

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЭМФ 1 семестр

Основы теории множеств
Пределы

Непрерывность функций

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Первообразные (неопределенный интеграл)

Определенный интеграл

Д.ф.-м.н. профессор
Филатов В.В.



Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.1-2
Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1-2
Никольский С.М. Курс математического анализа т.1-2

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике ч.1-2

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа

Математический анализ в примерах и задачах (Учебник НГТУ)

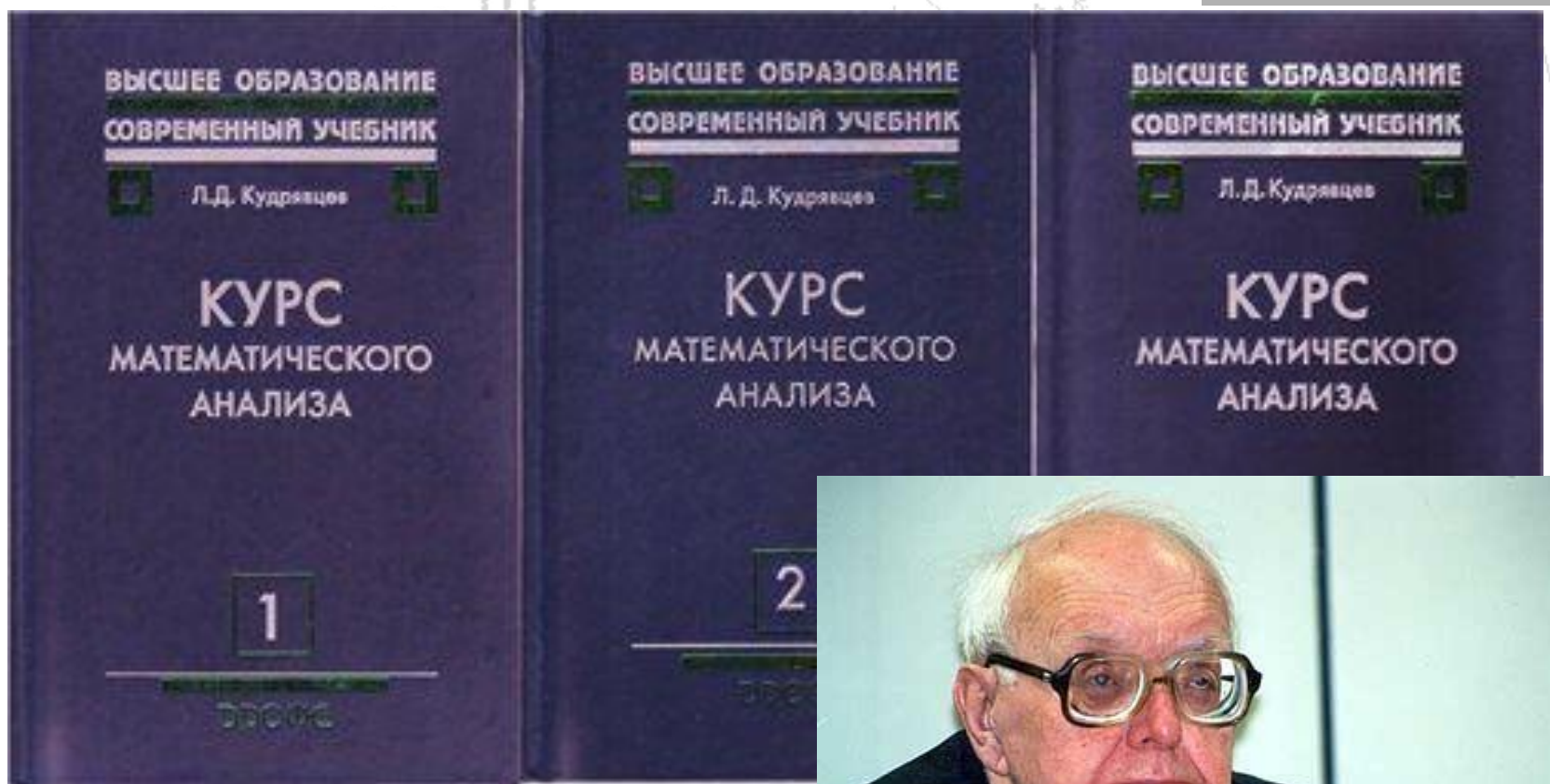
Типовые расчеты 1,2, 3

Учебные пособия

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx}$$

$$x^n + y^n = z^n$$



$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \dots$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$



