Лекция Вычислительная механика

Аппроксимация дифференциальных операторов

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64

Обыкновенные дифференциальные уравнения

- задачи химической кинетики,
- электрических цепей,
- движение систем взаимодействующих материальных точек
- и другие задачи физики, химии, техники

Дифференциальные уравнения в частных производных

- задачи математической физики,
- гидродинамики,
- акустики
- и других областей знаний.

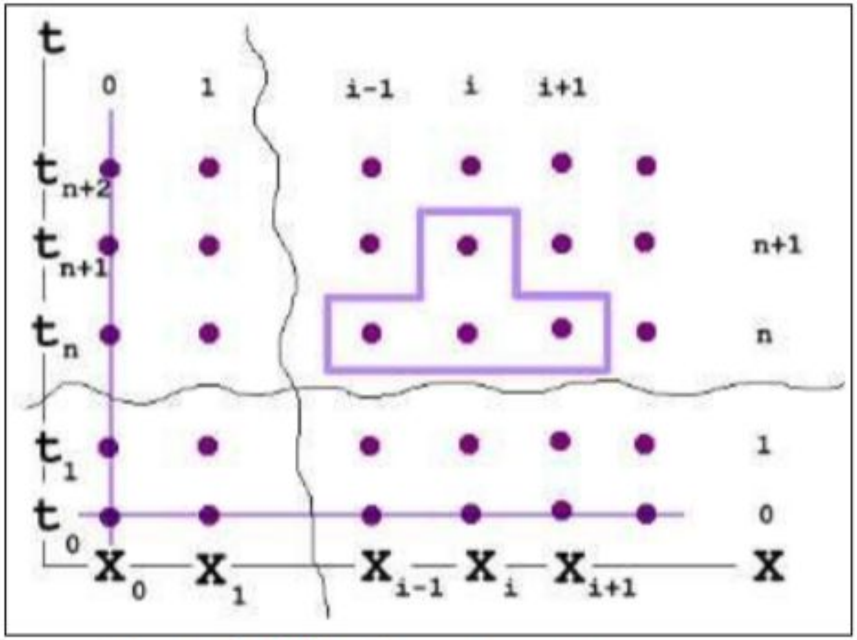
Решение дифференциальных уравнений

аналитические

- точные – методы позволяют выразить решение дифференциальных уравнений через элементарные функции (в аналитическом виде);
- приближенные – методы, в которых решение получается как предел некоторой последовательности, члены которой выражаются через элементарные функции.

численные

-численные методы не позволяют найти точное решение дифференциальных уравнений в аналитической форме. С их помощью получается таблица приближенных (иногда точных) значений искомого решения в некоторых точках рассматриваемой области решения, именуемых сеткой. В силу этого численные методы называют иначе разностными методами или **методами сеток**.



Суть метода сеток заключается в покрытии расчетной области (x,t) сеткой из $I \times N$ точек (см. рис), что определит шаги по времени и пространству.

Сеткой определяются узлы, в которых будет осуществляться поиск решения.

Далее необходимо заменить дифференциальные уравнения в частных производных (уравнение диффузии, уравнение теплопроводности и др.) аппроксимирующими их уравнениями в конечных разностях, выписав соответствующие разностные уравнения для каждого (i,n)-го узла сетки.

Понятие разностной схемы

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in V, \\ lu(x) = \varphi(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Совокупность разностных уравнений, построенных на сетке и аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение на V и краевые условия на Γ, называется **разностной схемой.**

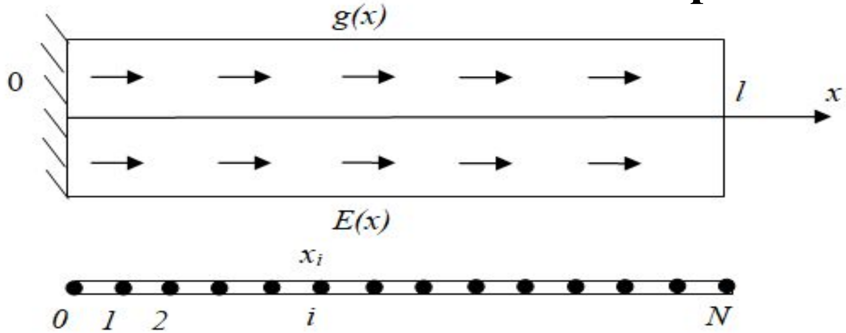
$$\begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ l_h u_h = \varphi_h. \end{cases}$$

$$\boxed{L_h \sim L \quad l_h \sim l \quad u_h \sim u \quad f_h \quad \varphi_h}$$

