

Вища та прикладна математика

Модуль: Математичне програмування та дослідження операцій

доц. Лебідь О.Ю.

Дніпропетровськ

2016

Тема 1: Предмет та основні завдання математичного програмування та ДО

План

1. Загальна постановка оптимізаційної задачі.
2. Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті.
3. Означення розв'язку цільової функції.
4. Класифікація задач математичного програмування та дослідження операцій.
5. Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування.

Мета, предмет та основні завдання дисципліни

*«У світі не відбувається нічого,
в чому не було б видно суть якого-небудь
максимуму або мінімуму»
Леонард Ейлер*

Мета: формування у курсантів (студентів) базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають у процесі управління.

Предмет: моделі та методи математичного програмування, способи дослідження та оптимізації операцій.

Загальна постановка оптимізаційної задачі, її структура

Надана деяка множина X і функція $F(x)$, визначена на цій множині X . Необхідно знайти мінімум функції $F(x)$ на множині X , тобто

$$F(x) \rightarrow \min, x \in X \quad (1)$$

При цьому $F(x)$ будемо називати цільовою функцією, X – допустимою множиною, а будь-який елемент $x \in X$ – допустимою точкою задачі (1).

Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті

- 1) задача оптимального розподілу ресурсів при плануванні випуску продукції на підприємстві (задача про асортимент);
- 2) задача на максимум випуску продукції при заданому асортименті;
- 3) задача про суміші (раціон, дієта);
- 4) транспортна задача;
- 5) задача комівояжера;
- 6) задача оптимального розподілу капіталовкладень;
- 7) задача розкрою;
- 8) задача про призначення.

Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті

Таблиця 1.

Інформація, необхідна для складання виробничої програми

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, м ²	скла, м ²	
Морозильна камера	9,2	3	—	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	—

Змістовні приклади задач математичного програмування в економіці, менеджменті

$$\max F = 300x_1 + 200x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9,2x_1 + 4x_2 \leq 520 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 240 \\ 2x_2 \leq 40 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Означення розв'язку цільової функції

$$F^* = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, c_1, \dots, c_l) \rightarrow \max(\min)_{x_j, j=\overline{1, n}}, \quad (1)$$

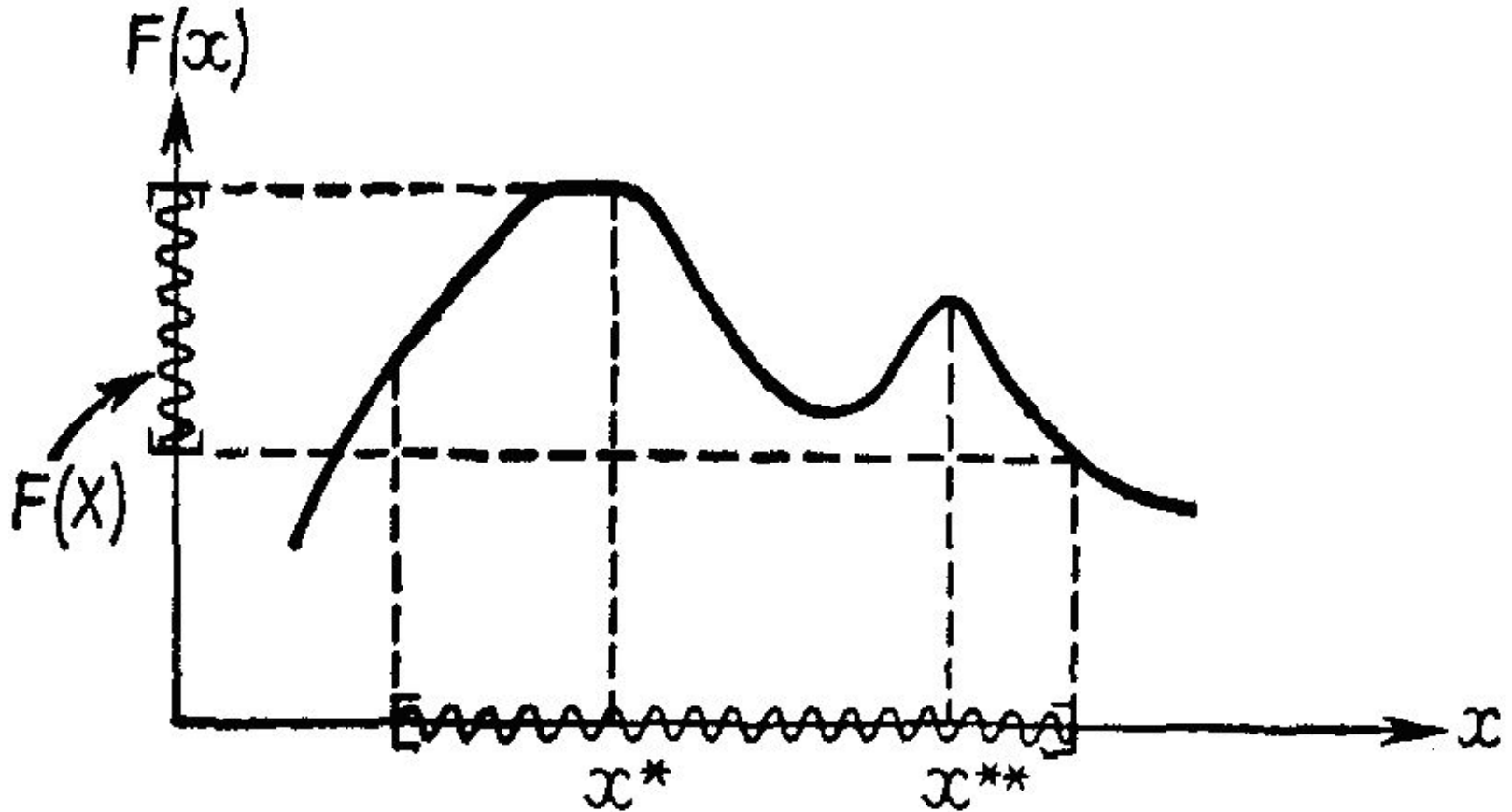
$$q_r(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, c_1, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0, \quad r = \overline{1, s}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Класифікація задач математичного програмування та дослідження операцій