$$P(X=x) =$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{dt}{dt} \frac{du}{du} \frac{dx}{dx}$$

$$f(z)$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\frac{a}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\int_0^1 f(t) dt$$
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \dots$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$e^{2\pi n}$$



$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|f\| \leq \|g\|$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}$$

$$f(z)$$

$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ

$$f = f(t(u(x)))$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iiint \nabla \vec{F} dV$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\iint \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \dots$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Конспект лекций по высшей математике

Дмитрий Письменный
Конспект лекций по высшей математике

Тридцать пять лекций

1

2

часть


$$\frac{a}{1-r} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sum_{k=0}^n ar^{n-k} = \frac{a}{1-r}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

РОССИЙСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ОТКРЫТЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ



"Высшая и прикладная математика"

Ларин А.А.

**КУРС
ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ**

2000

<http://alexlarin.narod.ru/kvm.html>

Изучение математики

- совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ее, приучает человека логически рассуждать, воспитывает точность и обстоятельность аргументации;
- позволяет не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и, наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого вопроса;
- развивает умение логически мыслить, владение математическим аппаратом, правильное использование которого дает в руки человека мощный метод исследования и большую экономию мышления.

1. МНОЖЕСТВА

Логические символы.

- \square - знак принадлежности
- \square - квантор всеобщности
- \square - квантор существования
- \square - знак логического следования
- \square - символ эквивалентности
- \wedge - символ конъюнкции (и)
- \vee - символ дизъюнкции (или)

$$(a \in A)$$

$$(\forall x \in M)$$

$$(\exists x \in M)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right)$$

$$(a \Rightarrow b)$$

$$\forall \Delta ABC : AC = BC \Rightarrow \angle A = \angle B$$

$$\angle B$$

Множества. Способы задания.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

$\{a\}$; - одноэлементное множество;

\square - пустое множество

Действительные корни уравнения $x^2 + 1 = 0$ образуют пустое множество

\square множества конечные и бесконечные.

Множество характеризуется мощностью

Если A - конечное множество, то мощность множества $|A|$

– это число его элементов.

Отношения между множествами.

- **Определение 1.1.** Множества **A** и **B** называются **равными**, если каждый элемент множества **A** является элементом множества **B** и, наоборот, каждый элемент множества **B** является элементом множества **A**.
- Обозначают **A=B**.

Пример:

$$\begin{aligned} A &= \{ (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \} \\ B &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \right\}, \\ N \quad A &= B \end{aligned}$$

Свойства равенства:

- $A=A$ (рефлексивность);
- $A=B, B=C \Rightarrow A=C$ (транзитивность);
- $A=C \Rightarrow C=A$ (симметричность).
- $A=B \Leftrightarrow B=A$
- **Неравенство** множеств обозначают $A \not\subseteq B$.

Определение 1.2.

- Множество A ($A \subseteq B$) называется **подмножеством** множества B ($B \subseteq B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B .
- **Обозначение:** $A \subseteq B$ $B \subseteq A$ $a \in A$ $A \ni a$ B .
- Если $A \subseteq B$ и $A \subseteq B$ $B \subseteq A$ $A = B$.

Примечание

Пустое множество является подмножеством любого множества

Операции над множествами.

