Поверхности второго порядка

Однополостный и двуполостный гиперболоид

Общее уравнение поверхности второго порядка

x, y, z – координаты точек поверхности

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, \ldots$ – действительные числа.

Матричный вид уравнения поверхности второго порядка

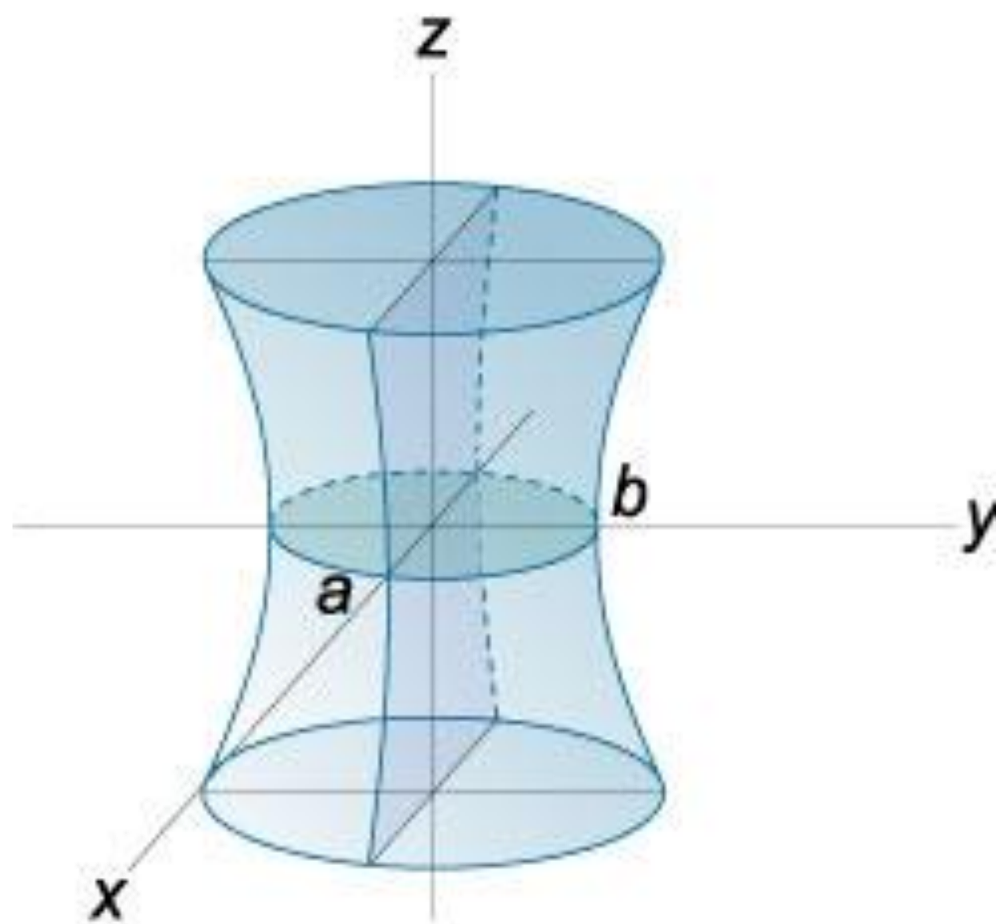
$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

a и b — действительные полуоси

c — мнимая полуось



Свойства однополостного гиперболоида:

1. Однополостный гиперболоид - неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $Z \in (-\infty, +\infty)$

2. Однополостный гиперболоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;

- осевой симметрией относительно всех координатных осей;

- плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.

3. В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат , получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям или - гипербола. (Рис.4) Вывод уравнений для линий сечения аналогичен рассмотренным ранее случаям

