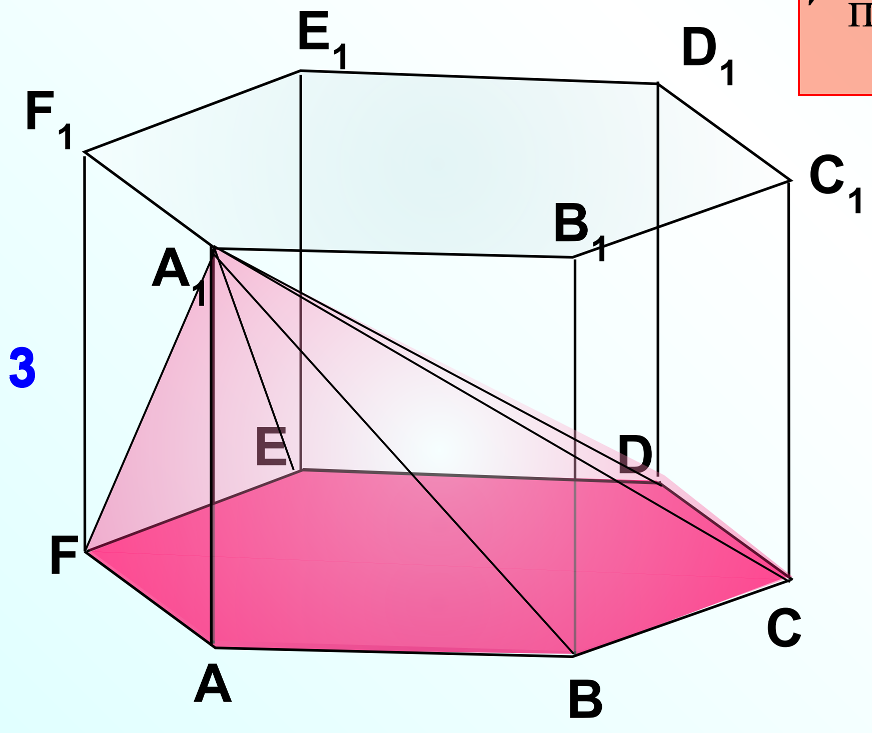
Методическая разработка Савченко Е.М.
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Вычисление объема многогранников

Открытый банк заданий по математике http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action

1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна **4**, а боковое ребро равно 3.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{о}} h$$



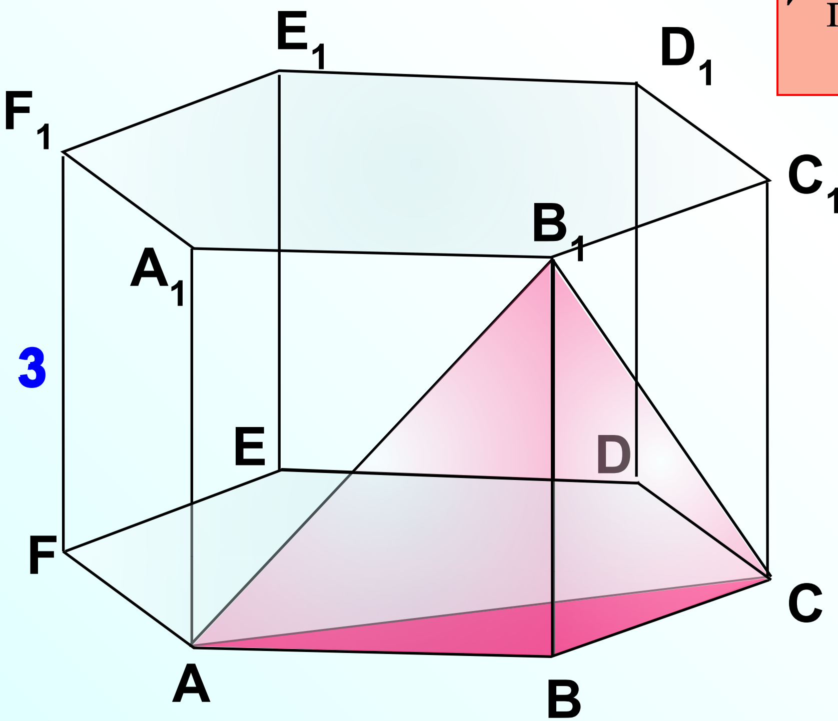
$$V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4$$

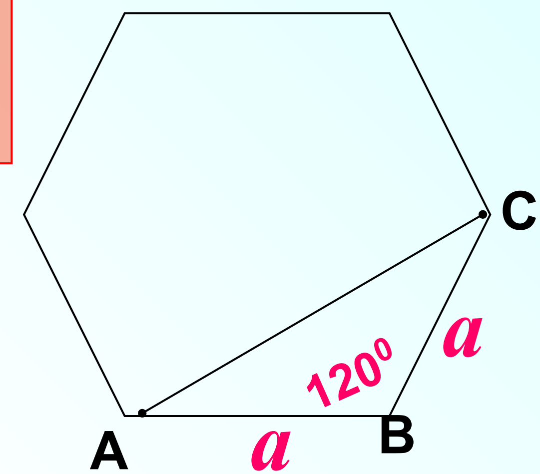
В 11	4					

2. Найдите объем многогранника, вершинами к
точки A, B, C, B_1 правильной шестиугольной пр
$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания кот
боковое ребро равно 3.

Найдем площадь треугольника ABC и площадь 6-угольника.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{о}}h$$





=sin60°

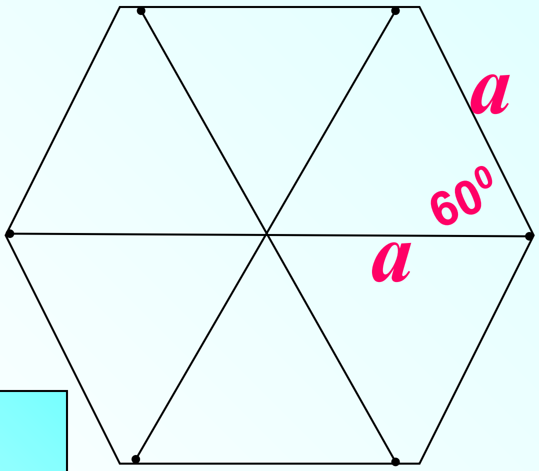
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^0$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$S_6 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^0 \quad = 3\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Вычислить площадь правильного 6-угольника можно разбив его на 6 треугольников.