- V – основное или универсальное множество.
- 1) В планиметрии $V = \mathbb{R}^2$
- 2) Для функций действительной переменной $V = \mathbb{R}$.
- **Определение 1.3.** Объединением множеств A и B называется множество $A \sqcup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или обоим одновременно).

$$A \sqcup B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \mid x \in A \vee x \in B \vee (x \in A \wedge x \in B) \right\}$$

■ **Пример:** $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ \sqcup $A \sqcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

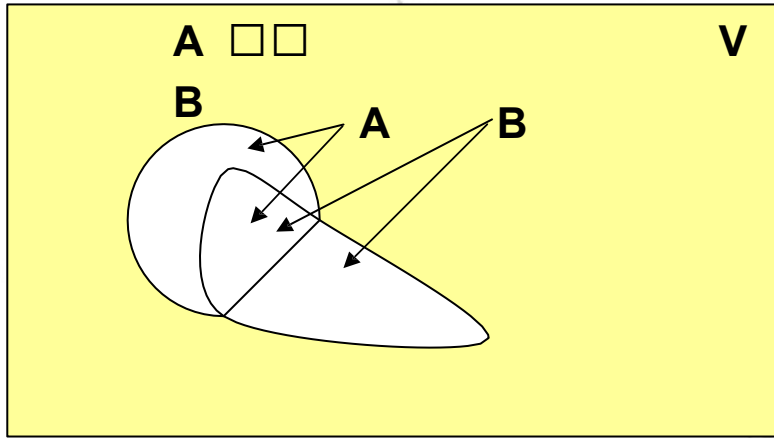


Один из величайших математиков петербургской академии **Леонард Эйлер** (1707-1783) за свою долгую жизнь написал более 850 научных работ. В одной из них появились круги, которые “очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления”. Эти круги и назвали *кругами Эйлера*.



Джон Венн (*John Venn*; 4 августа 1834, Халл (Йоркшир) — 4 апреля 1923, Кембридж) — английский логик и философ

Диаграмма Эйлера-Венна



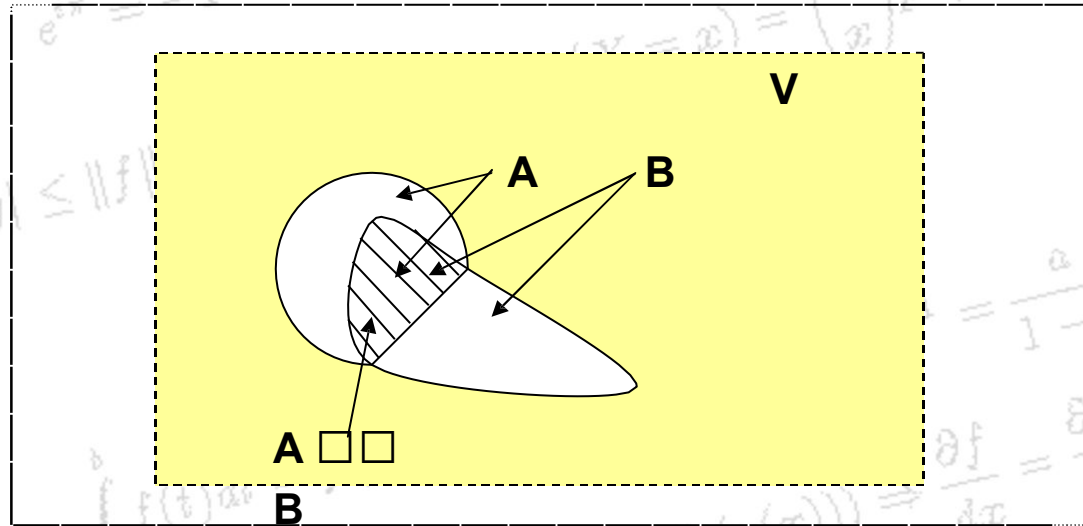
Свойства объединения множеств.