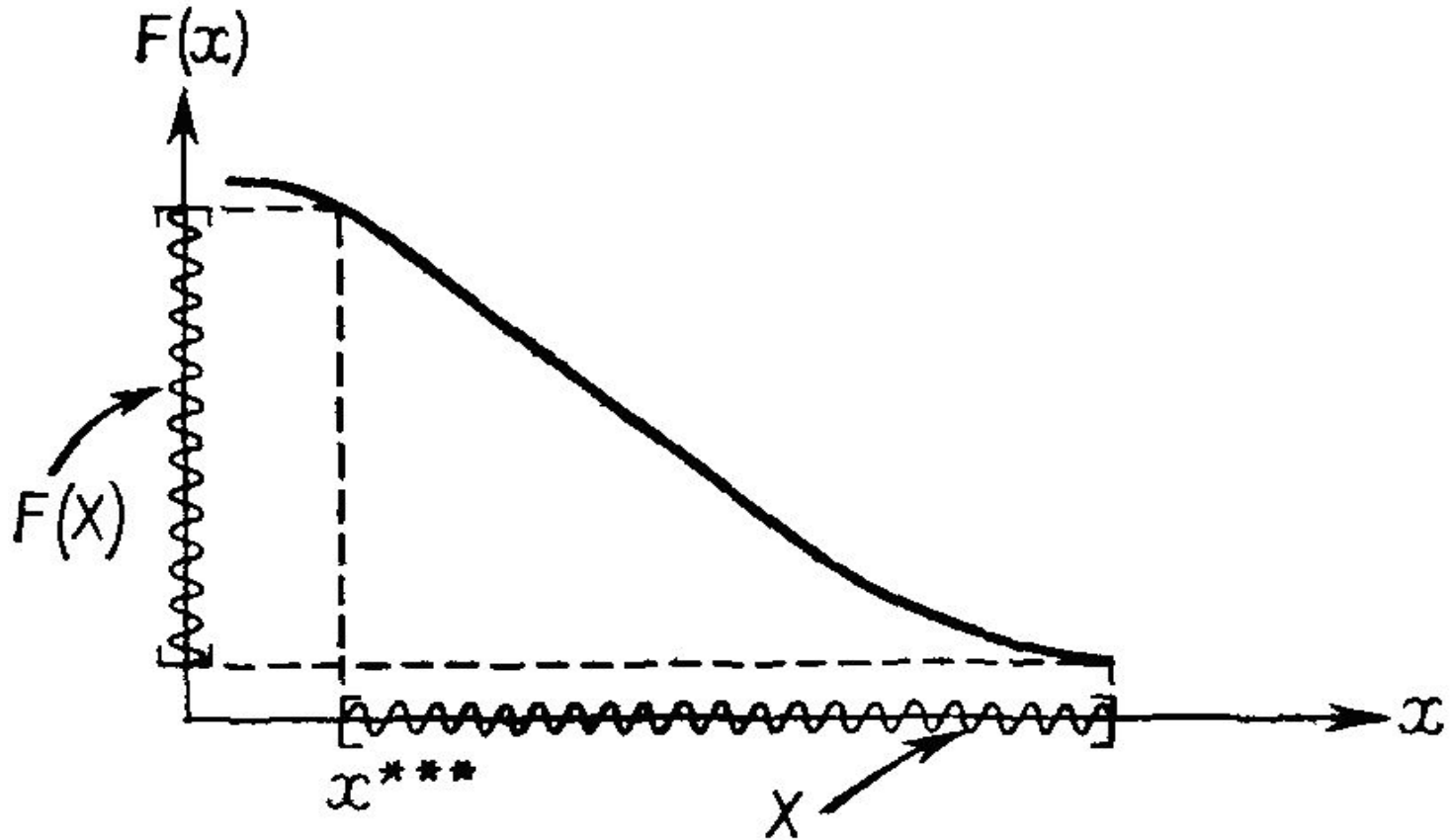
1. Умовні; безумовні.
2. Одновимірні; багатовимірні; нескінченновимірні.
3. Неперервні; дискретні.
4. Детерміновані; недетерміновані (стохастичні або в умовах невизначеності та ризику).
5. Статичні; динамічні.
6. Одноекстремальні; багатоекстремальні.
7. Однокритеріальні; багатокритеріальні.
8. Лінійні; нелінійні.