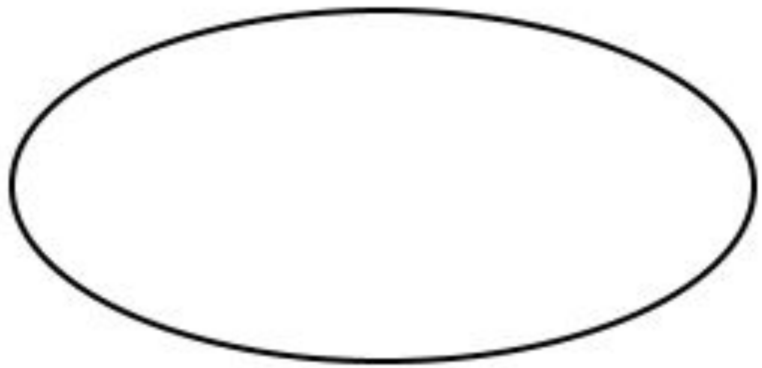


Рис. 4

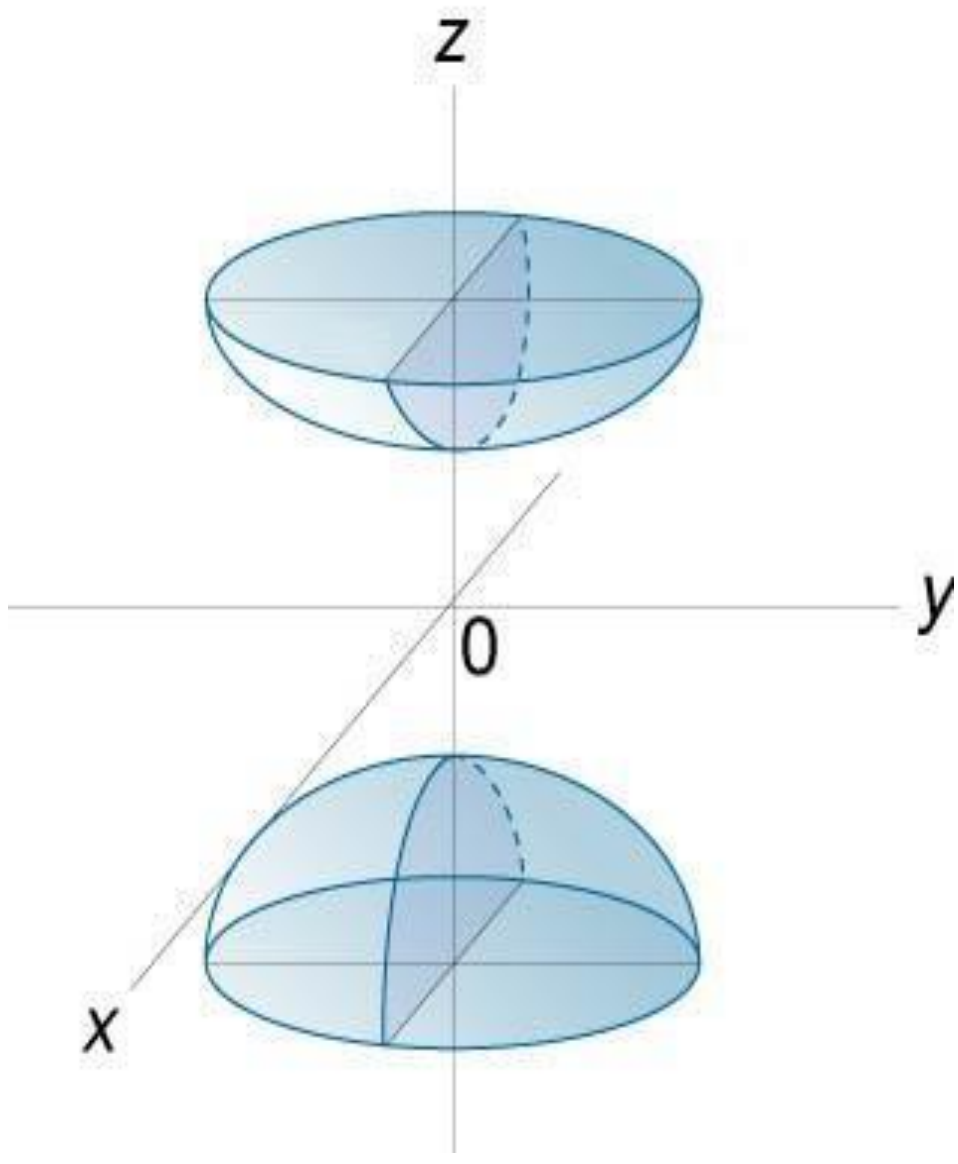
уравнение линии сечения

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a, b и c >0



Свойства двуполостного гиперболоида:

1. Двуполостный гиперболоид - неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что и не ограничен сверху
2. Двуполостный гиперболоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;

- осевой симметрией относительно всех координатных осей;

- В сечении двуполостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат Ox, при $|x|>a$ получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Oz или Oy - гипербола.

Сделал презентацию Халилов Илья Викторович
ИС 151