

План проведения занятия по теме

Функции и их свойства



Скуднева Оксана Валентиновна

Образование: МГТУ им. Н. Э. Баумана, специальность «Системы автоматического управления»;

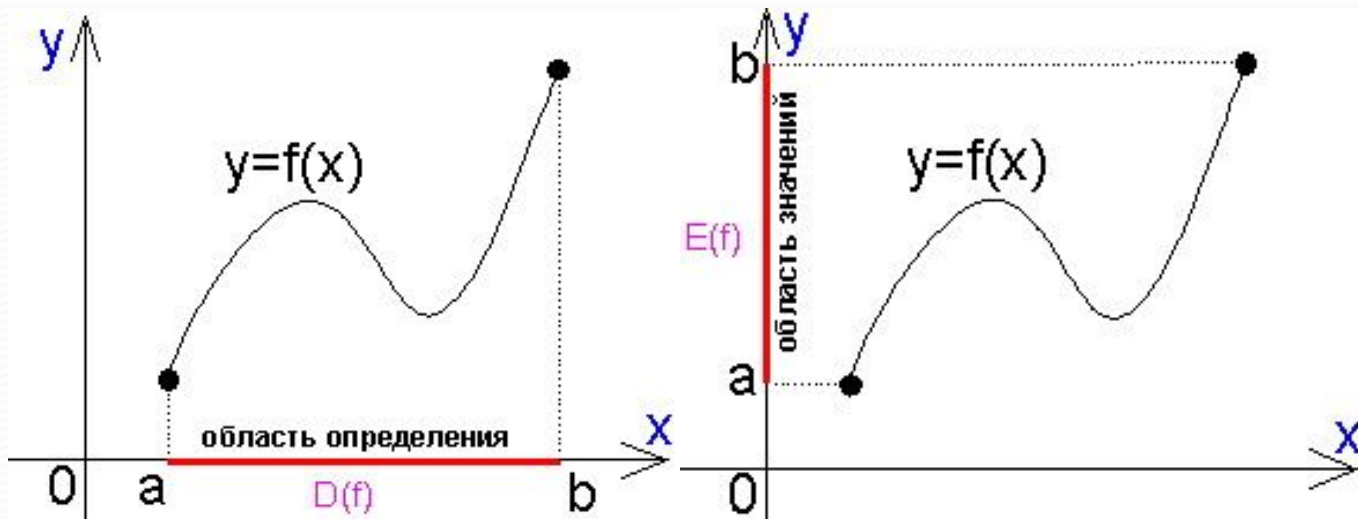
МГУ им. М. В. Ломоносова, специальность «Математика. Прикладная математика».

Место работы: МГТУ им. Н. Э. Баумана, НУК ФН, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», должность – старший преподаватель.

Опыт работы: средняя школа, 2002-2011 гг., факультативные курсы по подготовке к Олимпиадам МГТУ им. Н. Э. Баумана «Шаг в будущее», «Олимпиада Жуковского», ЕГЭ по математике, основной курс алгебры физ-мат. класса.

Основные понятия и определения.

Закон, ставящий каждому элементу из множества X (область определения - $D(f)$), не более одного элемента из множества Y , (область значений - $E(f)$), называется числовой функцией $y=f(x)$.



Способы задания функции

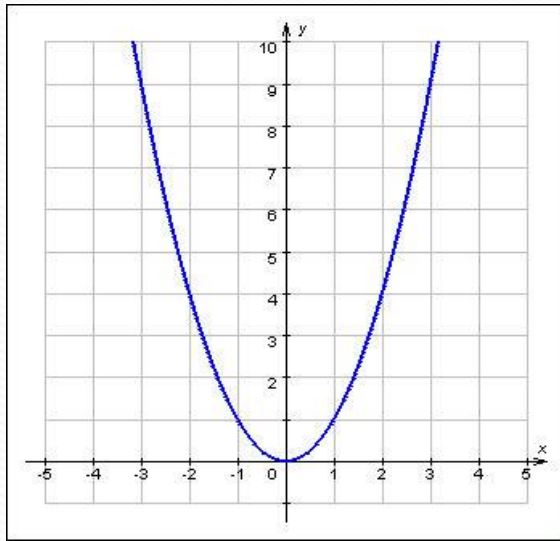
1) табличный

Пример:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

2) Графический

Пример:

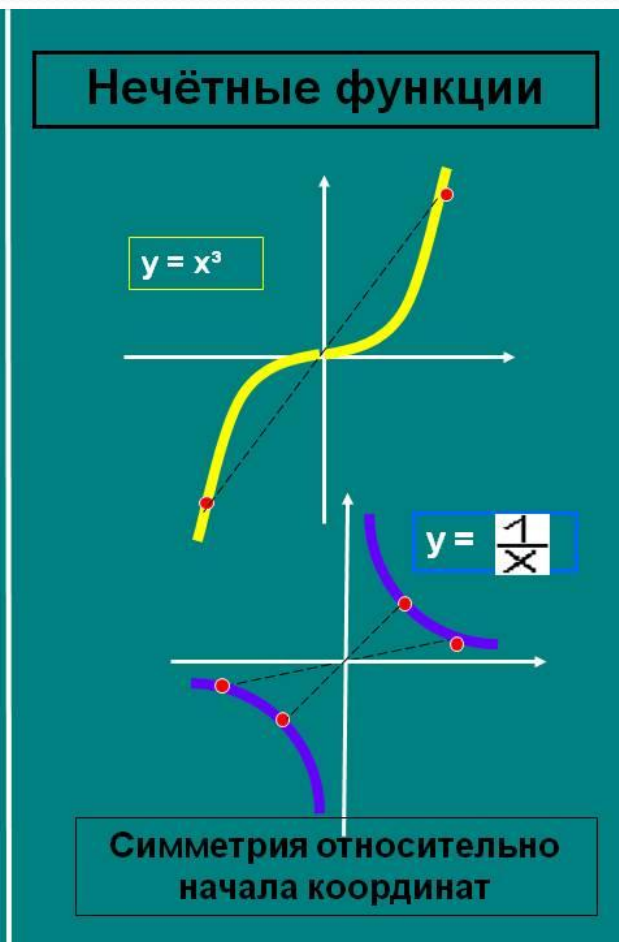
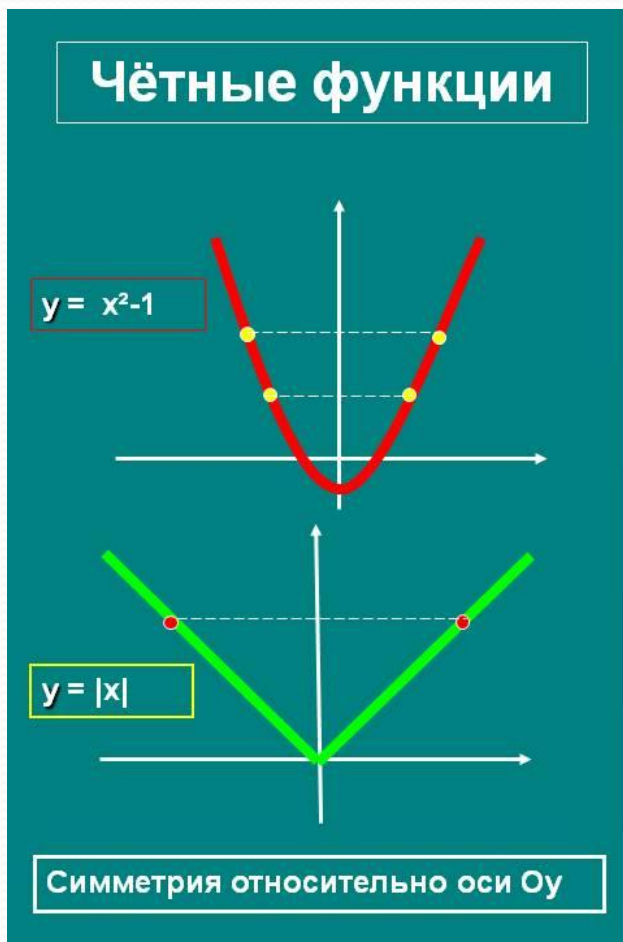