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



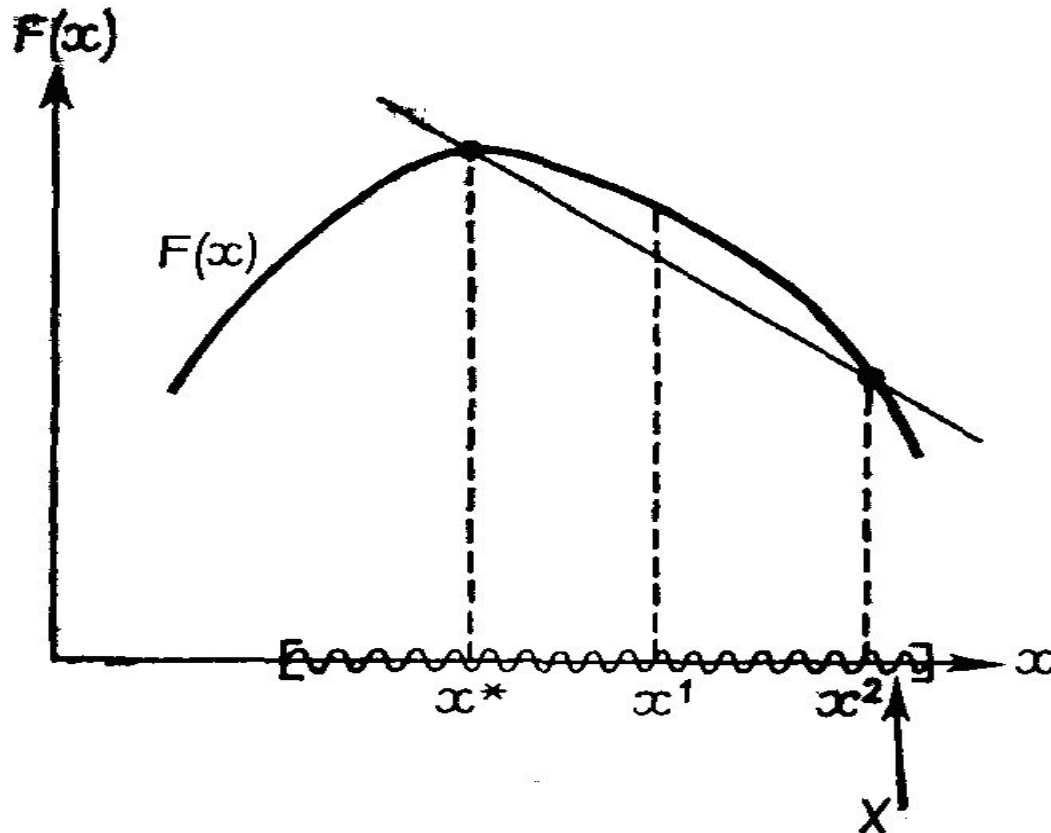
Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з однією змінною (внутрішній розв'язок)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