- 1) $A \sqcup B = B \sqcup A$ (КОММУТАТИВНОСТЬ),
 - 2) $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$ (АССОЦИАТИВНОСТЬ).
- В) $\sqcup \sqcup C$
- Очевидно
 - $A \sqcup A = A$ $A \sqcup \emptyset = A$ $A \sqcup V = V$

Определение 1.4.

- **Пересечением** множеств **A** и **B** называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно.
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Диаграмма Эйлера-Венна



Свойства пересечения множеств.

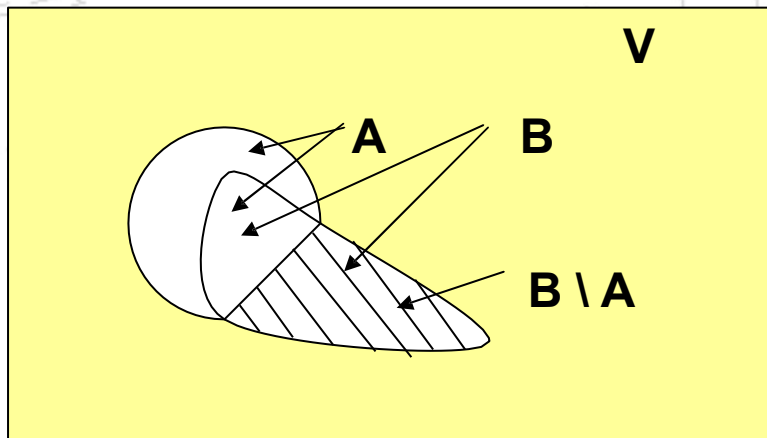
- 1) $A \cap B = B \cap A$ (КОММУТАТИВНОСТЬ),
- 2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (АССОЦИАТИВНОСТЬ).
- Очевидно, что, $A \cap A = A$, $A \cap V = A$.
- Операции объединения и пересечения подчиняются дистрибутивным законам:
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Определение 1.5.

- Разностью двух множеств **B** и **A** называется множество **B \ A**, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат **B**, но не принадлежат **A**.

- $B \setminus A = \{ x \in B \mid x \notin A \}$

Диаграмма Эйлера-Венна



Определение 1.6.

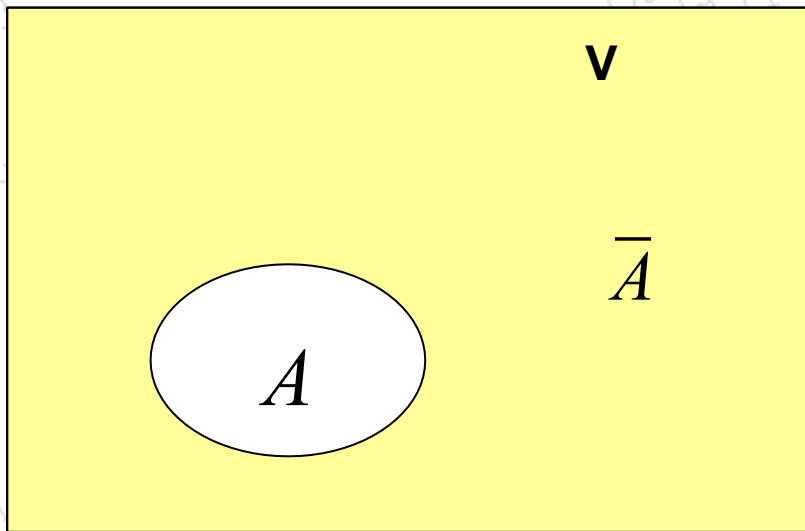
- Разность $V \setminus A$ называется **дополнением** множества A до универсального множества V и обозначается \bar{A}
- **Примеры:**

$$\bar{A} = V \setminus A = \{ x \mid$$

$$x \notin A \}.$$
$$A \cap \bar{A} = \emptyset; \quad \bar{\emptyset} = V;$$

$$\emptyset = V; \quad V = \emptyset.$$

Диаграмма Эйлера-Венна



Определение 1.7.