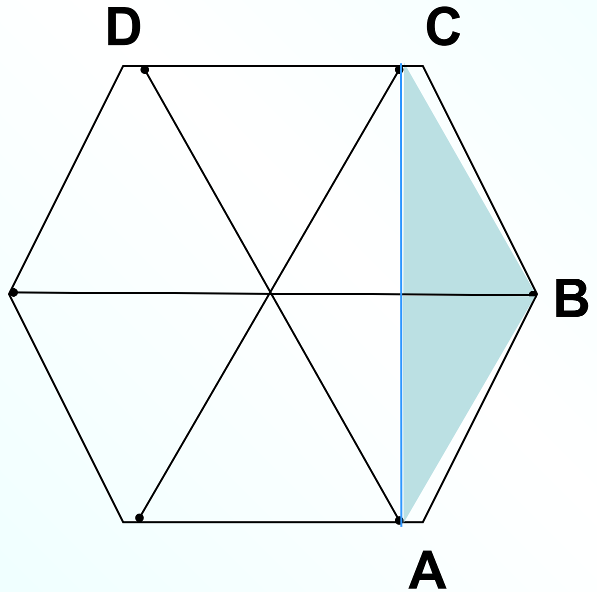


$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Найдем, какую часть составляет площадь треугольника АВС от всего 6-угольника.

$$\frac{S_{ABC}}{S_6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} : \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{6}$$

Значит, площадь треугольника АВС в 6 раз меньше площади шестиугольника.



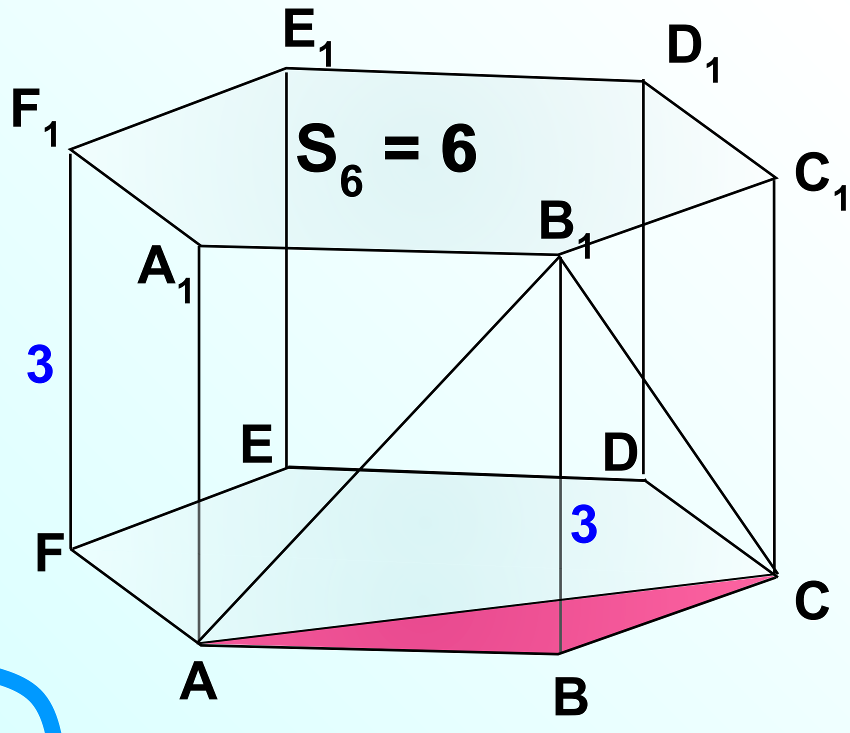
Найти это отношение можно исследуя геометрический чертеж, а не вычисляя площади.

Шестиугольник – 6 треугольников. Треугольник АВС содержит 1 такой треугольник.

$$\frac{S_{ABC}}{S_6} = \frac{1}{6}$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{о}} h$$

1 3



$$\frac{S_{ABC}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3$$

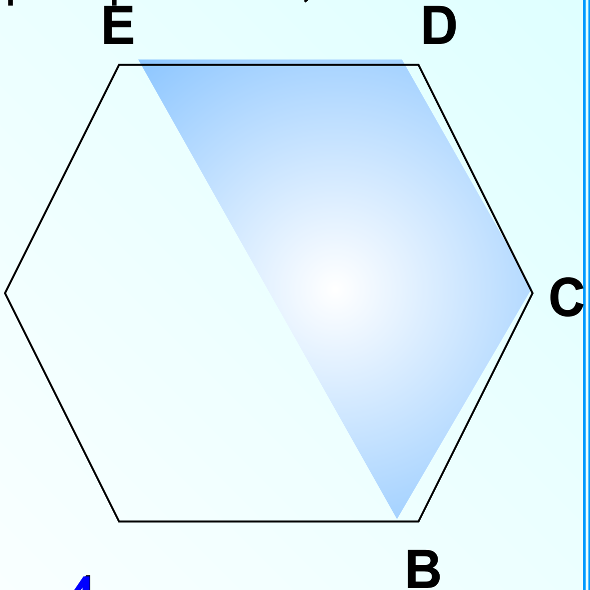
$$S_{ABC} = 1$$

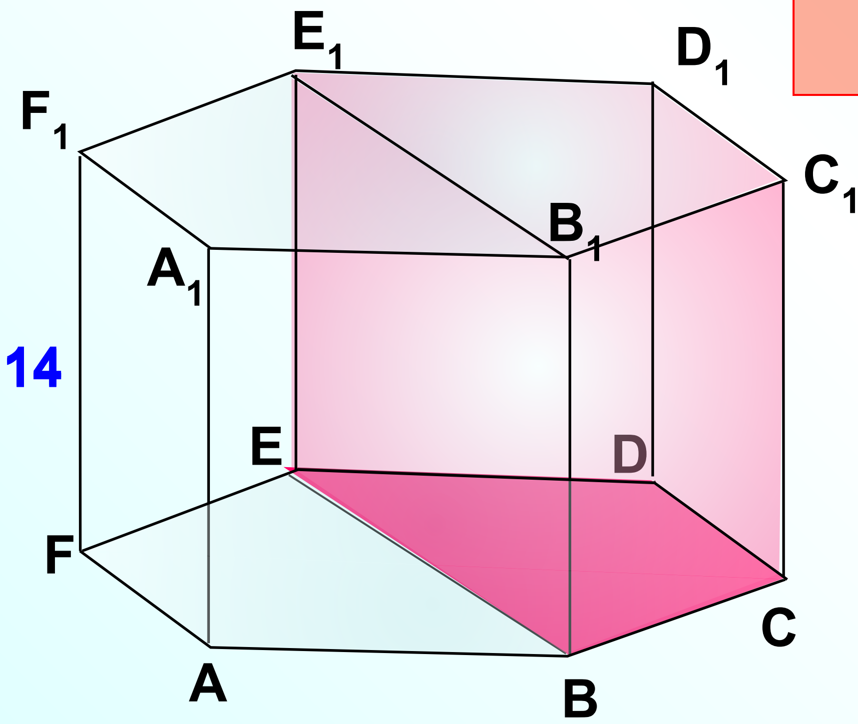
В 11	1					

3. Найдите объем многогранника, вершин… точки B, C, D, E, B_1, C_1, D_1, E_1, правильной … $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основани… боковое ребро равно 14.

Площадь трапеции BCDE равна половине площади 6-угольника.