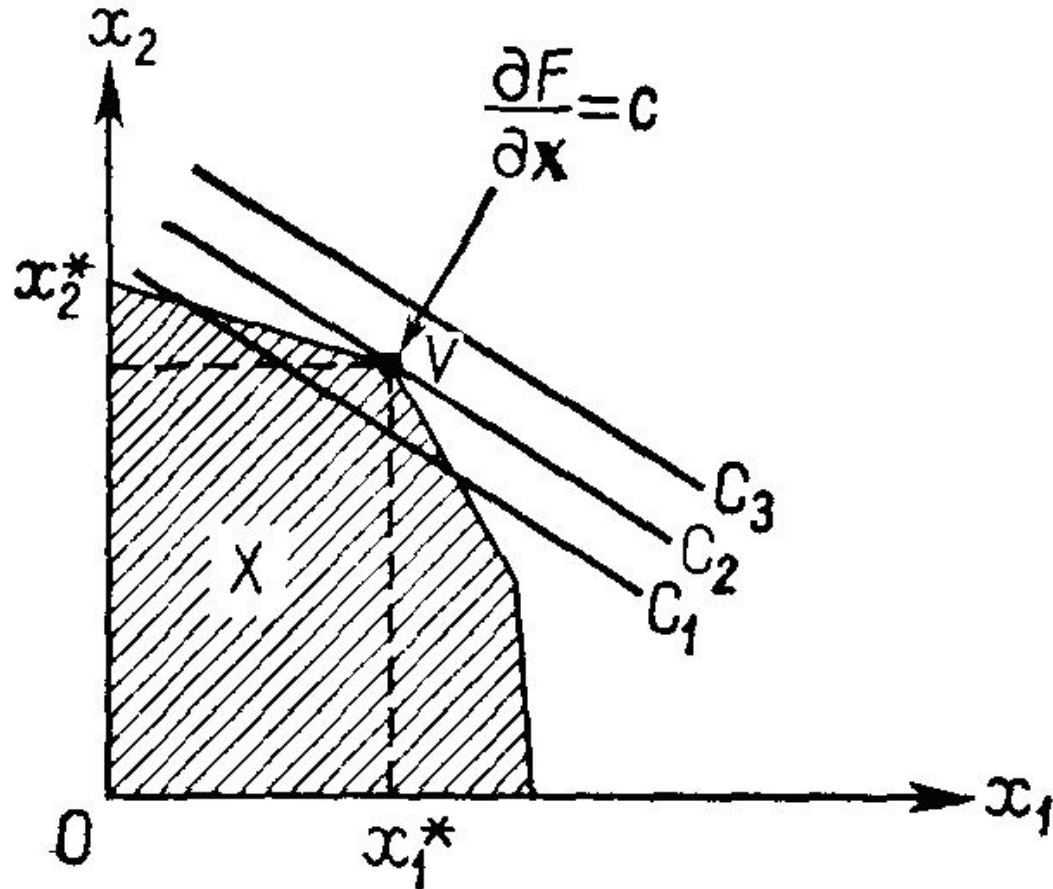
Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з однією змінною (граничний розв'язок)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



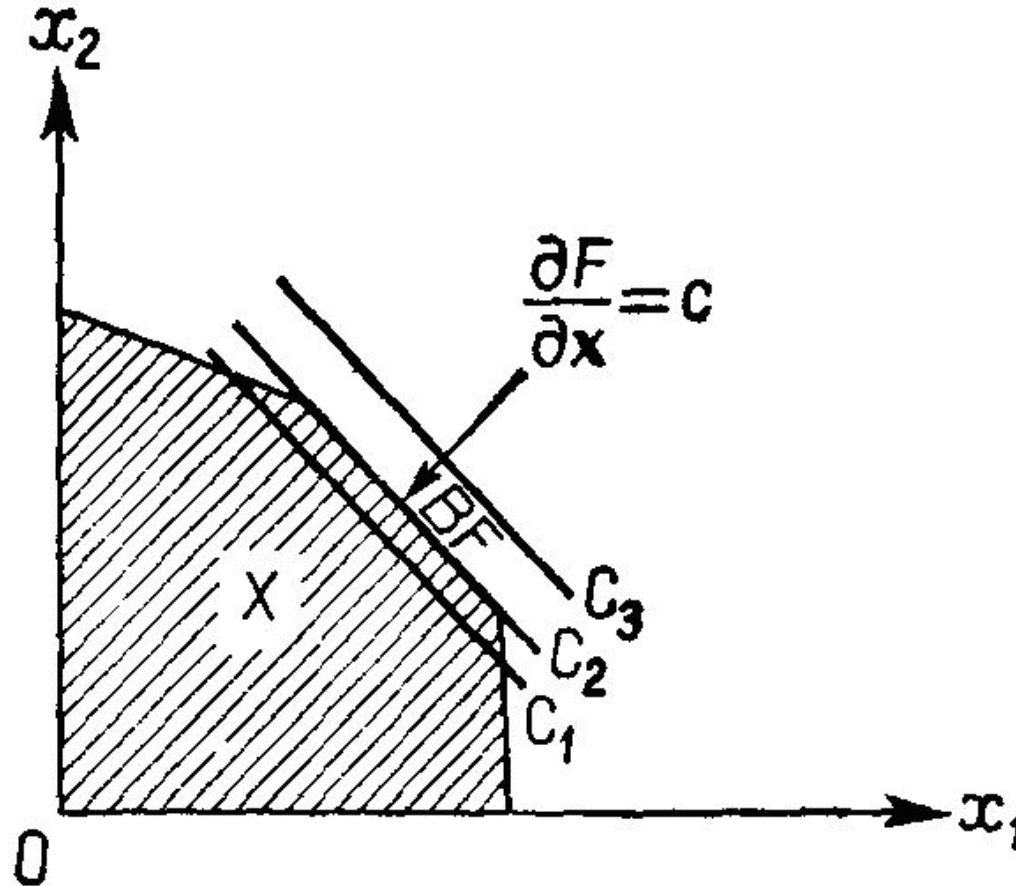
Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з однією змінною (існування глобального оптимуму)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