3) аналитический (формулой):

Пример: $y = x^2$

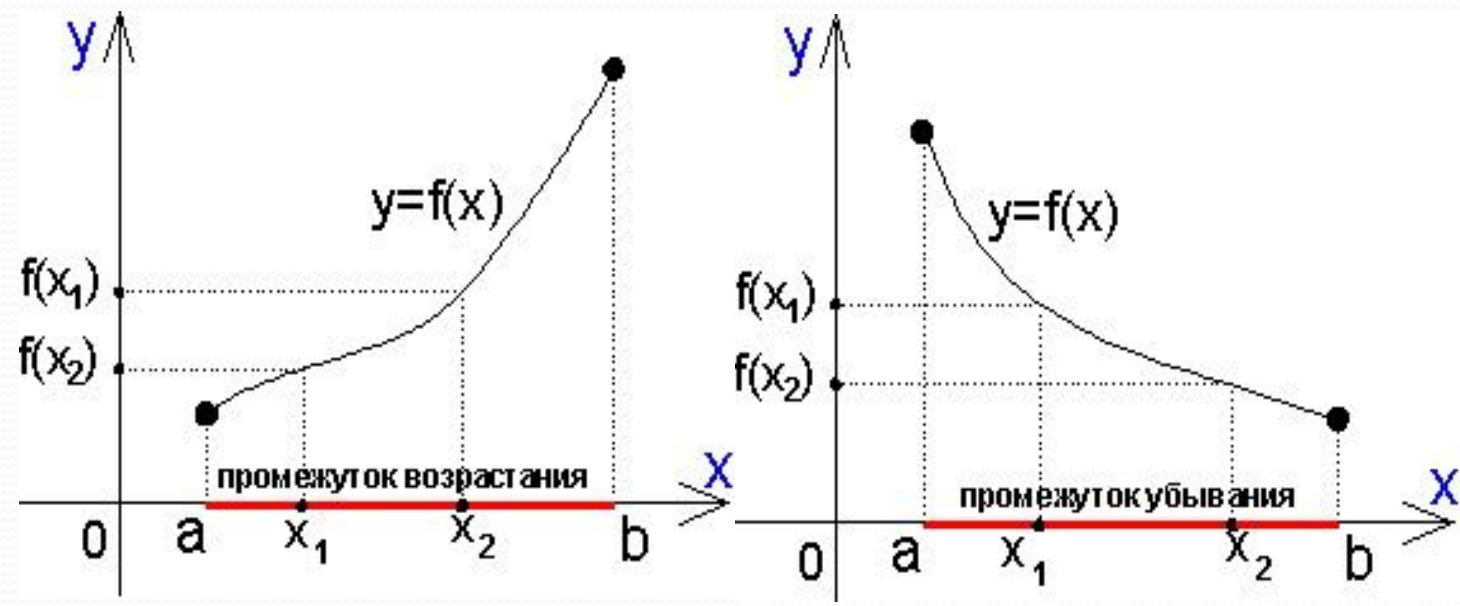
Если область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат, и для каждого значения $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$, функция называется **чётной**. График чётной функции симметричен относительно оси OY .

Если область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат, и для каждого значения $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$, функция называется **нечётной**. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



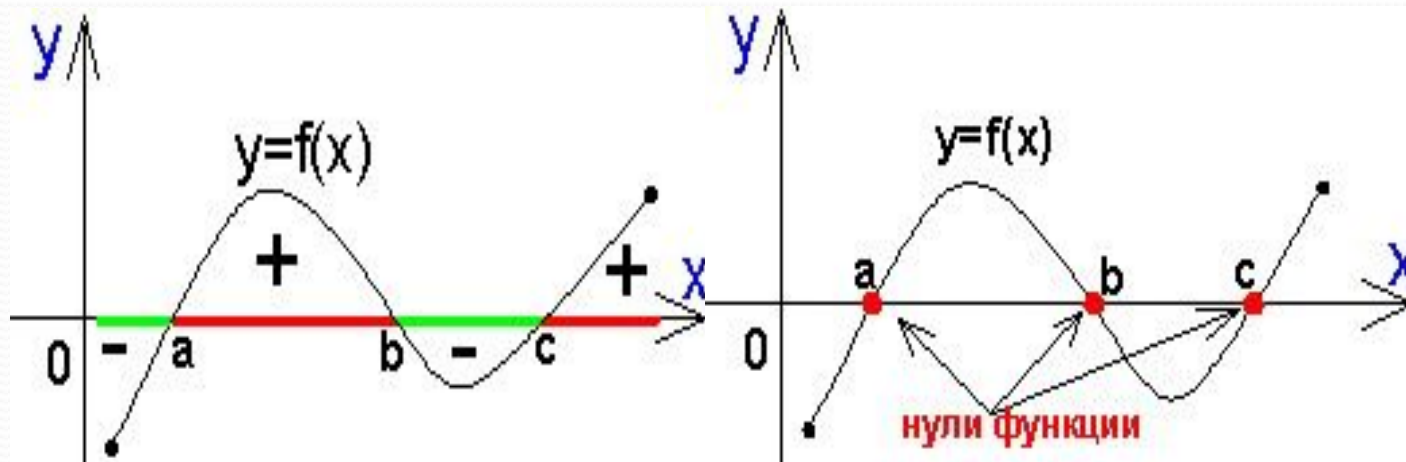
Если для любых x_1, x_2 и $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **возрастает** на интервале (a, b) .

Если для любых x_1, x_2 и $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **убывает** на интервале (a, b) .