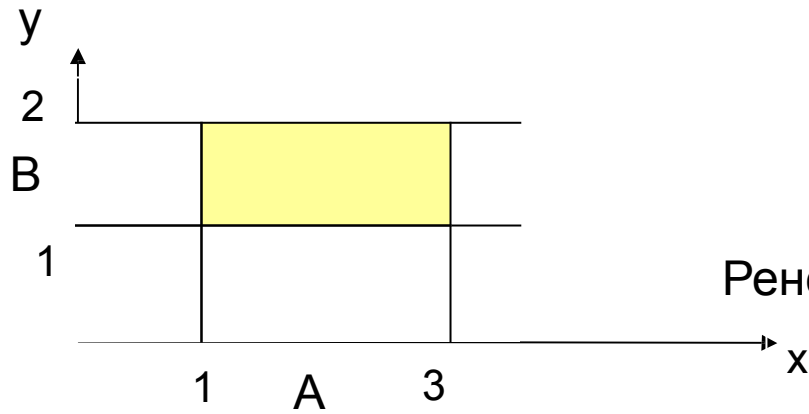
- Пара элементов $(x; y)$, $x \in A$, $y \in B$ называется **упорядоченной**, если указан порядок записи элементов x и y .
- Считается, что

$$(x_1; y_1) = (x_2; y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Определение 1.8.

- Декартовым или прямым произведением двух множеств **A** и **B** называется множество, обозначаемое **A □ B**, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$

- $A \square B = \{ (x; y) \mid x \in A, y \in B \}$



Рене Декарт(Rene Descartes)

Несколько приятелей встретились на вокзале, чтобы поехать за город в лес. При встрече все они поздоровались друг с другом за руку. Сколько человек поехало за город, если всего было 10 рукопожатий?

Множество Мандельброта



This watermark will be removed after registered!

$$\int_a^b f(t) dt = \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{d}{dx} \dots$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dV$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

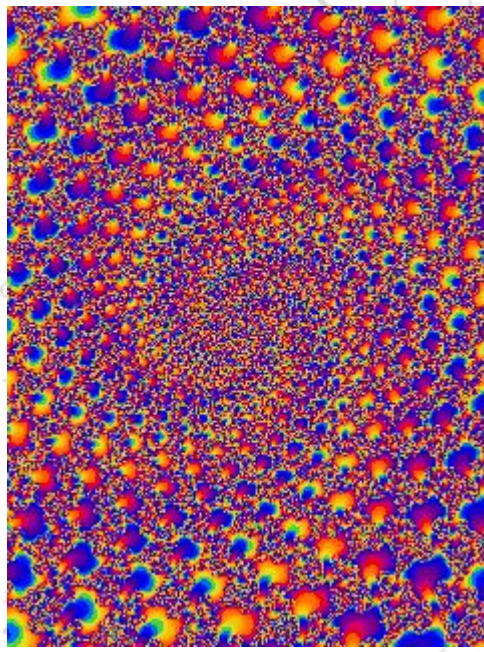
$$e^{ix} = -1$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

$$\|fg\| \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

curl



$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\int_a^b f(t) dt = \dots$$

$$f = f(t(u(x))) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

f(z)

$$\frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$$\iiint \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Отображение множеств. Эквивалентность множеств.

- Пусть A и B - произвольные множества.
- Пусть f - закон (правило) по которому $a \in A \rightarrow b \in B$.
- Говорят, что задано **отображение** $f: A \rightarrow B$ или оператор f

или

$$A \xrightarrow{f} B$$

b – **образ** элемента a (обозначают $f(a)$);
 a – **прообраз** элемента $b = f^{-1}(a)$.

Определение отображения:

■ $f: A \rightarrow B$ $a \in A \rightarrow b \in B$
■ $B: b = f(a)$.