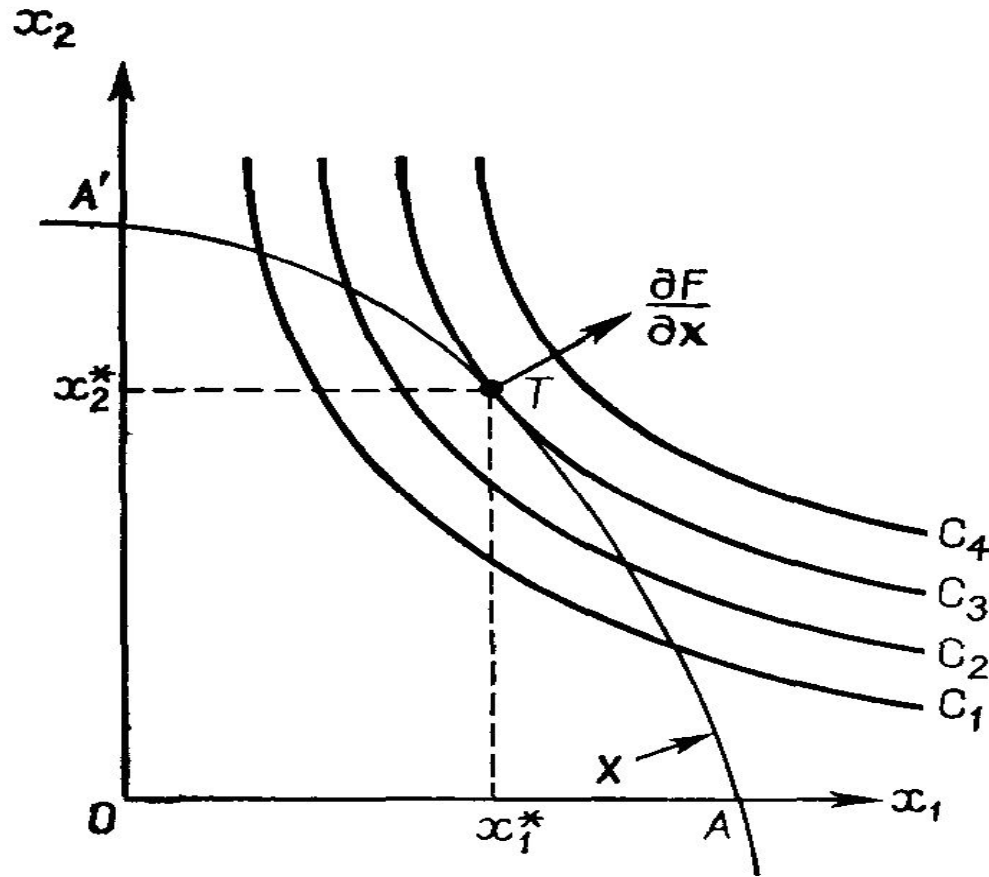
Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з двома змінними – лінійна оптимізація (розв'язок у вершині багатокутника)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