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{о}}h$$





$$S_{BCDE} = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$$

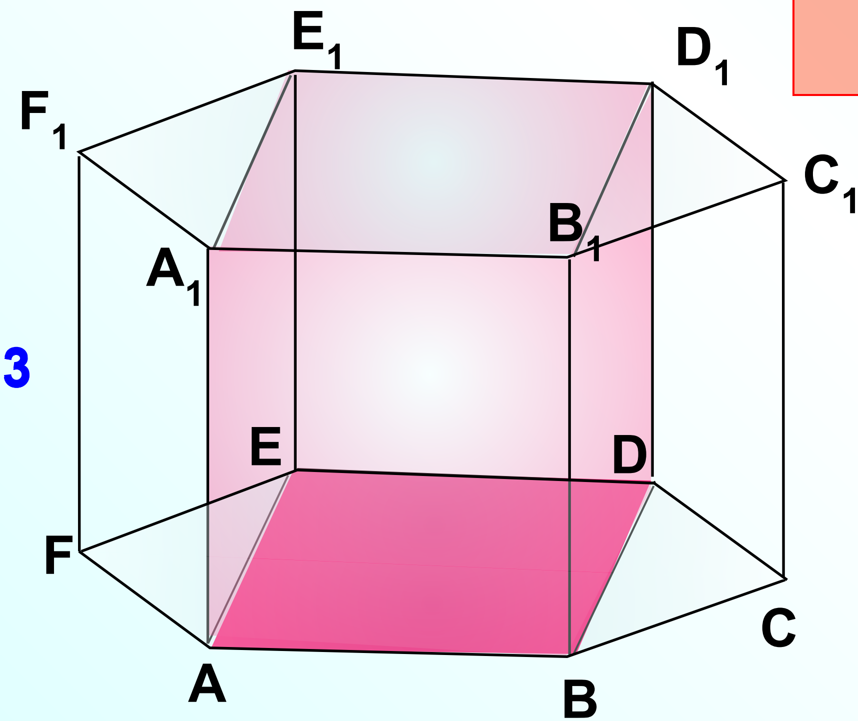
$$V_{\text{пр.}} = 4\cdot 14 = 56$$

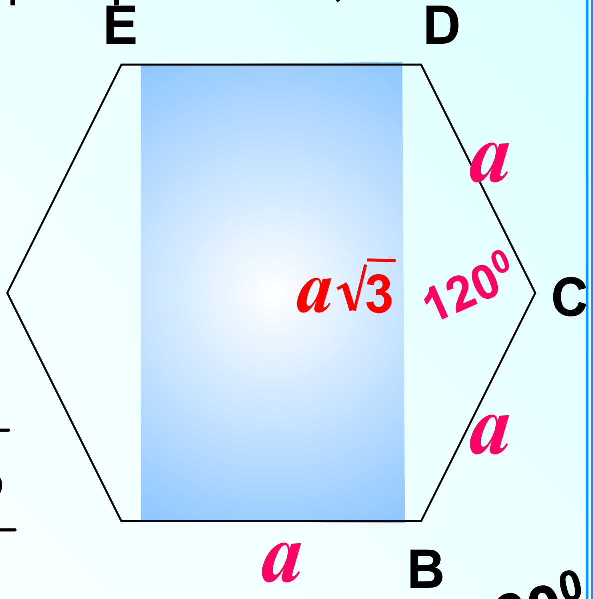
В 11 | 5 | 6

4. Найдите объем многогранника, вершинами являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1, правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 14, а боковое ребро равно 3.

Найдем площадь 6-угольника и прямоугольника.

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{о}} h$$





$$S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$BD^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \underbrace{\cos 120^0}_{= -\cos 60^0}$$

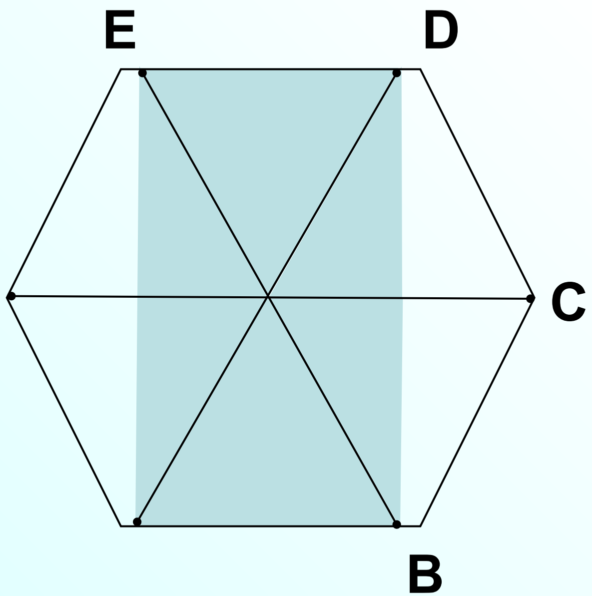
$$BD^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$BD^2 = 3a^2$$

$$BD = a\sqrt{3} \qquad S_{ABDE} = a^2\sqrt{3}$$

$$S_{ABDE} = a^2\sqrt{3} \qquad S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{ABDE}}{S_6} = a^2\sqrt{3} : \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{2}{3}$$



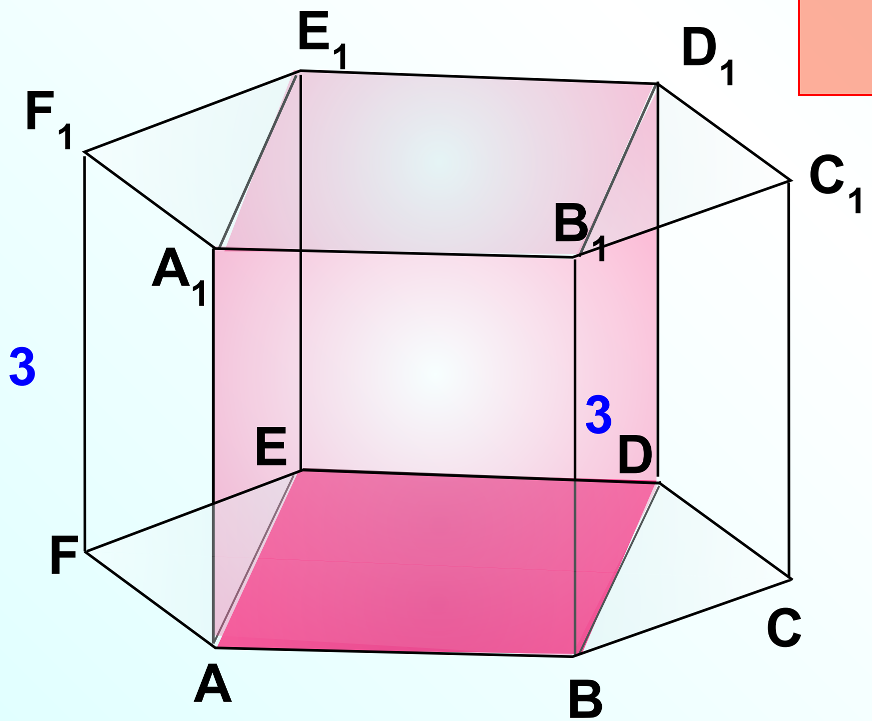
Найдем, какую часть составляет площадь прямоугольника ABCD от всего 6-угольника.