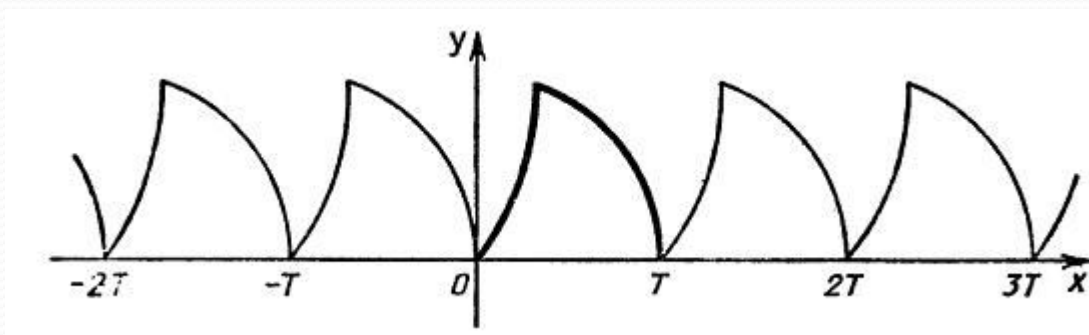


Возрастание и убывание функции объединяется понятием **МОНОТОННОСТИ**.

Если на промежутке области определения функция имеет значения одного знака (плюс или минус), такой интервал называется промежутком знакопостоянства функции. Числа, в которых значение функции равно нулю, называются нулями функции.



Если существует положительное число T , такое, что на всей области определения выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$, $f(x)$ функция называется периодической, а число T – периодом.

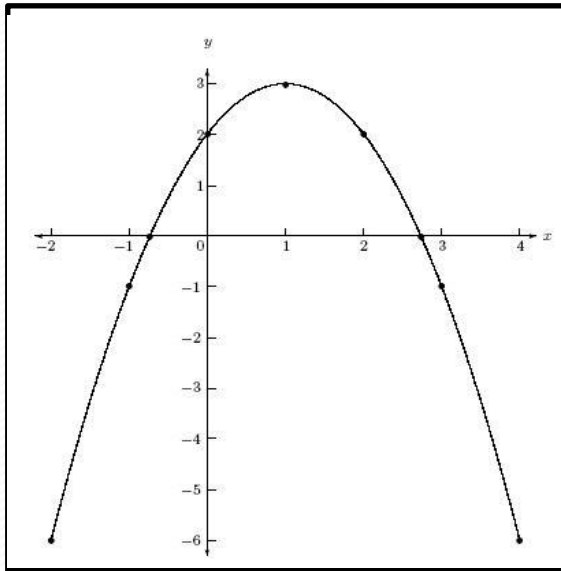


Ограниченные функции.

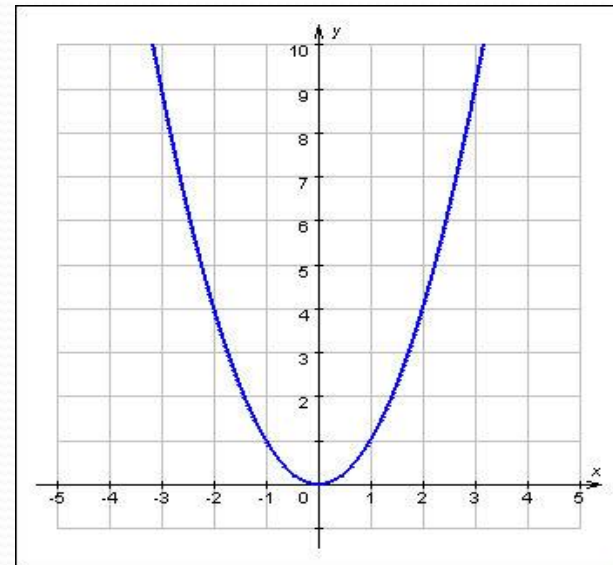
Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X , если

$$\exists M(m) \in \mathbb{R} \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M \text{ (} f(x) \geq m \text{)}.$$

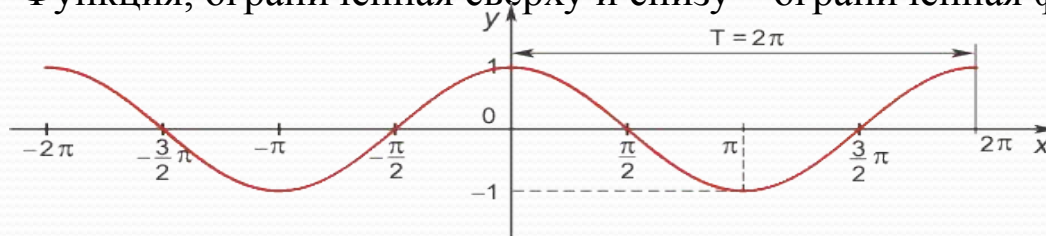
Пример. Функция, ограниченная сверху:



Функция, ограниченная снизу:

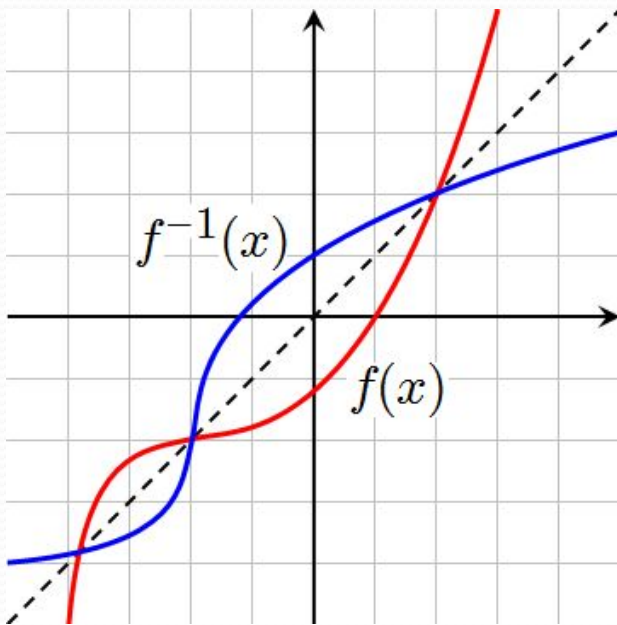


Функция, ограниченная сверху и снизу – ограниченная функция.



Обратная функция.

Пусть на множестве X определена строго монотонная функция $y = f(x)$, осуществляющая отображение $X \rightarrow Y$. Обратной функцией к ней, $y = f^{-1}(x)$ называется функция, осуществляющая отображение $Y \rightarrow X$, такое, что для каждого $x \in X$ $f^{-1}(f(x)) = x$. Графики исходной и обратной функций, таким образом, симметричны относительно прямой $y = x$.