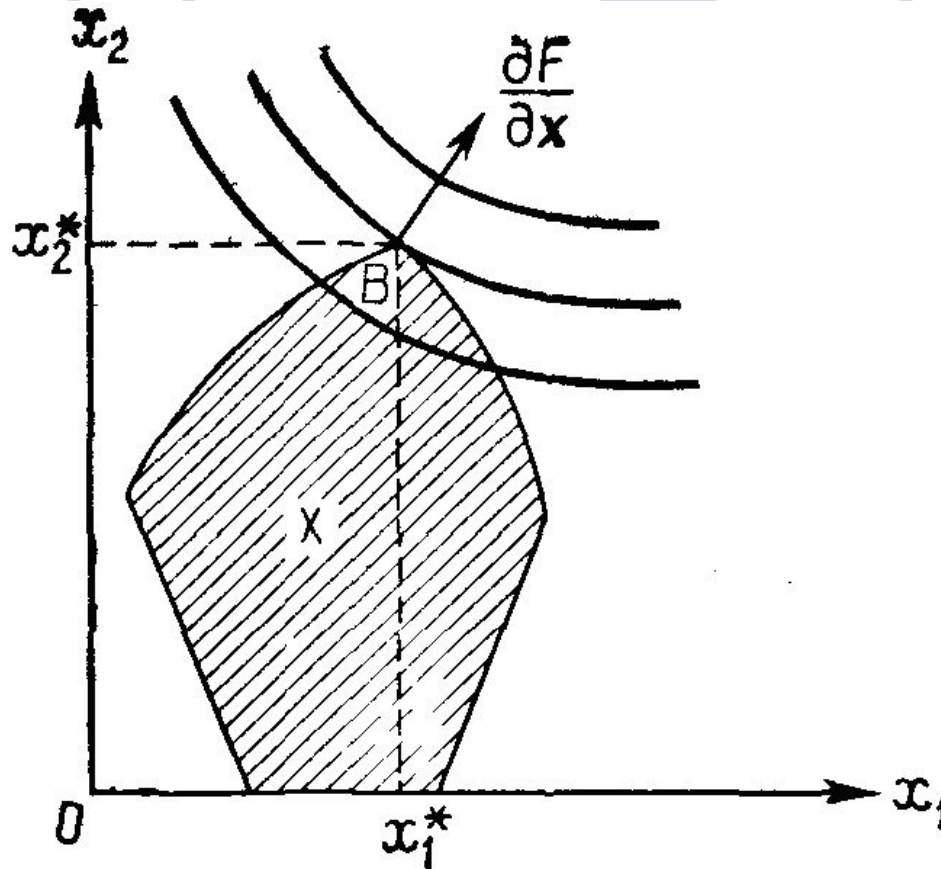
Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з двома змінними – лінійна оптимізація (розв'язок на грані BF)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



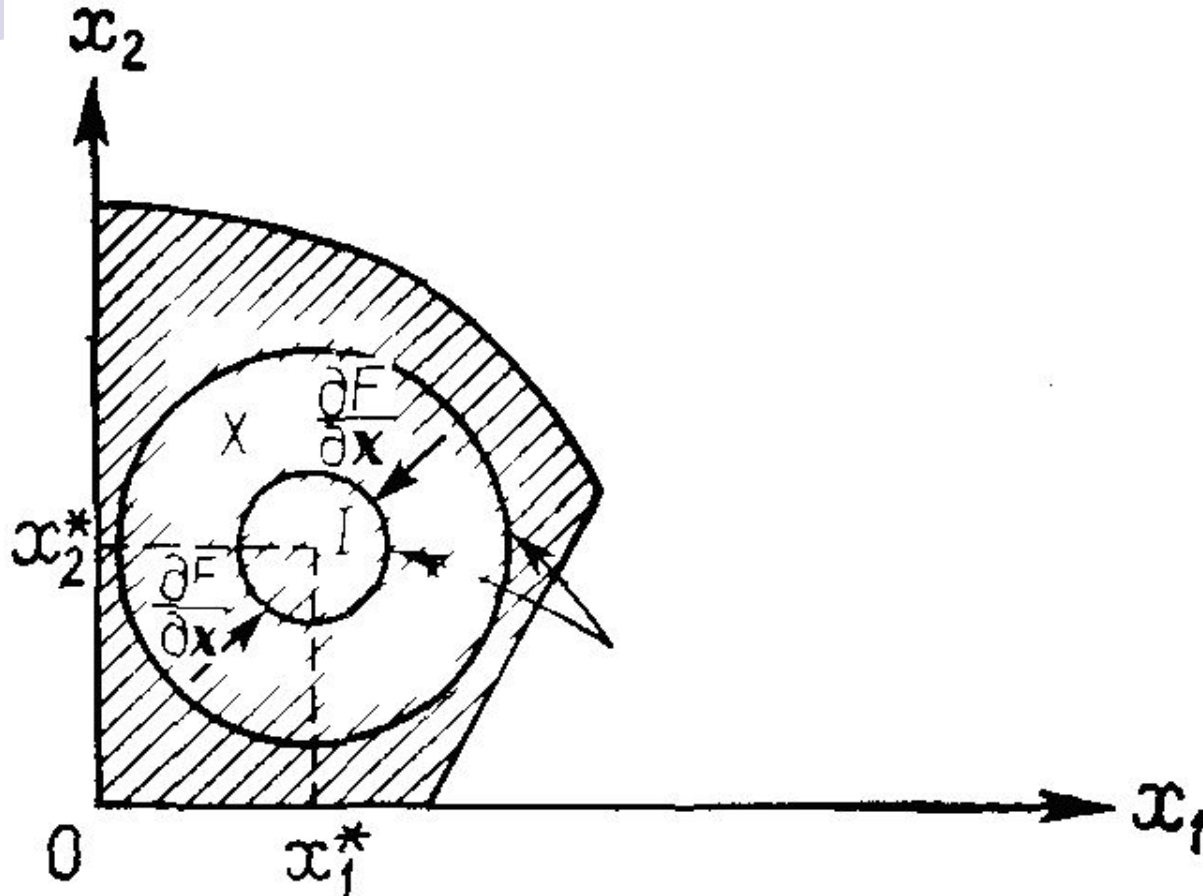
Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з двома змінними – нелінійна оптимізація (розв'язок у точці дотику)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з двома змінними – нелінійна оптимізація (граничний розв'язок)