Найти это отношение можно исследуя геометрический чертеж, а не вычисляя площади.

Шестиугольник – 6 треугольников. Прямоугольник содержит 4 таких же треугольника.

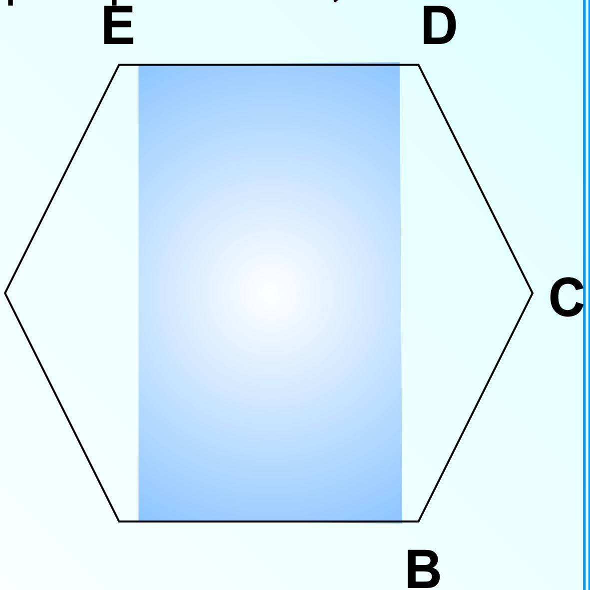
$$\frac{S_{ABDE}}{S_6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E_1, правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна **14**, а боковое ребро равно 3.



$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{о}} h$$

3



$$\frac{S_{ABCD}}{S_6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{14} = \frac{2}{3}$$

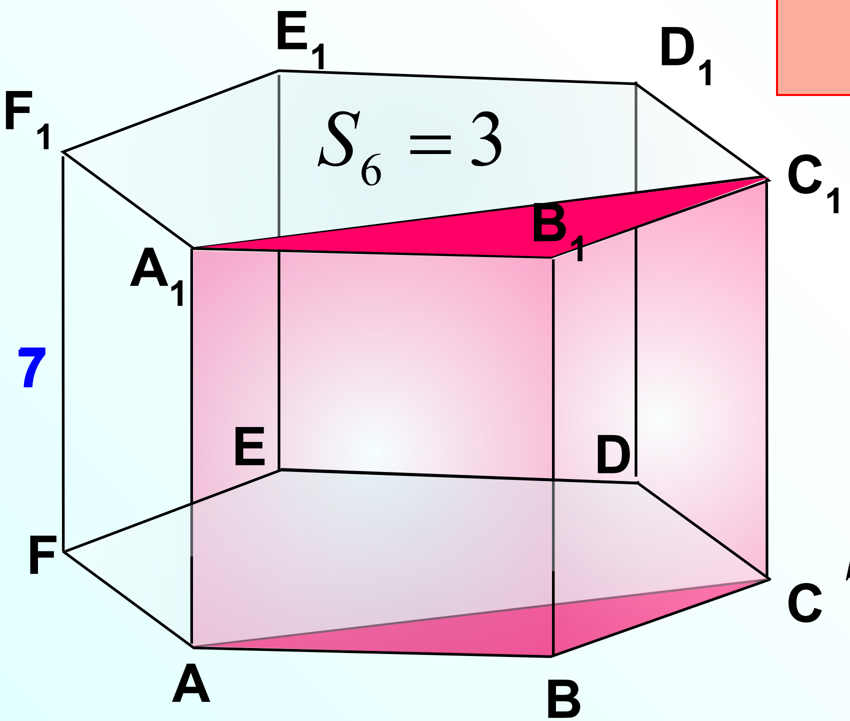
$$S_{ABCD} = \frac{28}{3} \qquad V_{пр.} = \frac{28}{3} \cdot 3 = 28$$

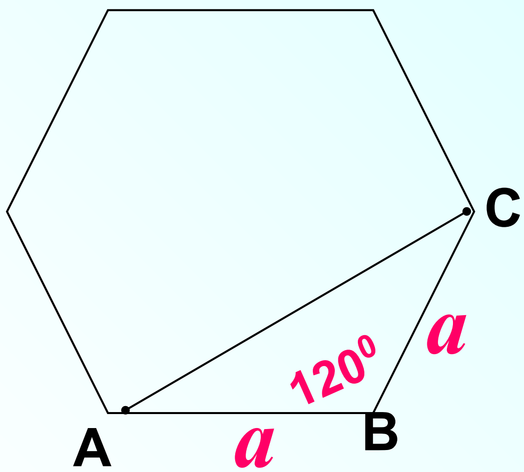
В 11	2	8				

5. Найдите объем многогранника, вершинами к
точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиуголь
$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания кото
боковое ребро равно 7.

Найдем площадь треугольника ABC и площадь 6-угольника.

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{о}} h$$





=sin60⁰

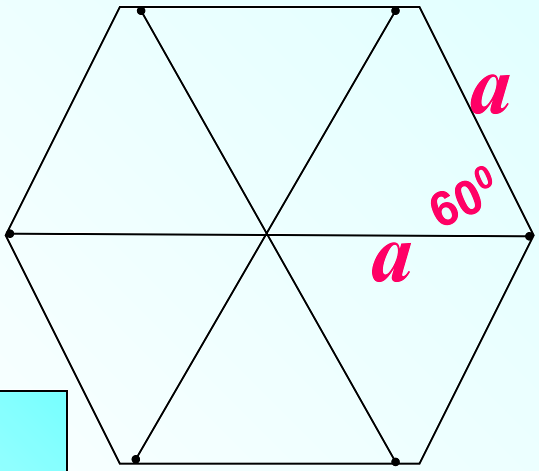
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^0$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$S_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^0 \quad = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Вычислить площадь правильного 6-угольника можно разбив его на 6 треугольников.



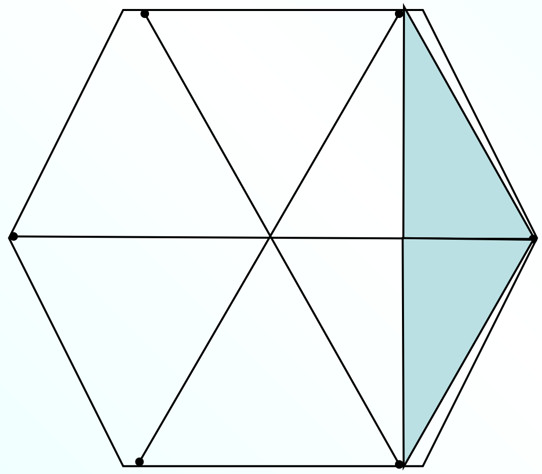
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

Найдем, какую часть составляет площадь треугольника АВС от всего 6-угольника.

$$\frac{S_{ABC}}{S_6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} : \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{6}$$

Значит, площадь треугольника АВС в 6 раз меньше площади шестиугольника.

5.