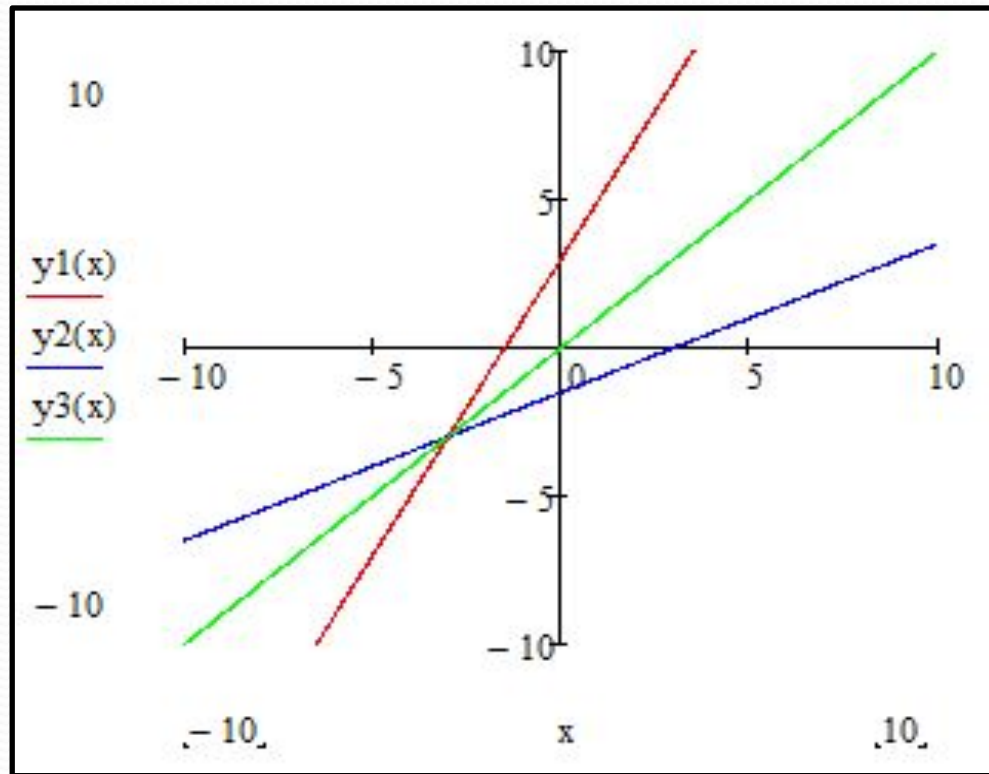


Чтобы получить обратную функцию:

- 1) Определить участки монотонности функции $y = f(x)$;
- 2) Для каждого участка монотонности составить функцию $y = f(x)$;
- 3) Выразим из данного выражения переменную y , получим обратную функцию, $y = f^{-1}(x)$.

Пример.

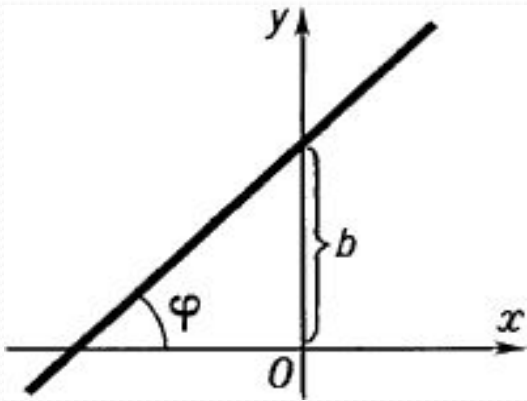
- 1) $y = 2x + 3$ возрастает на всей области определения $x \in \mathbb{R}$;
- 2) Механически меняем местами переменные: $x = 2y + 3$;
- 3) выражаем переменную y : $y = \frac{x-3}{2}$. Это и есть обратная функция. Строим графики и убеждаемся в симметрии относительно прямой $y = x$.



Основные элементарные функции.

Линейная функция

$$y = kx + b$$



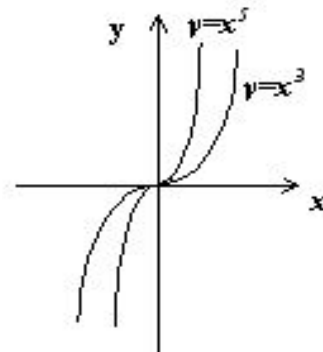
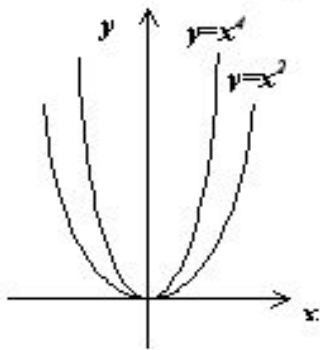
$D(f) = \mathbb{R}$ - функция определена на всей числовой оси.

$$R(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = kx + b$$

Степенная функция.

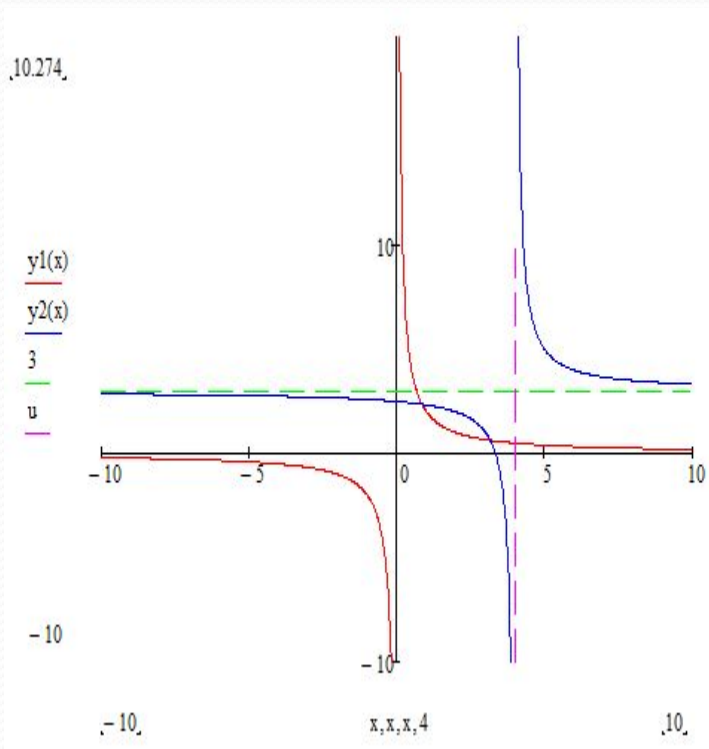
$$y = x^n$$



$D(f), R(f) = 2\mathbb{N}$ [чётное] $f(x) = x^n$, $f(x) = [0, +\infty)$

$D(f), R(f) = 2\mathbb{N} + 1$ [нечётное] $f(x) = x^n$, $f(x) = \mathbb{R}$

Дробно-рациональная функция.



$$\frac{ax^2 + b}{cx^2 + dx} \neq -\frac{ax}{cx}$$

Приводится к виду $\frac{ax^2 + b}{cx^2 + dx} = \frac{ax}{cx} + \frac{bx + d}{cx^2 + dx}$,