■ Множество образов всех элементов $a \in A$ при отображении f называют

образом множества A при этом отображении и обозначают:

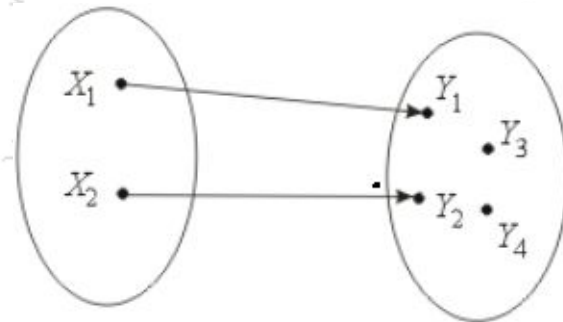
■ $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset B$.

■ Задание отображения – это задание тройки (A, f, B) .

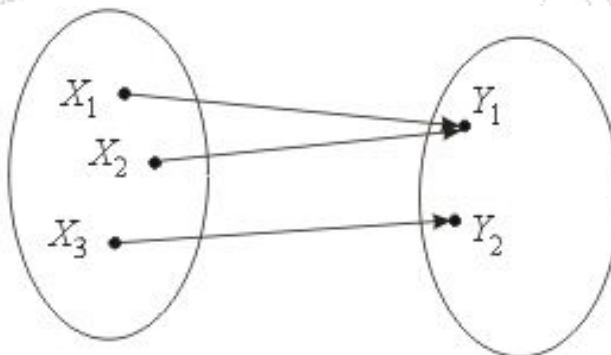
Множество упорядоченных пар $(x, f(x))$ - **график** отображения

Определение 1.9

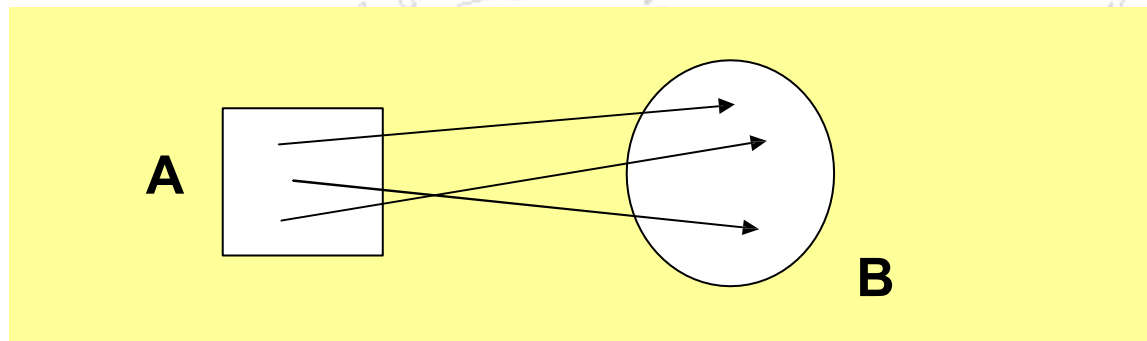
Отображение называется **инъекцией**, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$, для которых $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$



Сюръекцией (или отображением "на") называется отображение, при котором $f(X) = Y$



Биекция – это одновременно и сюръекция и инъекция, т.е., отображение $f: A \rightarrow B$ называют биективным или взаимно однозначным, если каждый элемент $b \in B$ является образом только одного элемента $a \in A$.



