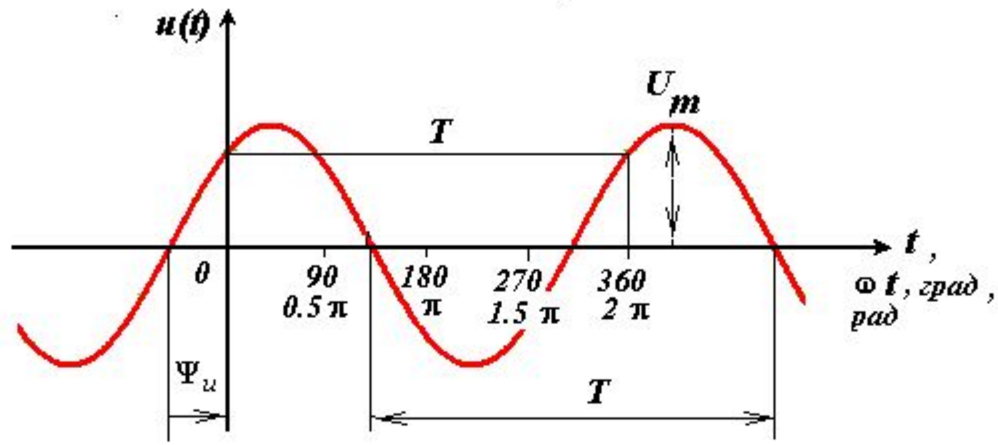
Гармонические колебания и их параметры

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \qquad u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$



амплитуда – U_m I_m

частота - ω

фаза - $\omega t + \psi$

начальная фаза - ψ

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $рад/с$ $\quad f = \dfrac{1}{T}$ Гц $\quad \omega = 2\pi \cdot f \quad I = I_m/\sqrt{2} \quad U = U_m/\sqrt{2}$

I , U - действующие значения тока и напряжения

Пример $\quad u(t) = 1{,}41\sin\left(2\pi \cdot 10^6 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$U_m = 1.41$ *В* $\quad \omega = 2\pi \cdot 10^6\ рад/с \quad \psi_u = \dfrac{\pi}{2} \quad U = U_m/\sqrt{2} = 1$ *В*

f = 2π/ω=10^6 Гц $\qquad$ *T = 1/f = 10^{-6} сек.*

Представление гармонических колебаний комплексными числами

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \mathrm{Im}(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}) = \mathrm{Im}(U_m \cos(\omega t + \psi_u) + jU_m \sin(\omega t + \psi_u))$$

комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$$

комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$

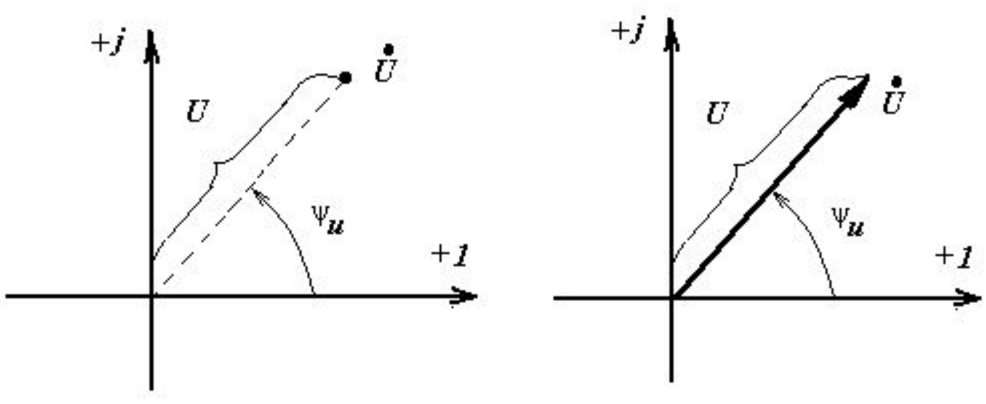
$$U_m \sin(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow U_m e^{j\psi_u}$$