конечные разности на сетке

Таким образом, вместо поиска непрерывных зависимостей *u(x)* реализация разностной схемы позволяет отыскать значения функции в узлах сетки. Ее поведение в промежутках между узлами может быть получено при помощи построения какой-либо интерполяции.

Построение разностной схемы



$$\overline{\omega}=\left\{x_i=ih,\quad i=\overline{1,N},\quad h=l/N\right\}$$

Конечно-разностная схема называется устойчивой, если малым изменениям входных данных соответствует малое изменение решения.

Если р.с. устойчива и аппроксимирует исходную краевую задачу с порядком *n,* то она сходиться, причем скорость сходимости равна порядку аппроксимации.

$$\left\|u-u_h\right\|\underset{h\to 0}{\to} 0$$

$$E\frac{d^2u_x}{dx^2}+\rho g\left(x\right)=0$$

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=0}=0, \\ E\dfrac{du_x}{dx}\Big|_{x=l}=0. \end{cases}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}u_{i-1}-\dfrac{2}{h^2}u_i+\dfrac{1}{h^2}u_{i+1}=-\dfrac{\rho}{E}g_i, \qquad i=\overline{1,N-1}, \\ u_1=0, \\ -u_{N-1}+u_N=0. \end{cases}$$

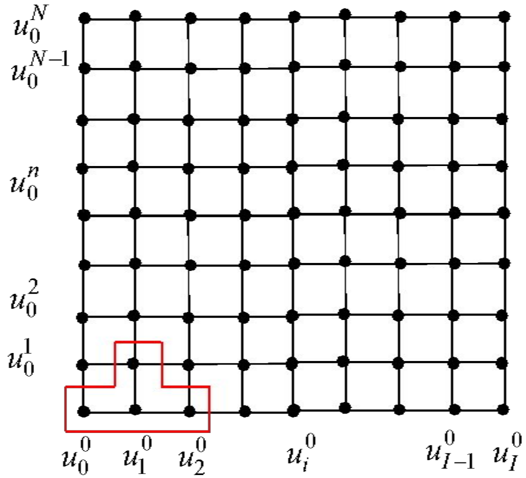
конечно-разностная схема

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_0-2u_1+u_2=-\dfrac{\rho h^2}{E}g_1 \\ u_1-2u_2+u_3=-\dfrac{\rho h^2}{E}g_2 \\ u_2-2u_3+u_4=-\dfrac{\rho h^2}{E}g_3 \\ \vdots \\ u_{N-3}-2u_{N-2}+u_{N-1}=-\dfrac{\rho h^2}{E}g_{N-2} \\ u_{N-2}-2u_{N-1}+u_N=-\dfrac{\rho h^2}{E}g_{N-1} \\ -u_{N-1}+u_N=0 \end{cases}$$

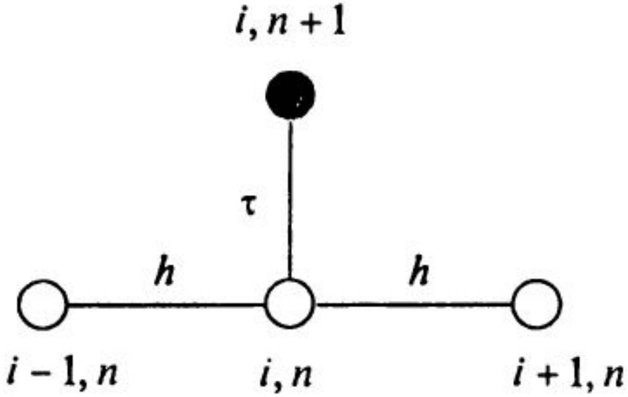
$$\left[A\right]\cdot\left\{u\right\}=\left\{F\right\}$$