- f – взаимно однозначное отображение $A \rightarrow B$: $b = f(a)$

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

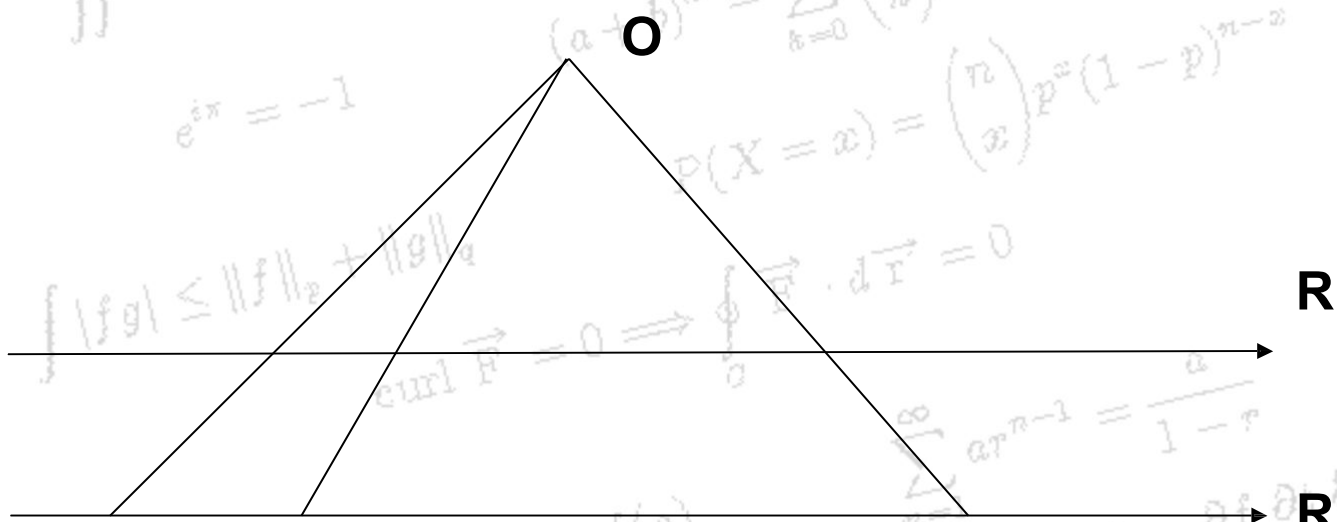
- Если f - взаимно однозначное отображение, то можно говорить
- об обратном отображении.

Определение 1.10.

Отображение $f^{-1} : B \rightarrow A$ называется обратным к отображению $f : A \rightarrow B$, если каждому элементу $b \in B$ ставится в соответствие единственный элемент $a \in A$, образом которого при отображении f является b .

$$f^{-1} : B \rightarrow A \Leftrightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : a = f^{-1}(b)$$

Пример:



$f: \mathbb{R} \square \mathbb{R}$

Определение 1.11

Два множества **A** и **B** называются **эквивалентными** (равномощными), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

Свойства эквивалентности:

- 1) $A \sim A$ (рефлексивность);
- 2) $A \sim B \iff B \sim A$ (симметричность);
 $A, B \sim A$ (транзитивность).
- 3) $A \sim B, B \sim C \iff A \sim C$

Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**.

Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ - множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$ - множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{m/n; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел. \mathbb{R} - множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

■ **Множество натуральных чисел \mathbf{N} .**

■ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

■ Свойства:

■ 1) $\forall n, n \in \mathbf{N} \Rightarrow n + n \in \mathbf{N}, n \cdot n \in \mathbf{N}$

■ выполняются: ¹ коммутативность, ² ассоциативность,

■ ~~дистрибутивность~~ деление не определены;

■ 3) $1 \in \mathbf{N}$;

■ 4) $n \in \mathbf{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbf{N}$;

■ 5) если $M \subset \mathbf{N}, 1 \in M, n \in M$ и $(n + 1) \in M$, то $M = \mathbf{N}$ (аксиома индукции);

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел называется **счетным**.

Если множество счетно, то его элементы можно занумеровать.

Мощность счетного множества обозначают буквой c .

Множество целых чисел \mathbf{Z}

$$\mathbf{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

Свойства:

Определены операции сложения, умножения, вычитания; Не определено деление;

\mathbf{Z} – упорядоченно, т.е. имеет место

$$p_1 < p_2 \vee p_1 = p_2 \vee p_1 > p_2;$$

\mathbf{Z} – счетно и бесконечно;

$$\mathbf{N} \square \quad \mathbf{Z} \square \quad \mathbf{Q}.$$

Множество рациональных чисел \mathbb{Q} .

$$\mathbb{Q} = \{ q = p/n \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}.$$

Свойства:

Определены все арифметические операции;

\mathbb{Q} – упорядоченно;

\mathbb{Q} – плотно, т. е.