где $\frac{bx + d}{cx^2 + dx} = -\frac{a}{cx} + \frac{a}{cx}$,

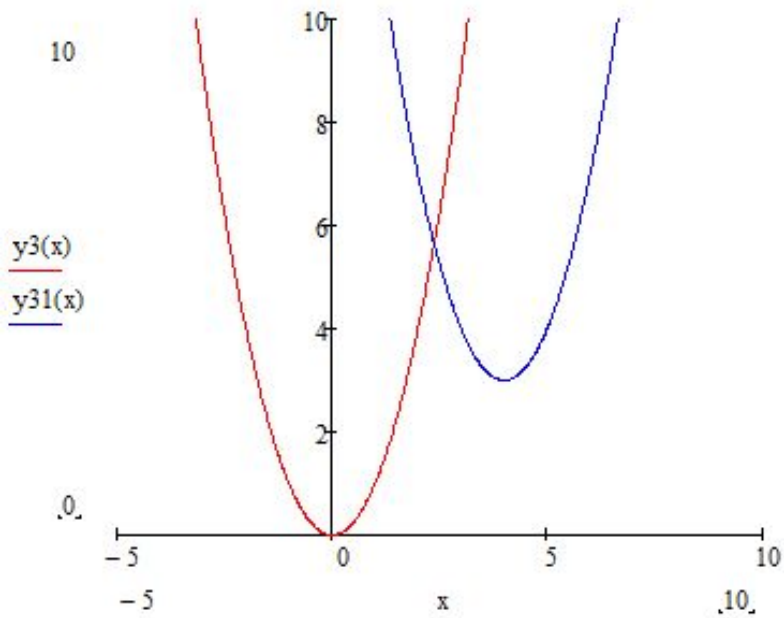
$$\frac{bx + d}{cx^2 + dx} = \frac{bx + d - ax}{cx^2 + dx}$$

Пример. $\frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{2}{x - 4} + 3$

$$\frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = 3 + \frac{2}{x - 4}$$

Квадратичная функция.

$$y = ax^2 + bx + c$$



Приводится к виду

$$y - y_3(x) = a_1x^2 - a_2x^2,$$

где $a_1 = a - \frac{a_2}{a}$,

$$b_1 = -\frac{b}{a}.$$

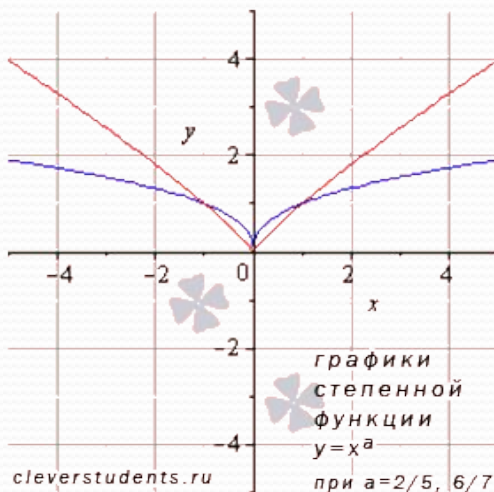
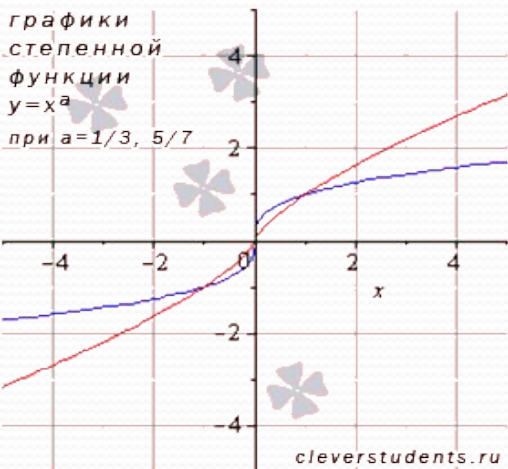
Пример. $y_3(x) = x^2$,

$$y_{31}(x) = 3 + x - 4x^2$$

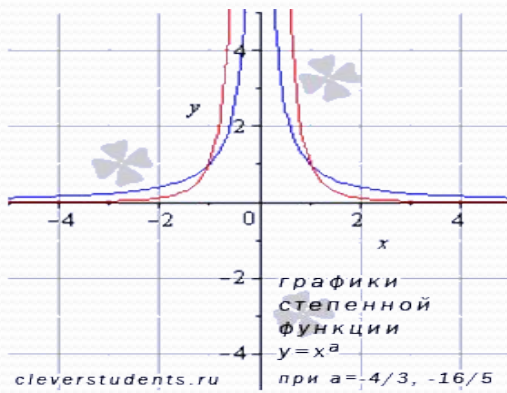
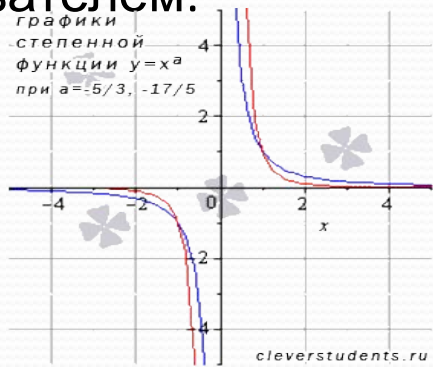
Степенные функции с рациональным показателем.

$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{x^m}}$$

В зависимости от чётности p и q графики принимают вид:



Степенные функции с отрицательным рациональным показателем:



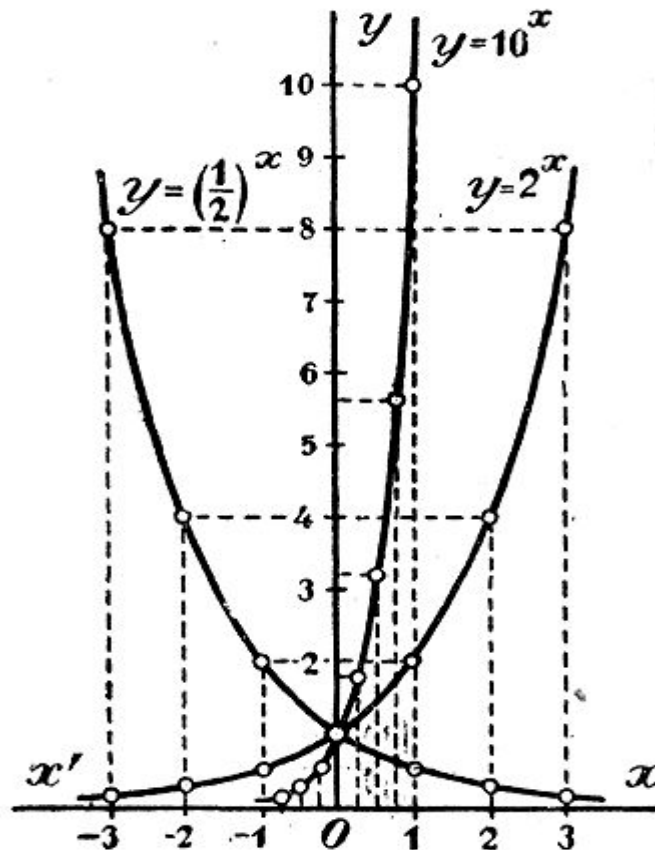
Показательная функция

$$a^x = a^{x'}, a > 0, a \neq 1.$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, a^x a^y = a^{x-y}, a^x a^y = a^{xy}, a^x a^y = a^{x/y}$$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.