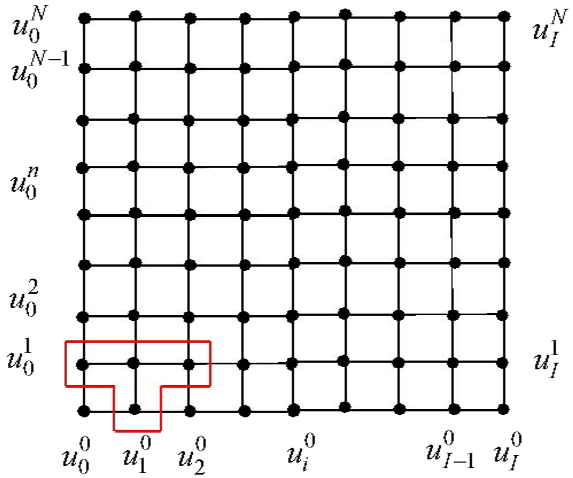
$$u=\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{Bmatrix}
\qquad
F=\begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\rho h^2}{E}g_1 \\ -\dfrac{\rho h^2}{E}g_2 \\ -\dfrac{\rho h^2}{E}g_3 \\ \vdots \\ -\dfrac{\rho h^2}{E}g_{N-2} \\ -\dfrac{\rho h^2}{E}g_{N-1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

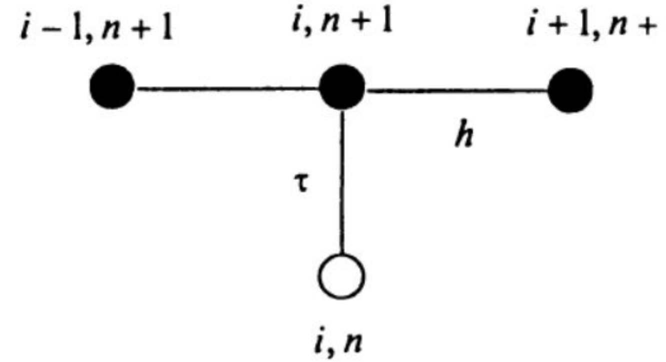


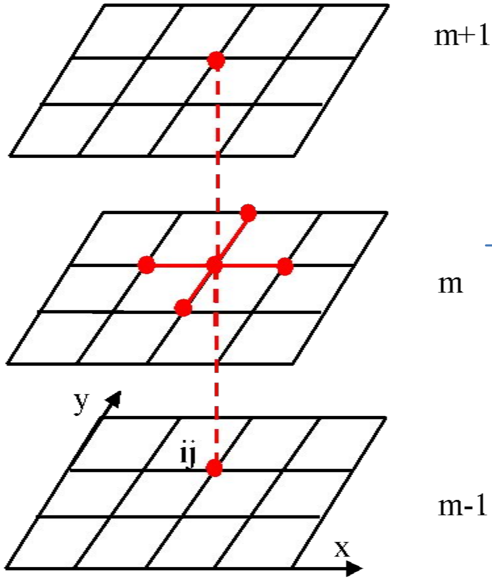
Явная разностная схема





Неявная разностная схема





МКР для многомерных задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \dfrac{1}{\rho c} q(x,y,t) \qquad x \in [0;l_x] \quad y \in [0;l_y] \quad t \in [0;T] \\ \begin{cases} u(x;y;0) = u_0(x;y), \\ u(0;y;t) = \varphi_1(y,t); \quad u(l_x;y;t) = \varphi_2(y,t); \quad u(x;0;t) = \varphi_3(x,t); \quad u(x;l_y;t) = \varphi_4(x,t). \end{cases} \end{cases}$$

Вводим сетку

$$\omega = \begin{Bmatrix} x_i = (i-1)h_x, \quad i = \overline{1,N_x}, & h_x = l_x/(N_x-1), \\ y_j = (j-1)h_y, \quad j = \overline{1,N_y}, & h_y = l_y/(N_y-1), \\ t_m = (m-1)\tau, \quad m = \overline{1,N_t}, & \tau = T/(N_m-1). \end{Bmatrix}$$

$$u_{t,ij}^m = \sigma a^2 \Lambda u_{ij}^{m+1} + (1-\sigma)a^2 \Lambda u_{ij}^m + \frac{1}{\rho c} q_{ij}^m$$

$$u_{t,ij}^m = \frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{\tau}$$

$$\Lambda u_{ij}^{m+1} = u_{xx,ij}^{m+1} + u_{yy,ij}^{m+1} = \frac{u_{i+1j}^{m+1} - 2u_{ij}^{m+1} + u_{i-1j}^{m+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{m+1} - 2u_{ij}^{m+1} + u_{ij-1}^{m+1}}{h_y^2}$$