Комплекс действующего значения напряжения и тока

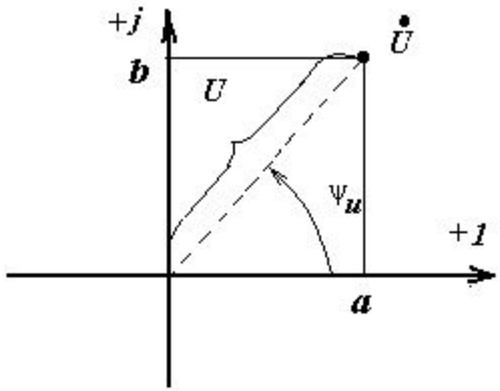
$$\dot{U} = U e^{j\psi_u}$$

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}$$

изображение на комплексной плоскости по координатам в полярной системе координат



Комплексы в декартовой системе координат



$$\dot{U} = a + jb$$

$$a = U\cos\psi_u \quad b = U\sin\psi_u$$

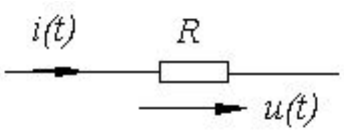
$$U = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \psi_u = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Идеализированные пассивные элементы

$$R \quad L \quad C$$

в режиме воздействия на них гармонического колебания

электрическое сопротивление R



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \qquad \dot{I} = Ie^{j\psi_i}$$

$$u(t) = i(t) \cdot R = I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\dot{U} = R \cdot \dot{I} \qquad U = R \cdot I$$

$$\psi_u = \psi_i \qquad \varphi = \psi_u - \psi_i = 0$$

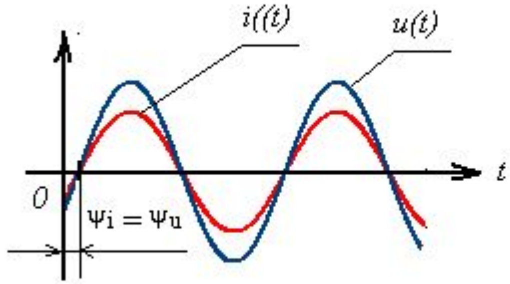
Комплексное сопротивление для электрического сопротивления R

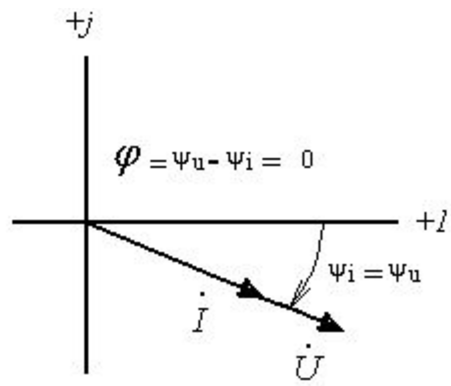
$$\underline{Z}_r = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R$$

Комплексная проводимость

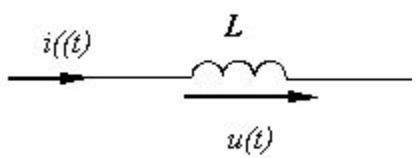
$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{R} = G$$

временная и векторная диаграммы тока и напряжения на элементе R





L



$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_i) = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i + 90^0)$$

$$\dot{U}_m = I_m \omega L e^{j(\Psi_1 + 90^0)} = j\omega L \dot{I}_m$$

$$\dot{U} = I\omega L e^{j(\Psi_1 + 90^0)} = j\omega L \dot{I}$$

$X_L = \omega L$ *индуктивное сопротивление синусоидальному току*

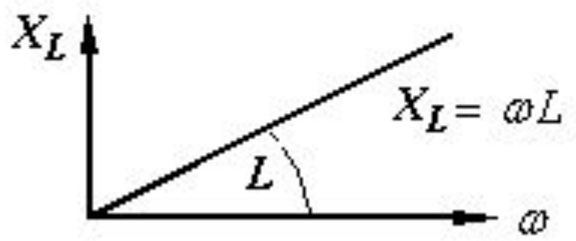
$\underline{Z}_L = jX_L$ *комплексное сопротивление индуктивности*

$\underline{Y}_L = \dfrac{1}{\underline{Z}_L} = -j \cdot b_L$ *комплексная проводимость индуктивности*