Геометрична ілюстрація простих задач математичного програмування



Геометрична ілюстрація оптимізаційної задачі з двома змінними – нелінійна оптимізація (внутрішній розв'язок)

Тема 2: Побудова економіко-математичних моделей



План

1. Поняття моделі, математичної моделі, моделювання.
2. Етапи математичного моделювання.
3. Правила побудови економіко-математичної моделі.
4. Алгоритм побудови економіко-математичної моделі.

Поняття моделі, математичної моделі, моделювання

Модель від лат. («modulus» – зразок, норма, міра) – це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель – це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями.

Поняття моделі, математичної моделі, моделювання

- Процес побудови моделі в тому чи іншому ступені, який відповідає оригіналу, називають *моделюванням*.
- *Економіко-математична модель* – математичний опис економічного об'єкту, чи процесу. Ця модель виражає закономірності економічного процесу в абстрактному виді за допомогою математичних відношень.

Етапи математичного моделювання

1. Постановка задачі.
2. Побудова змістовної (вербальної) моделі об'єкта (процесу), що розглядається.
3. Побудова математичної моделі.
4. Розв'язання задач, сформульованих на базі побудованої математичної моделі.
5. Перевірка отриманих результатів на їх адекватність природі системи, що вивчалась, включаючи дослідження впливу позамодельних факторів та можливе коректування первинної моделі.
6. Реалізація отриманого розв'язку на практиці.

Правила побудови економіко-математичної моделі

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.
2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в явищі чи процесі, що досліджується нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому.
3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.
4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів була не порожньою.

Алгоритм побудови економіко-математичних моделей

1. Визначити змінні задачі, із зазначенням одиниць їх виміру.
2. Побудувати цільову функцію, яку необхідно оптимізувати.
3. Побудувати систему обмежень, якій повинні задовольняти змінні (явні та уявні обмеження).

Тема 3: Задачі лінійного програмування. Графічний метод

План

1. Задачі лінійного програмування.
2. Постановка задачі ЛП з двома змінними.
3. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування.
4. Можливі розв'язки задачі лінійного програмування.

Задача лінійного програмування

Математична модель ЗЛП в загальному випадку записується так: знайти екстремум функції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (10)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_m. \end{cases} \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (12)$$

Постановка задачі лінійного програмування з двома змінними

Розглянемо двовимірну задачу ЛП:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min) \quad (13)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{ \leq, \geq, = \} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{ \leq, \geq, = \} b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{ \leq, \geq, = \} b_m \end{cases} \quad (14)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (15)$$

Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

1. Побудова простору допустимих розв'язків, які задовольняють усі обмеження моделі.

2. Знаходження оптимального розв'язку серед усіх точок простору допустимих розв'язків:

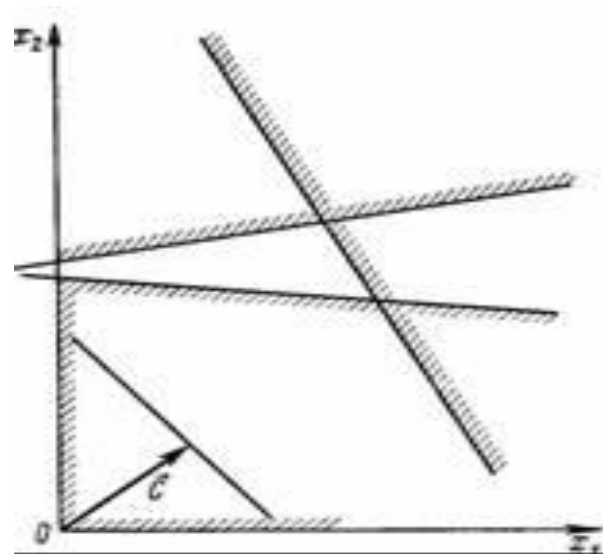
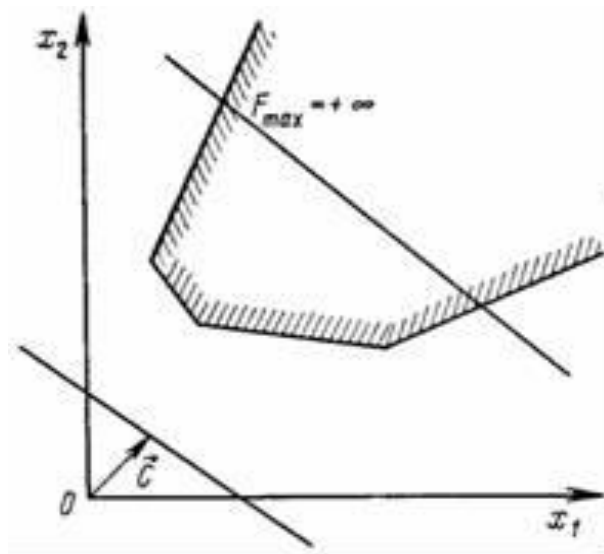
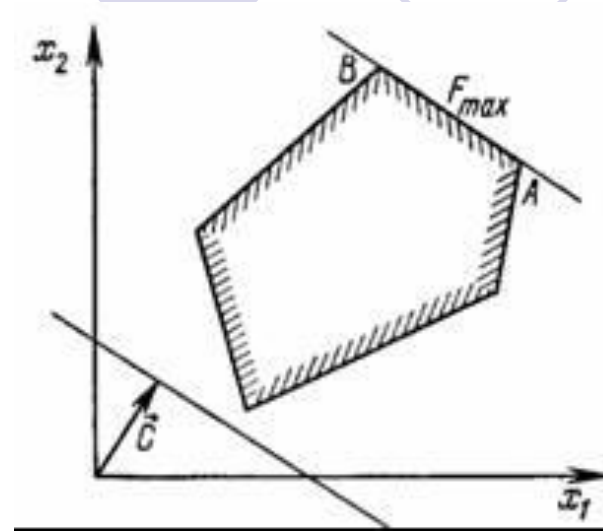
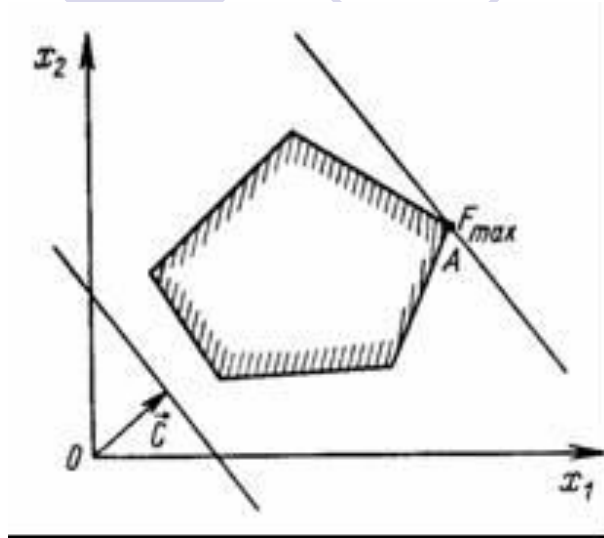
- будемо радіус-вектор $G = (c_1, c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі;

- будемо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпенд. до G ;

- переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямі G (для задачі максимізації), знаходимо крайню вершину многокутника у потрібному напрямі;

- визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Можливі розв'язки задачі лінійного програмування



Список літератури

Основна:

1. **Зайченко Ю. П.** Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2000.
2. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / под. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи; ЮНИТИ, 1999.
3. **Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Вильямс, 2001.
4. **Ульянченко О. В.** Дослідження операцій в економіці / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2003.

Додаткова:

1. **Вітлінський В. В.** Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К., 2001.
2. **Кузнецов А. В.** Математическое программирование / А. В. Кузнецов и др. – М.: Высшая школа, 1994.
3. Исследование операций в экономике. Учеб. пособие для вузов/ Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридмак; Под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2004. – 407с.
4. **Бережная Е. В.** Математические методы моделирования экономических систем / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М., 2002.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайнбегов и др. – М., 1999.