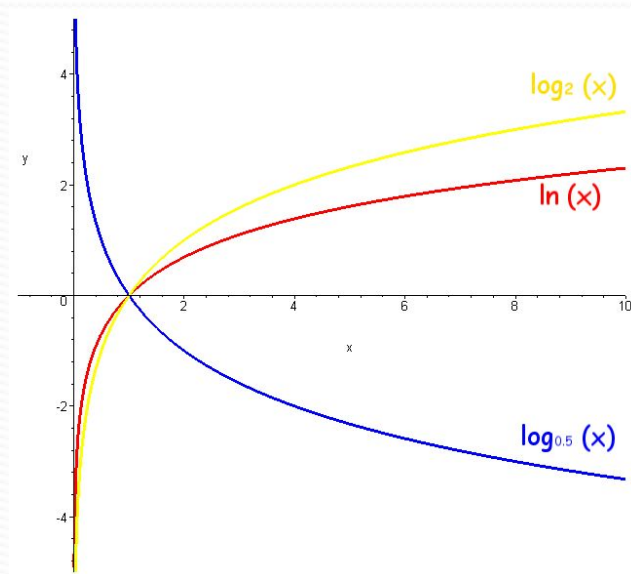
Логарифмическая функция. (Обратная к показательной)

$$y = \log_a(x), x > 0, a \neq 1$$

$$x \in (0, +\infty), y \in \mathbb{R}$$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.

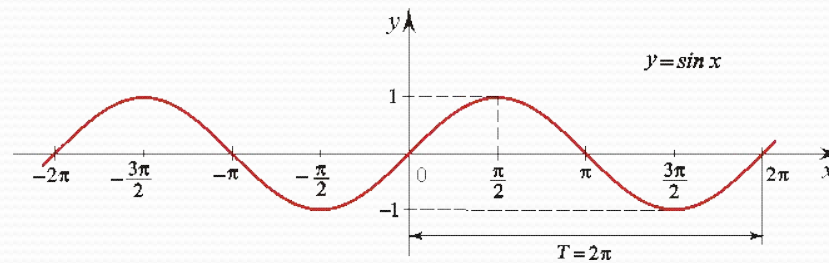


Тригонометрические функции .

$$\sin x = \sin(x + 2\pi k)$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x, \text{ нечётная,}$$

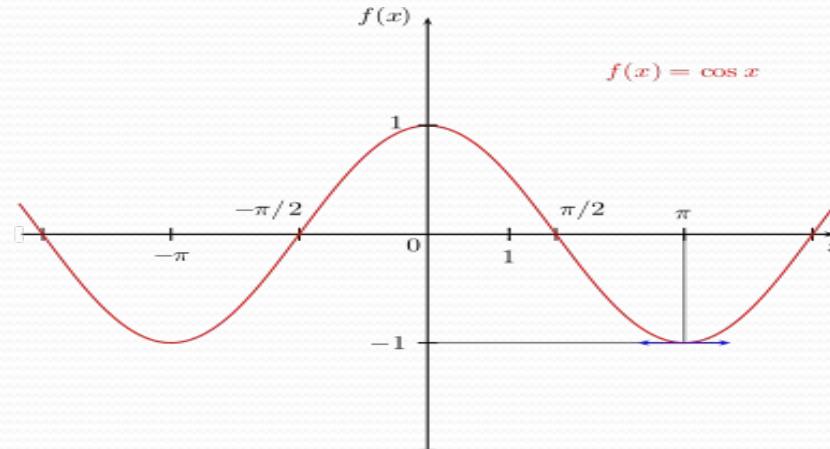
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x, \quad \sin x = 0, \quad x = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$\cos x = \cos(x + 2\pi k)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \text{ чётная}$$

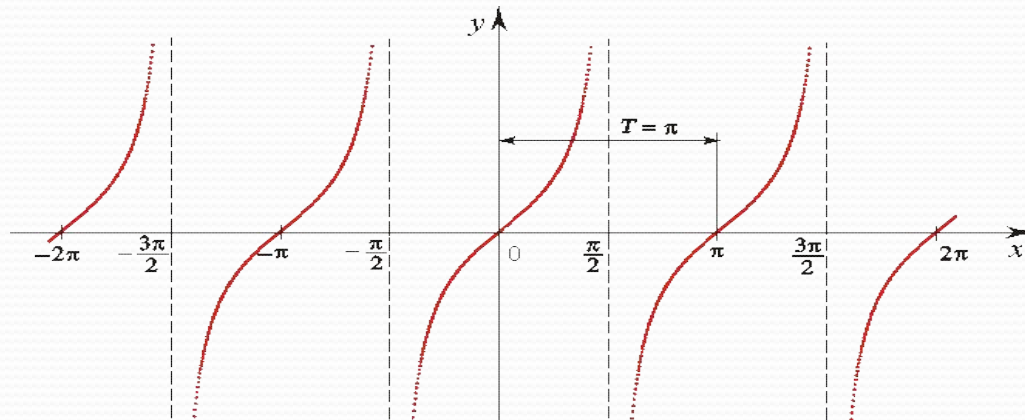
$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x, \quad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x, \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$\sin x = \sin(x + 2\pi k)$, нечётная,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x, \quad \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + 2\pi\right) = \sin x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

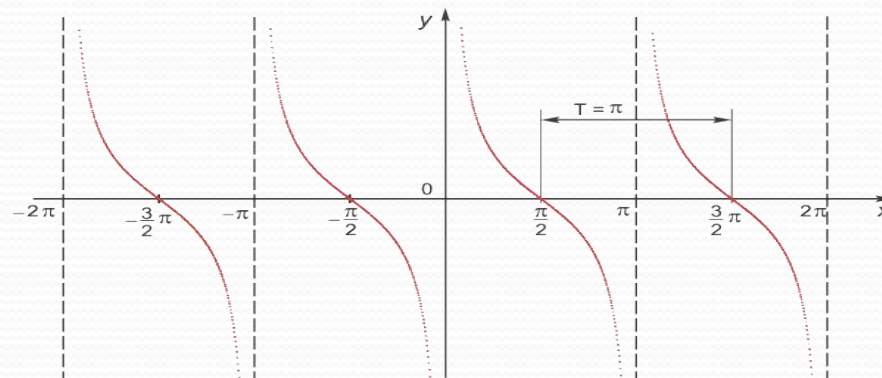
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x, \quad \sin\left(x + \pi\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + 2\pi\right) = \sin x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$\cos x = \cos(x + 2\pi k)$, нечётная,

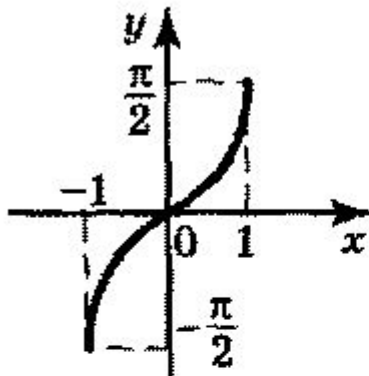
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \cos\left(x + \pi\right) = -\cos x, \quad \cos\left(x + 2\pi\right) = \cos x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \cos\left(x + \pi\right) = -\cos x, \quad \cos\left(x + 2\pi\right) = \cos x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

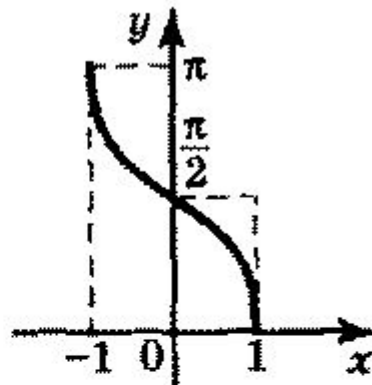


Обратные тригонометрические функции.