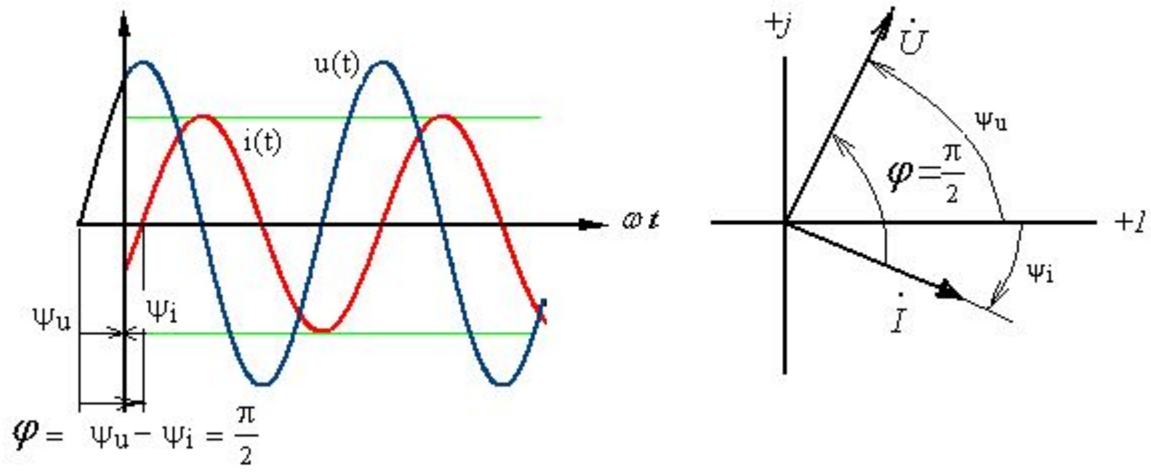
$b_L = \dfrac{1}{X_L} = \dfrac{1}{\omega L}$ *проводимость индуктивности*

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^0$$

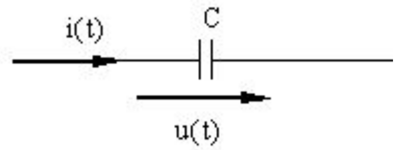
частотная характеристика индуктивного элемента



временная и векторная диаграммы тока и напряжения на индуктивности



емкость C



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{\omega C}\cdot I_m \cdot(-\cos(\omega\cdot t + \psi_i)) = \frac{1}{\omega C}\cdot I_m \cdot \sin(\omega\cdot t + \psi_i - 90^0)$$

$$\dot{U} = \frac{1}{\omega C}\cdot I \cdot e^{j(\psi_i - 90^0)} = -j\cdot\frac{1}{\omega C}\cdot I\cdot e^{j\psi_i} = \dot{I}\cdot\frac{1}{j\omega C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$ *емкостное сопротивление синусоидальному току*

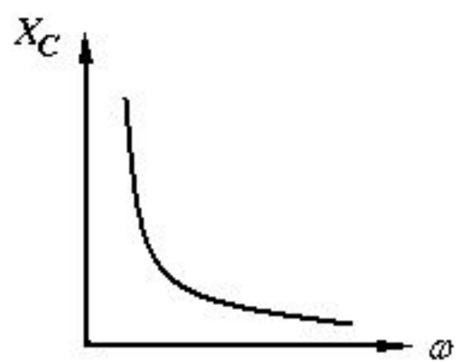
$$\underline{Z}_C = -jX_C$$ *комплексное сопротивление емкости*

$\underline{Y}_C = \dfrac{1}{\underline{Z}_C} = j \cdot b_C$ комплексная проводимость для емкостного элемента

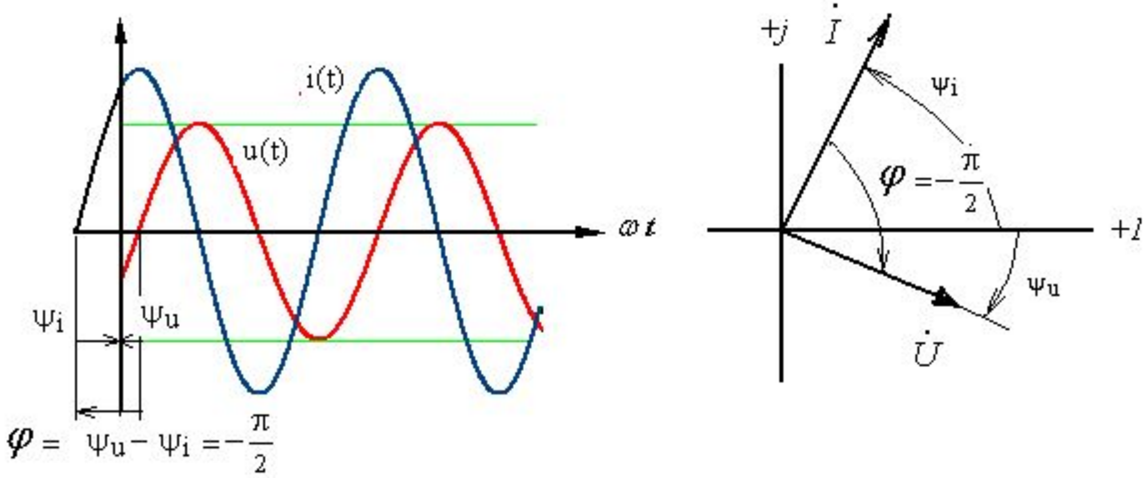
$b_C = \dfrac{1}{X_C} = \omega C$ проводимость емкости