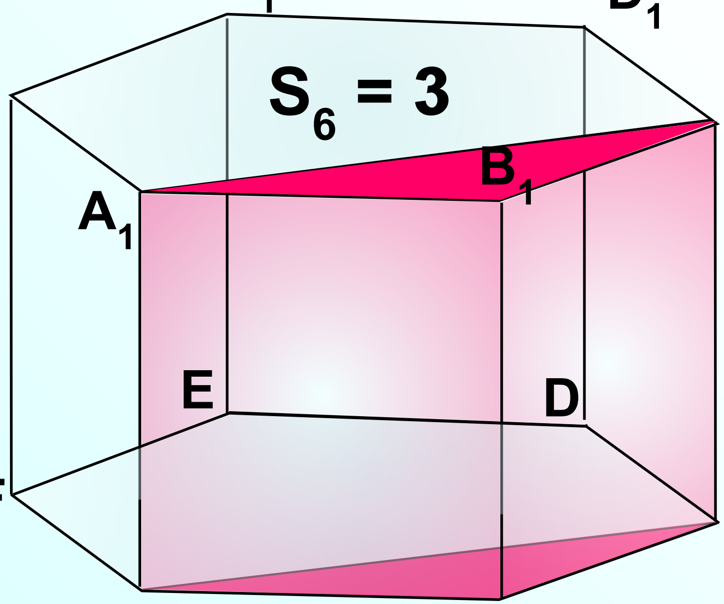


Найти это отношение можно исследуя геометрический чертеж, а не вычисляя площади.

Шестиугольник – 6 треугольников. Треугольник ABC содержит 1 такой треугольник.

$$\frac{S_{ABC}}{S_6} = \frac{1}{6}$$

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{о}} h$$



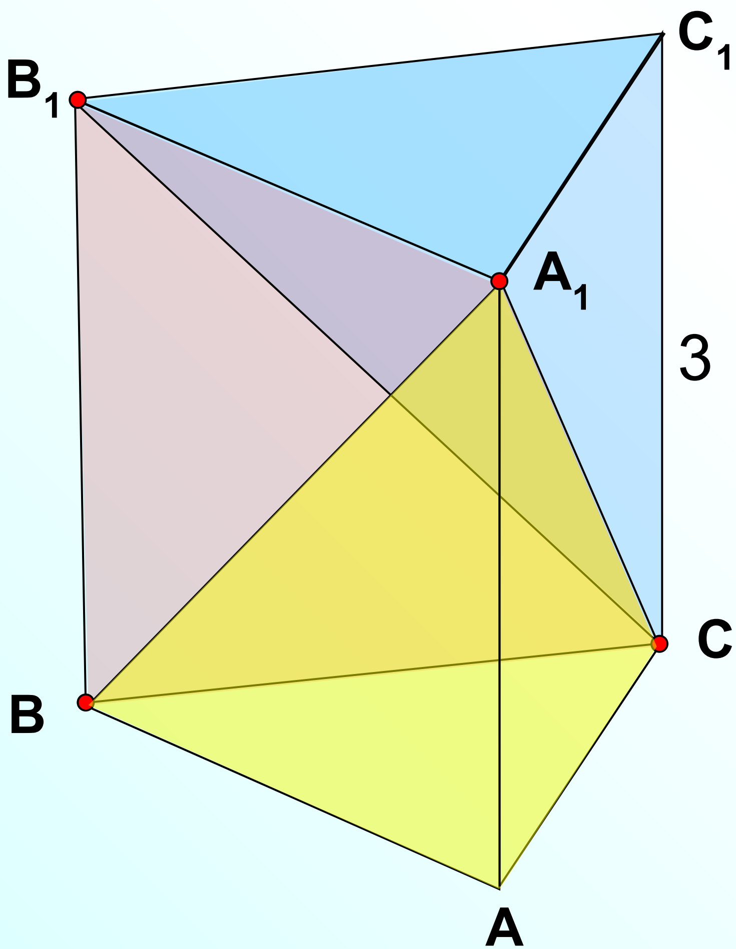
$$\frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$V_{np.} = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}$$

В 11	3	,	5			

6. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, B, C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



Искомый объем можно рассмотреть как разность объема треугольной призмы и двух пирамид.

$$V_{A_1BB_1C} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{ABCA_1} - V_{A_1B_1C_1C}$$

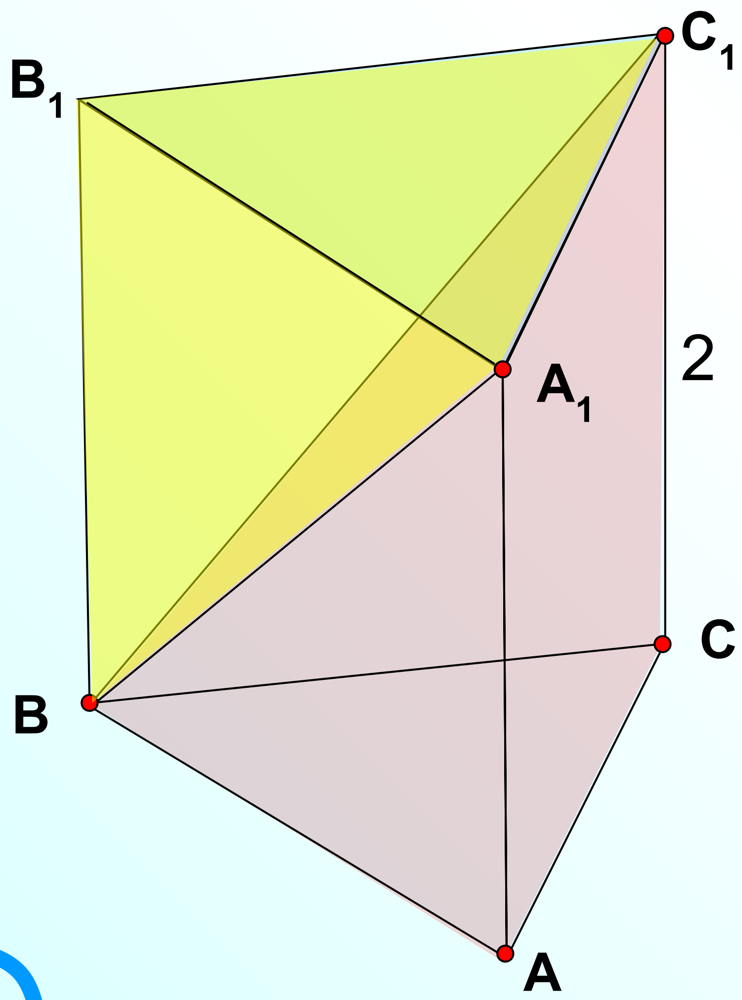
$$= S_{ABC} \cdot H - \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H - \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot H$$

$$= 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 12 - 4 - 4$$

В 11	4					

7. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



Искомый объем можно рассмотреть как разность объема треугольной призмы и пирамиды $A_1B_1C_1B$.