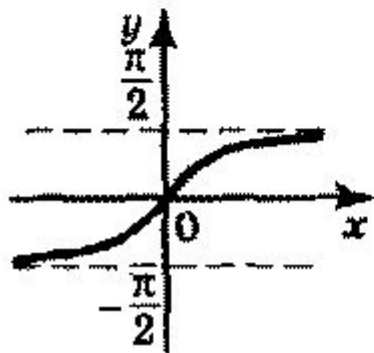
$$y = \arcsin x$$



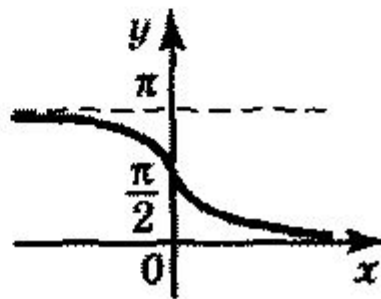
$$y = \arccos x$$



$$y = \operatorname{arctg} x$$

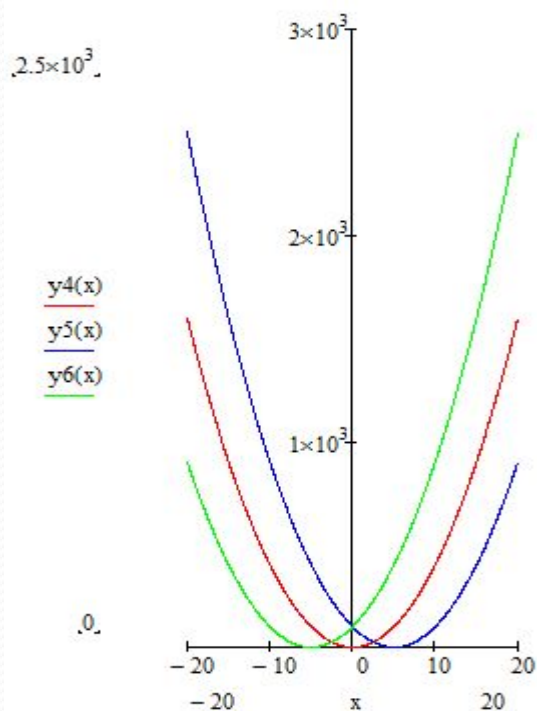


$$y = \operatorname{arccotg} x$$



Построение эскизов графиков функций.

Смещение вдоль оси абсцисс.



a - действительное положительное число.

$y = f(x)$ - исходная функция.

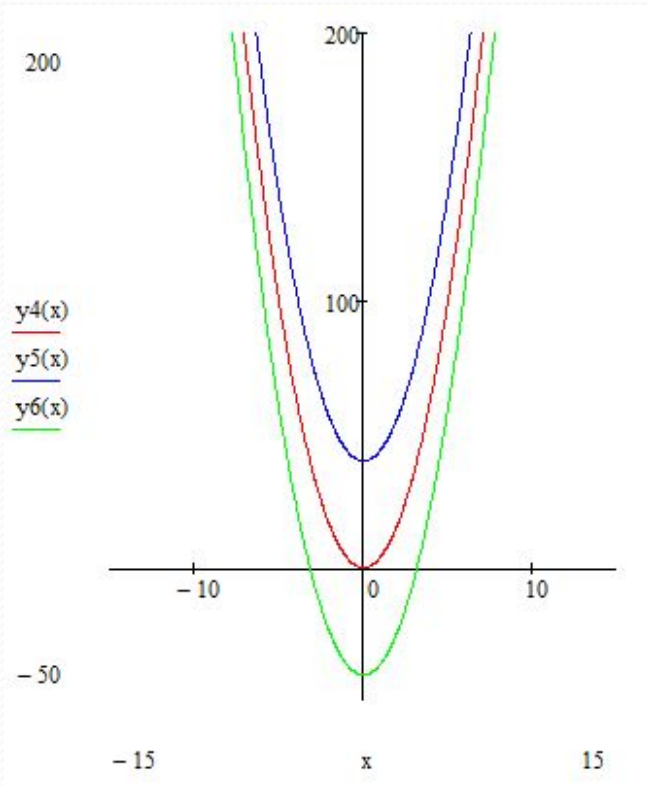
$y = f(x - a)$ - смещение графика

$y = f(x)$ на a единиц вправо.

$y = f(x + a)$ - смещение графика

$y = f(x)$ на a единиц влево.

Смещение вдоль оси ординат.



b - действительное положительное число.

$y_4(x) = y(x)$ - исходная функция.

$y_5(x) = y(x) + b$ - смещение графика

$y_5(x) = y(x)$ на b единиц вверх.

$y_6(x) = y(x) - b$ - смещение графика

$y_6(x) = y(x)$ на b единиц вниз.

Сжатие – растяжение вдоль оси абсцисс

$y = \sin(x)$ - исходная функция. k - действительное положительное число, превосходящее единицу. График функции $y = \sin(kx)$ - сжат в k раз по оси абсцисс

Пример. $y_4(x) = \sin(4x)$, $y_5(x) = \sin(3x)$

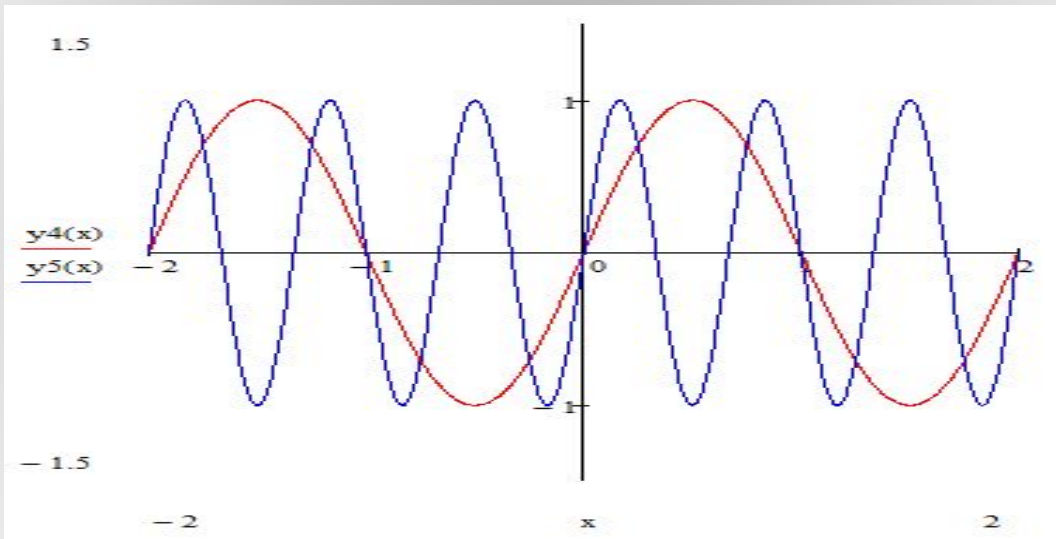
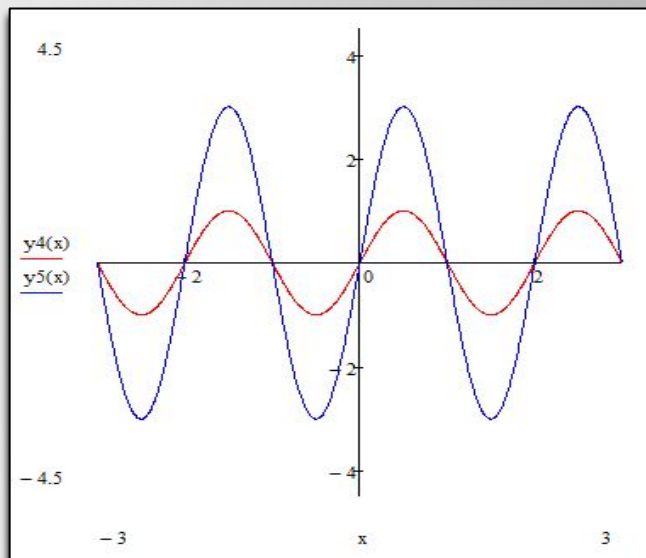