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^0$$

частотная характеристика емкостного элемента



временная и векторная диаграммы тока и напряжения на емкости



первый закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{n} \pm \dot{I}_k = 0$$

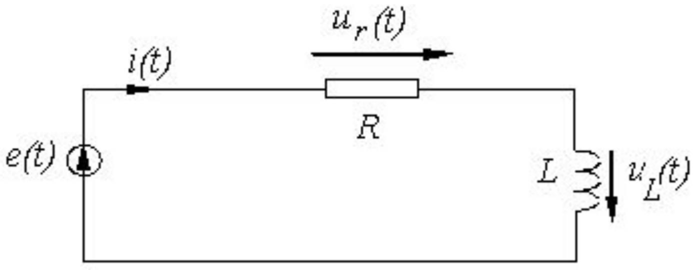
второй закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{n} \pm \dot{U}_k = 0$$

закон Ома в комплексной форме

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{Z}$$

расчет простейших электрических цепей в режиме гармонических колебаний



дано

$R \quad L$

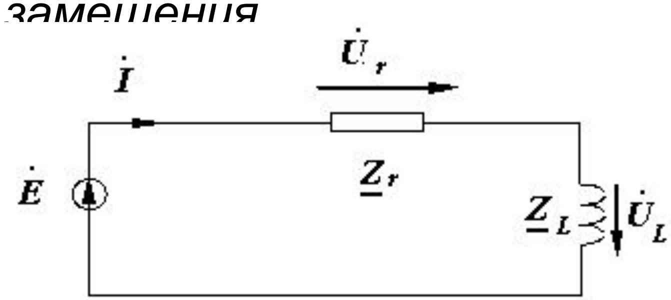
$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

решение

$$\dot{E} = E \cdot e^{j\psi_e} \qquad \underline{Z}_r = R \qquad \underline{Z}_L = j \cdot X_L \qquad X_L = \omega \cdot L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_0} \qquad \underline{Z}_0 = \underline{Z}_r + \underline{Z}_L \qquad \dot{U}_r = \dot{I} \cdot \underline{Z}_r \qquad \dot{U}_L = \dot{I} \cdot \underline{Z}_L$$

комплексная схема замещения



расчет ЭЦ при числовых значениях

$E_m = 100\sqrt{2}$ В $\quad R = 100$ Ом $\quad L = 0.318$ Гн $\quad f = 50$ Гц $\quad \psi_e = 15^0$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 100 \qquad \dot{E} = 100e^{j15^0}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 50 = 314$$ *частота*

$$X_L = \omega \cdot L = 314 \cdot 0.318 = 100$$ Ом

$$\underline{Z}_L = j \cdot X_L = j100$$ Ом

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + \underline{Z}_L} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 15^0}}{100 + j100} = 1 \cdot e^{-j \cdot 30^0}$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot \underline{Z}_L = 1 \cdot e^{-j \cdot 30^0} \cdot j100 = 100 \cdot e^{j \cdot 60^0}$$

$$\dot{U}_r = \dot{I} \cdot R = 1 \cdot e^{-j \cdot 30^0} \cdot 100 = 100 \cdot e^{-j \cdot 30^0}$$

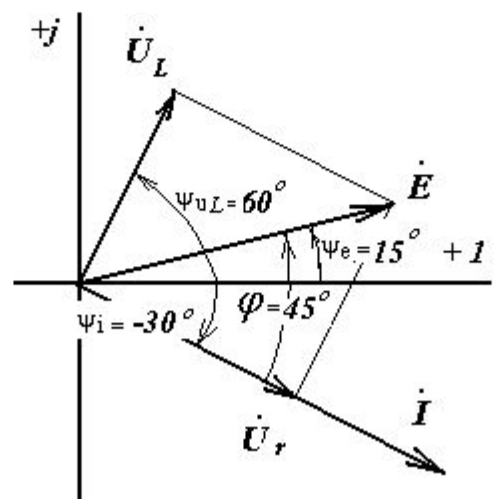
переход от комплексов к синусоидальным функциям

$$i(t) = 1\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 30^0)$$

$$u_L(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^0)$$

$$u_r(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 30^0)$$

векторная диаграмма тока и напряжений



Расчет сложной цепи синусоидального тока комплексным методом