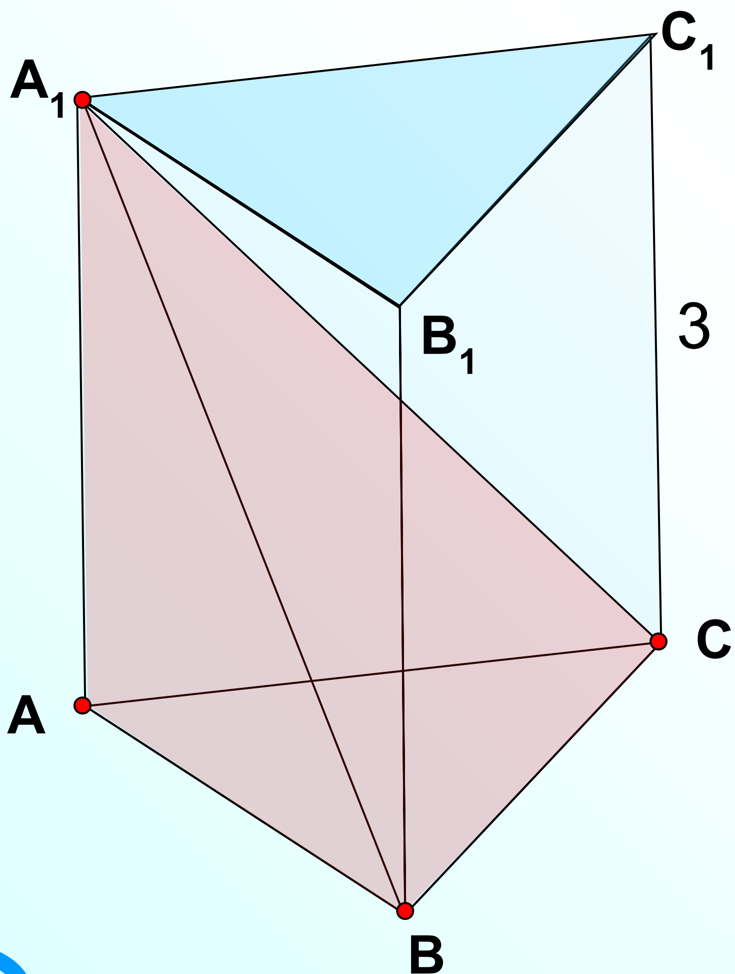
$$V_{ABCA_1C_1} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{A_1B_1C_1B}$$

$$= S_{ABC} \cdot H - \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot H$$

$$= 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 6 - 2$$

В 11	**4**					

8. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

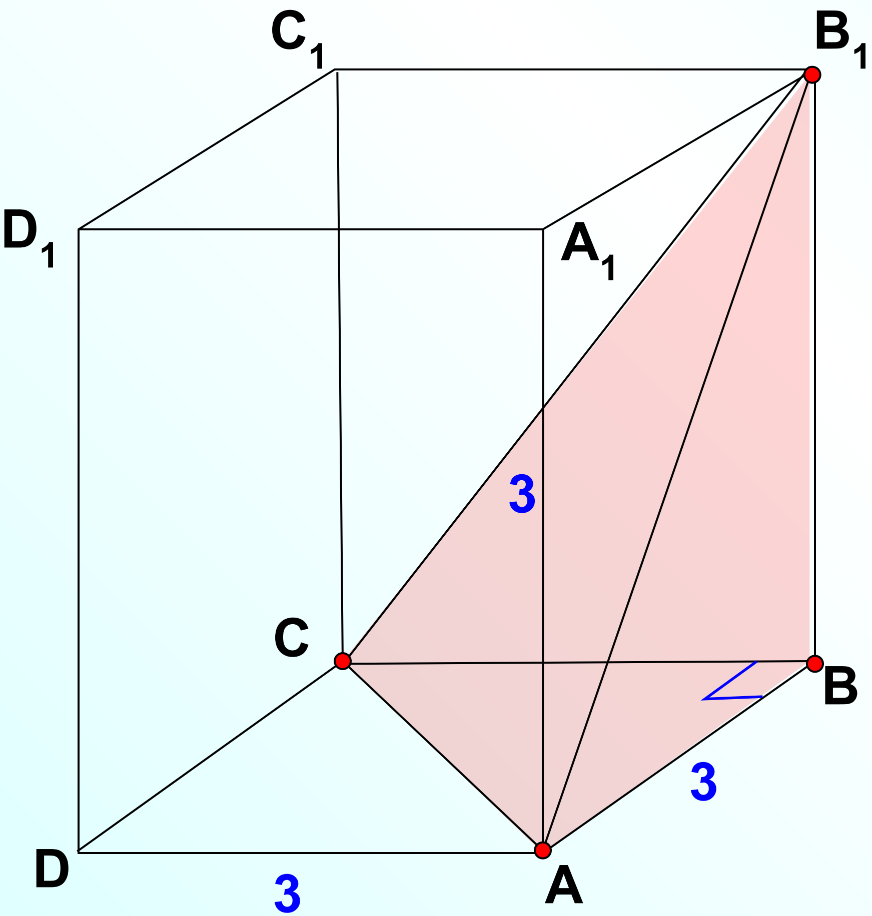


$$V_{ABCA_1} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$$

$$V_{ABCA_1} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

B 11 | 2

9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=3, AD=3, AA_1=3.



$$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab$$

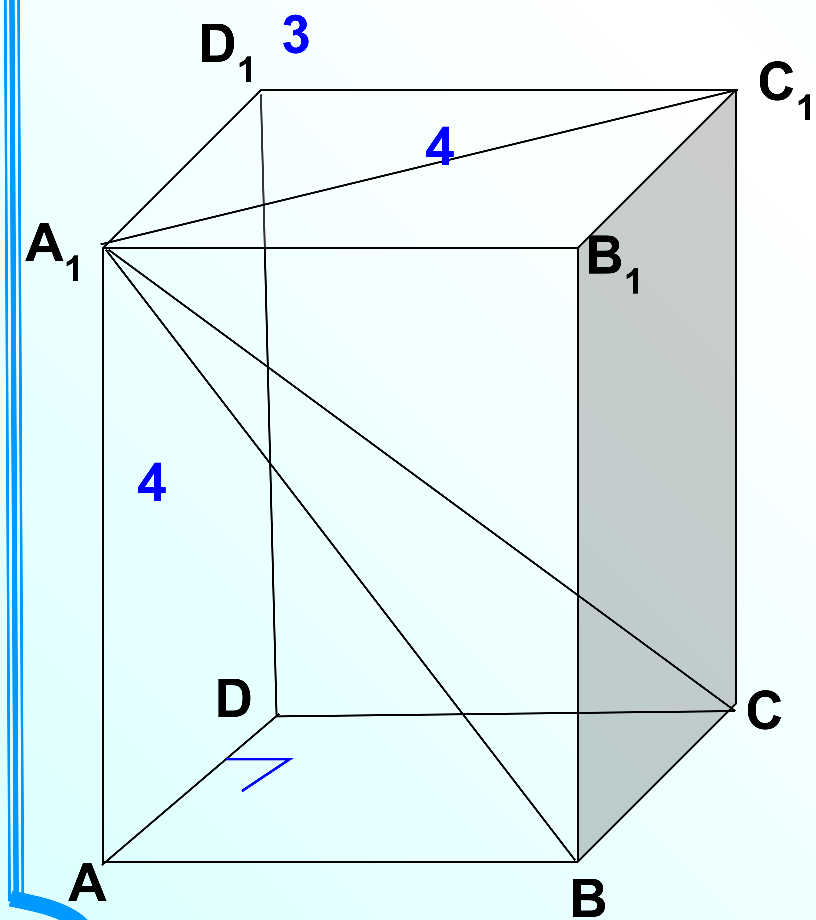
$$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3}_{S_{\Delta}} \cdot 3$$