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \exists q \in \mathbb{Q}: q_1 < q < q_2.$$

\mathbb{Q} – счетно и бесконечно;

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество действительных чисел \mathbf{R} .

- Свойства:
- \mathbf{R} – упорядоченно;
- \mathbf{R} – бесконечно;

Множество \mathbf{R} *плотное*: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x , т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Множество \mathbb{R} непрерывное.

Пусть множество \mathbb{R} разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$.

Тогда (**свойство непрерывности**) существует единственное число c , удовлетворяющее неравенству

$$a \leq c \leq b \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

Оно отделяет числа класса A от чисел класса B . Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в классе A нет наибольшего).

Это позволяет установить *взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой*

Последовательности

Определение 1.12

Пусть каждому натуральному числу $n=1, 2, \dots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число x_n . Тогда говорят, что этим определена **последовательность чисел** $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ или, короче, **последовательность** $\{x_n\}$

Отдельные снабженные номерами n (**индексами**) числа x_n называют **элементами последовательности** $\{x_n\}$. Они могут быть действительными или комплексными. Мы рассматриваем случай, когда они действительны. Для разных n отдельные элементы последовательности могут оказаться равными как числа ($x_i = x_j$). Однако x_i, x_j рассматриваются как разные элементы последовательности.

Примеры последовательностей:

- 1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- 2) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$,
- 3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}$,
- 4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$,
- 5) $\left\{1 + \frac{1}{10^n}\right\} = \{1,1; 1,01; 1,001; \dots\}$,
- 6) $\{(-1)^n\} = \{-1, +1, -1, \dots\}$,
- 7) $\{1; 2; \dots; 10; 0,1; 0,01; 0,001; \dots\}$.

В случае 7) не видно, как написать общую формулу для произвольного элемента x_n , однако закон образования чисел x_n ясен:

$$x_n = \begin{cases} n & (n = 1, \dots, 10), \\ \frac{1}{10^{n-10}} & (n = 11, 12, \dots). \end{cases}$$

Определение 1.13

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leq M.$$

В противном случае последовательность называется **неограниченной**.

Легко видеть, что последовательности 2, 3, 4 ограничены, а 1 — неограничена

Определение 1.14

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (неубывающей)**, если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geq x_n$).

Аналогично определяется **убывающая (невозрастающая)** последовательность.

Все эти последовательности называются **МОНОТОННЫМИ**

Предел последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ

Можно заметить, что члены последовательности

$$u_n = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \right\}.$$

неограниченно приближаются к числу 1.

В этом случае говорят, что последовательность u_n стремится к пределу 1

Определение 1.14

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$ если для любого положительного числа ϵ найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim x_n = a$$

или $x_n \rightarrow a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к a* .

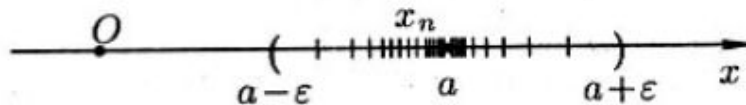
Геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

равносильно неравенствам $- \square < x_n - a < \square$ или $a - \square < x_n < a + \square$,
которые показывают, что элемент x_n находится в \square -окрестности точки
 a .

Поэтому определение предела последовательности геометрически
можно сформулировать так: число a называется пределом
последовательности $\{x_n\}$ если для любой ε -окрестности точки a найдется
натуральное число N , что все значения x_n , для которых $n > N$,
попадут в ε -о



Ясно, что чем меньше ε , тем больше число N , но в любом случае внутри ε -окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что **сходящаяся последовательность имеет только один предел**.

Последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Таковой является, например, последовательность $x_n = n^2 + 1$