График функции $y = \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ - растянут в k раз по оси абсцисс.

Пример. $y_4(x) = \sin(4x)$, $y_5(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

—
—

Сжатие – растяжение вдоль оси ординат.



$y = k \cdot f(x)$ - исходная функция. k - действительное положительное число, превосходящее единицу.

График функции $y = k \cdot f(x)$ - растянут в k раз по оси ординат.

Пример. $y_4(x) = \sin(x)$; $y_5(x) = 3 \sin(x)$

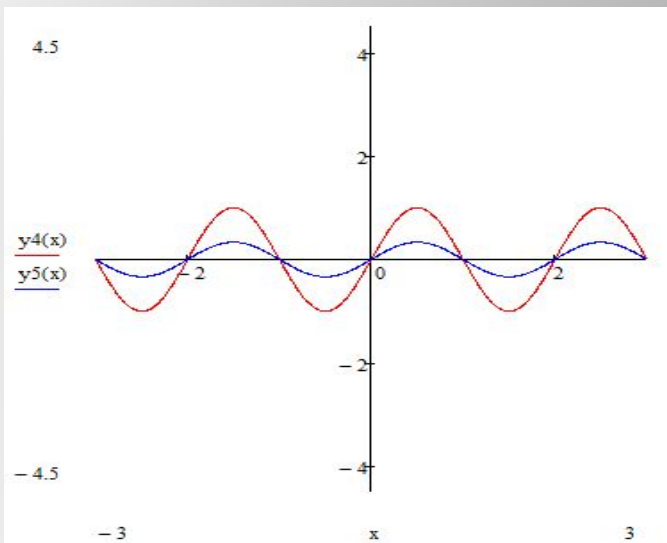


График функции $y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$ - сжат в k раз по оси ординат.

Пример. $y_4(x) = \sin(x)$; $y_5(x) = \frac{1}{3} \sin(x)$

Отражения графиков.

$y = f(x)$ - исходная функция.

$y = f(-x)$ - исходная функция симметрично отражается относительно оси ординат.

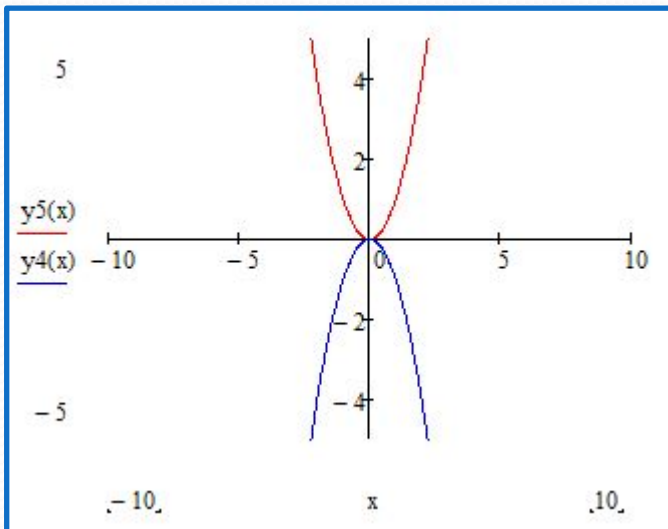
Пример. $y = 5x^2 = x^2 - x^2$,

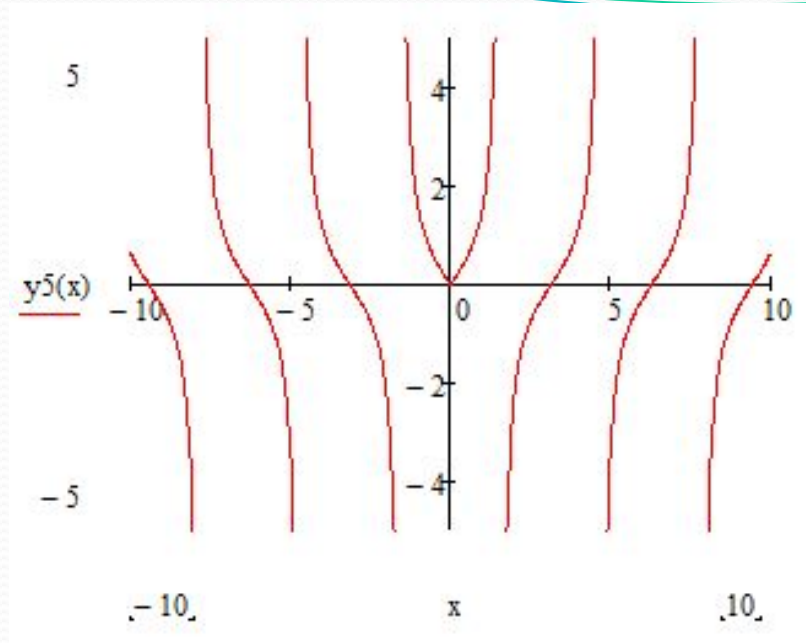
$$y = 5x^2 = x^2 + x^2.$$

$y = -f(x)$ - исходная функция симметрично отражается относительно оси абсцисс.

Пример. $y = 5x^2 = x^2$,

$$y = 5x^2 = -x^2$$





$y = f(x)$ - график исходной функции для $x \geq 0$ остаётся на прежнем месте, для $x < 0$ – заменяется на отражённую относительно оси ординат часть графика для $x \geq 0$.

Пример. $y = f(x)$

Билет 1

1. Построить эскизы графиков функций:

А) $y = \frac{3x-3}{5x+7}$ Б) $y = \left| \frac{3x-3}{5x+7} \right|$; $y = f(g(x))$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = |x+2|$

В) $y = 5x^2 - 4x + 7$; Г) $y = 2x^2 - 6|x+2| + 5$; Д) $y = \frac{3|x|-3}{5|x|+7}$.

2. Определить вид монотонности функции $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

(возр. или убывание) на отрезке: $x \in [3;7]$

3. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} + \sqrt{\frac{3x^2+4x-4}{x+1}}$$

4. Найти обр. функцию $y = 6 - 3x$