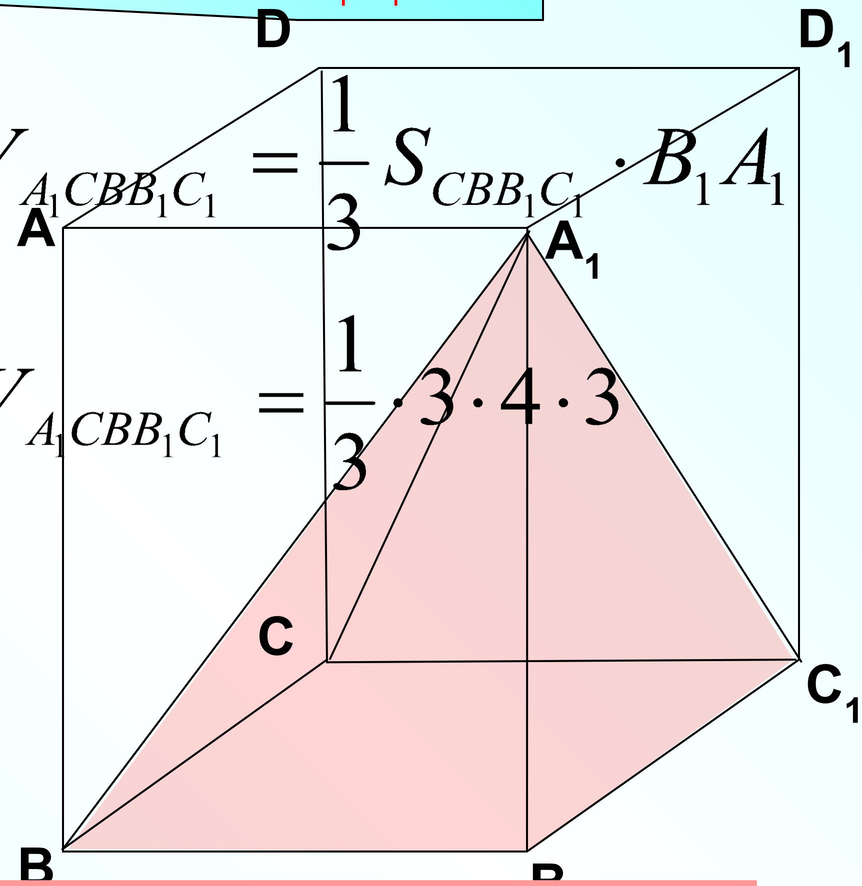
$$V_{ABCB_1} = \frac{9}{2}$$

В 11	4	,	5			

10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B, C, C_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=4$.

Получилась четырехугольная пирамида с основанием CBB_1C_1.
Мне хочется опрокинуть параллелепипед на грань CBB_1C_1.





$$V_{A_1CBB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{CBB_1C_1} \cdot B_1A_1$$

$$V_{A_1CBB_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$$

В 11 | 1 2

11. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, B_1, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=5, AD=3, AA_1=4.

Неудобный чертеж, т.к. не совсем ясен вид отсеченного многогранника. Мне хочется опрокинуть параллелепипед на грань ABB_1A_1.

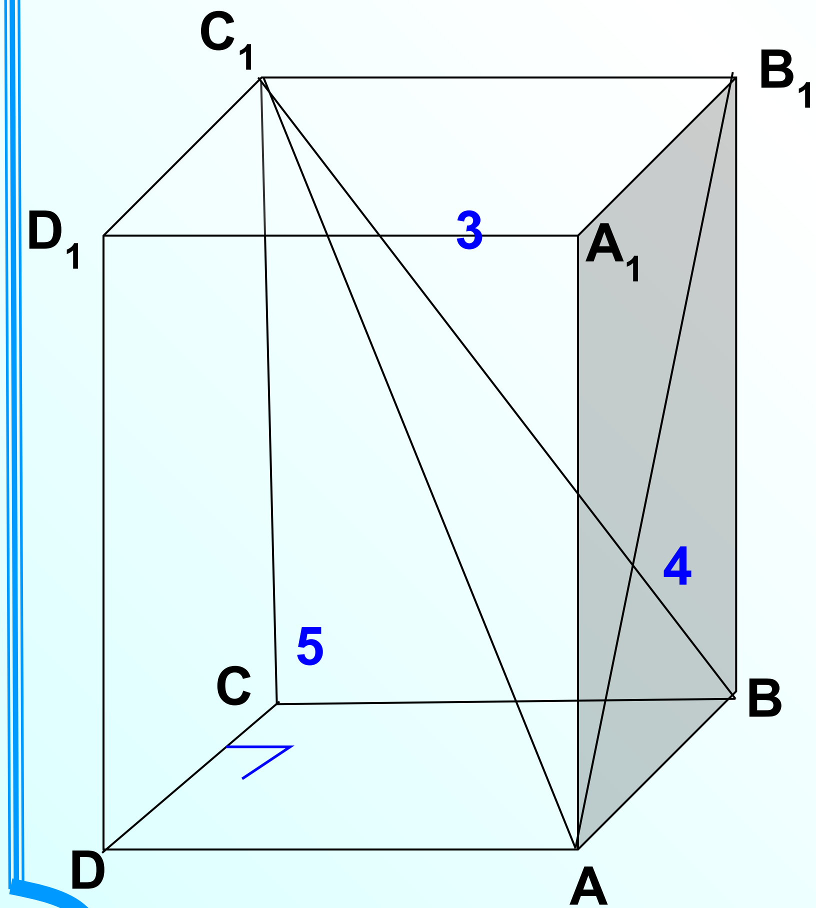
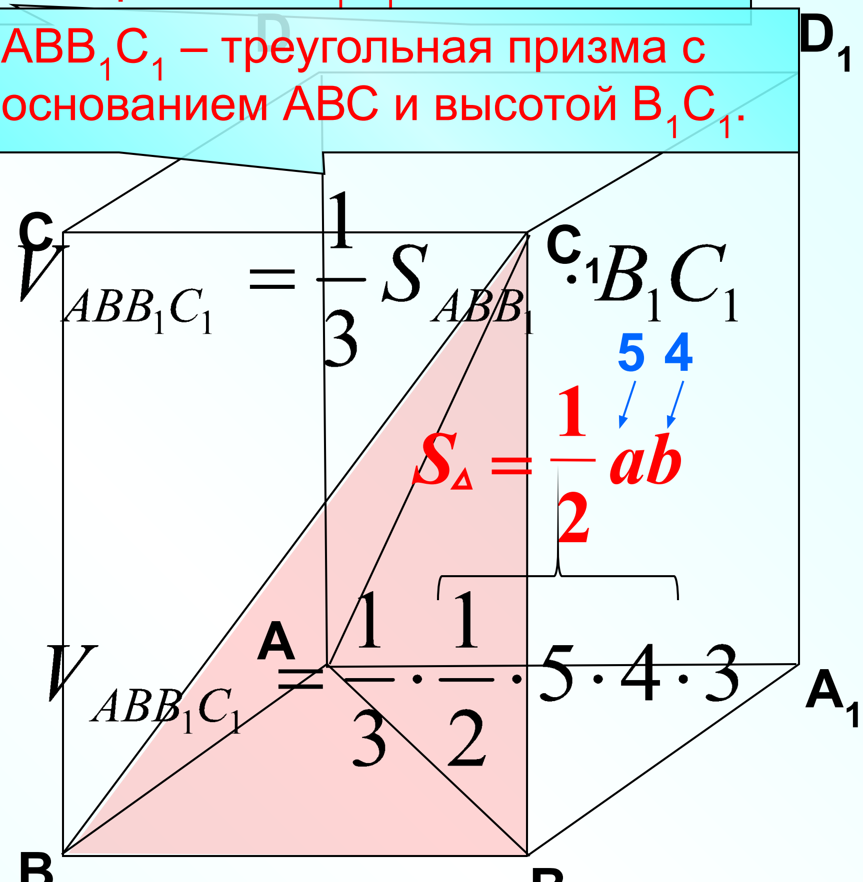