+ граничные и начальные условия

$$\begin{cases} u_{ij}^1 = u_{0,ij}; \\ u_{1j}^m = \varphi_{1j}^m; \qquad u_{N_x j}^m = \varphi_{2j}^m; \qquad u_{i1}^m = \varphi_{3,i}^m; \qquad u_{iN_y}^m = \varphi_{4,i}^m. \end{cases}$$

Условие устойчивости

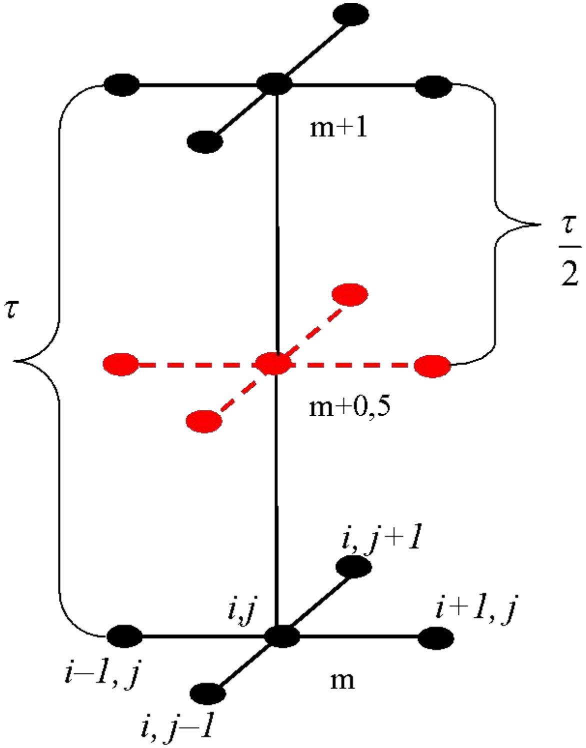
$$\tau \le \frac{1}{(2-4\sigma)\left(1/h_x^2 + 1/h_y^2\right)} \qquad 0 \le \sigma < 0,5$$

Сходимость

$$O\left(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2\right) \qquad \sigma = 0,5$$

$$O\left(\tau + h_x^2 + h_y^2\right) \qquad \text{иначе}$$

Метод переменных направлений



$$\begin{cases} \dfrac{u^{m+0,5}_{i,j} - u^{m}_{i,j}}{0,5\tau} = u^{m+0,5}_{\bar{x}\overset{+}{x},i,j} + u^{m}_{\bar{y}\overset{+}{y},i,j} + f^{m}_{i,j} \\ \dfrac{u^{m+1}_{i,j} - u^{m+0,5}_{i,j}}{0,5\tau} = u^{m+0,5}_{\bar{x}\overset{+}{x},i,j} + u^{m+1}_{\bar{y}\overset{+}{y},i,j} + f^{m}_{i,j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u^{m+0,5}_{i,j} - u^{m}_{i,j}}{0,5\tau} = \dfrac{u^{m+0,5}_{i+1,j} - 2u^{m+0,5}_{i,j} + u^{m+0,5}_{i-1,j}}{h_1^2} + \dfrac{u^{m}_{i,j+1} - 2u^{m}_{i,j} + u^{m}_{i,j-1}}{h_2^2} + f^{m}_{i,j} \qquad (*) \\ \dfrac{u^{m+1}_{i,j} - u^{m+0,5}_{i,j}}{0,5\tau} = \dfrac{u^{m+0,5}_{i+1,j} - 2u^{m+0,5}_{i,j} + u^{m+0,5}_{i-1,j}}{h_1^2} + \dfrac{u^{m+1}_{i,j+1} - 2u^{m+1}_{i,j} + u^{m+1}_{i,j-1}}{h_2^2} + f^{m}_{i,j} \qquad (**) \end{cases}$$