса характеризует быстродействие системы и, как правило должно быть минимальным.





ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЕ - это величина, определяемая формулой:

$$\sigma = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100\,\%$$

ВРЕМЕНЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ называется момент времени t_P , когда график переходной функции h(t) входит в “трубку” ± 5% h(∞) и в дальнейшем не выходит из нее.