ABB_1C_1 – треугольная призма с основанием ABC и высотой B_1C_1.



$$V_{ABB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{ABB_1} \cdot B_1C_1$$

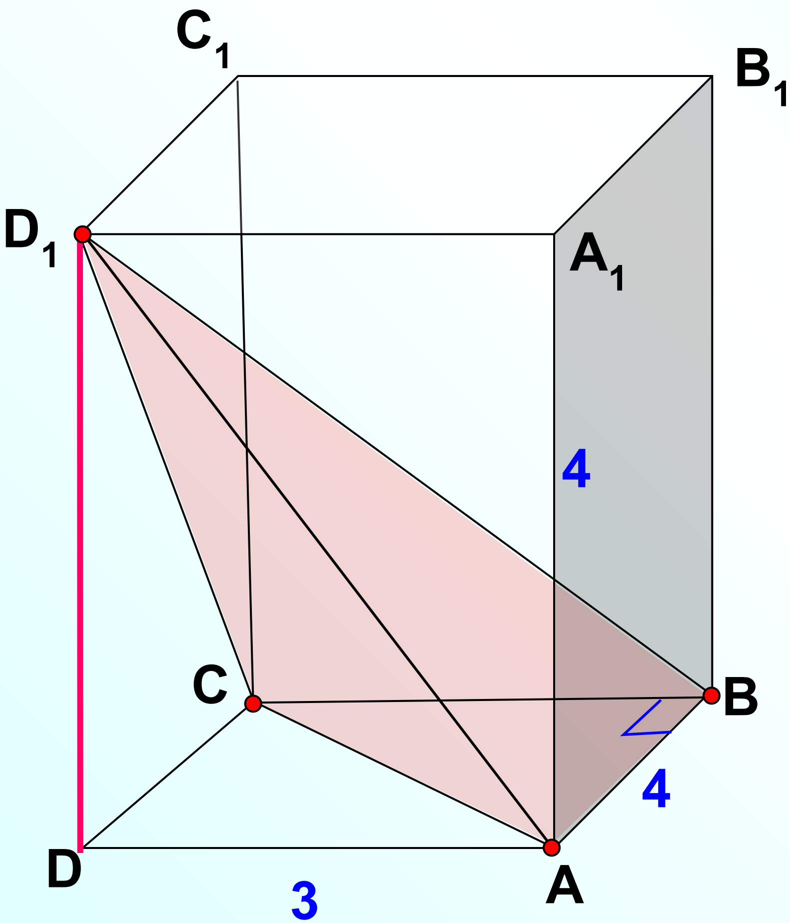
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab$$

5 4

$$V_{ABB_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

В 11 | 1 | 0

12. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=4, AD=3, AA_1=4.



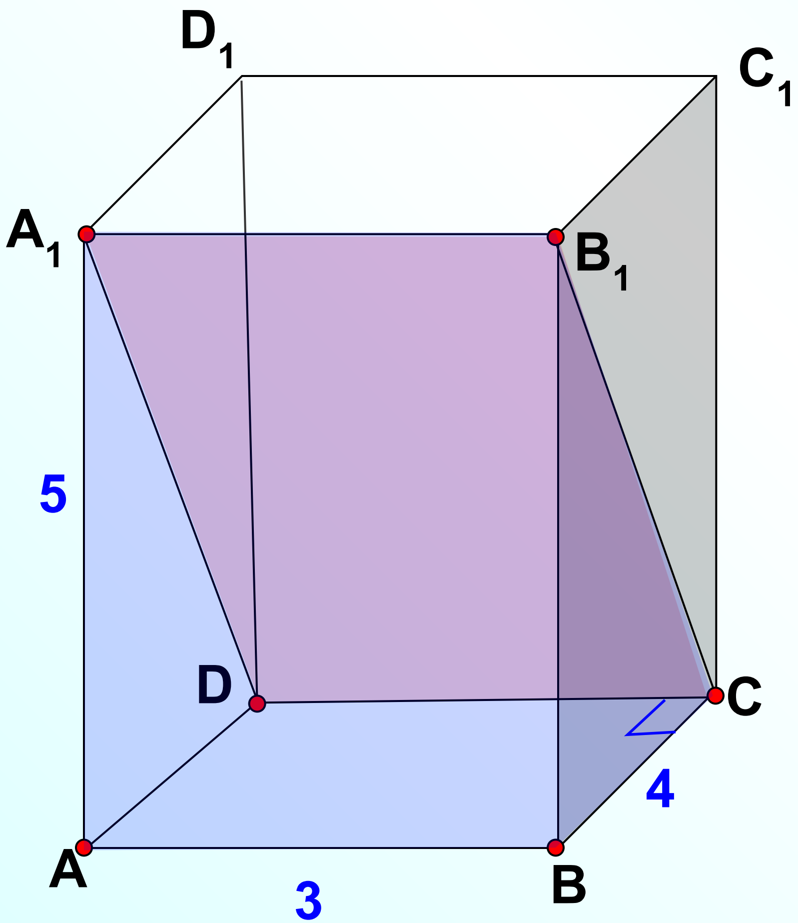
$$V_{ABCD_1} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DD_1$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab$$

$$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4}_{S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab} \cdot 4$$

В 11 | 8

13. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AB=3, AD=4, AA_1=5.



Диагональное сечение делит параллелепипед на два равных многогранника. Равные фигуры имеют равные объемы.

$$V_{ABCDB_1A_1} = \frac{1}{2} V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$$

$$V_{ABCDB_1A_1} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$$

B 11	3	0				