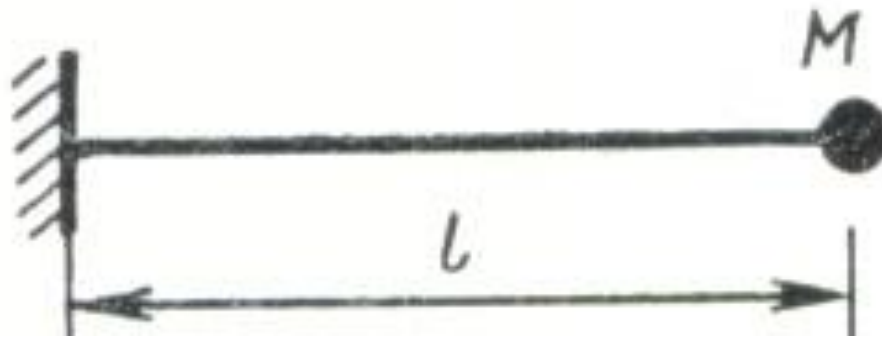


## **Семинар 4. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

Рассмотрим изгибные колебания стержня с массой  $M$  на конце



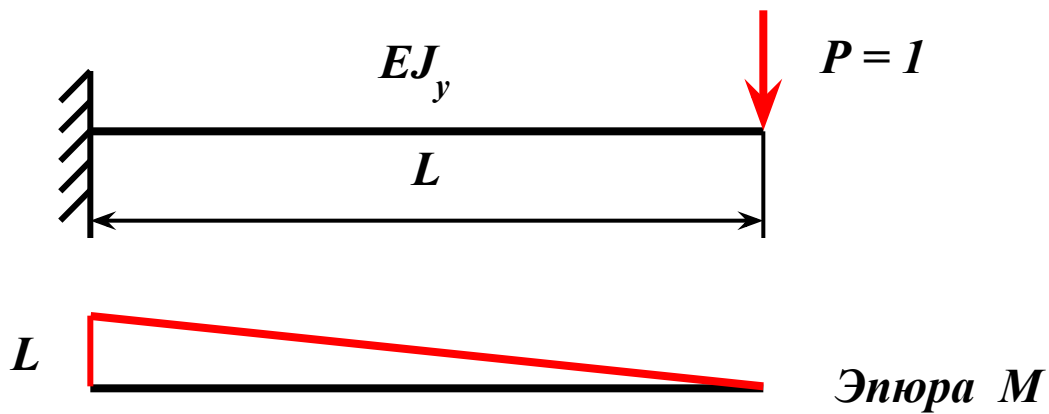
$L = 2$  м, сечение прямоугольное шириной  $b = 5$  см и высотой  $h = 3$  см,  
 $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг

Уравнение для определения собственных частот колебаний

$$\left| k - \omega^2 m \right| = 0 \qquad \left| 1 - \omega^2 m f \right| = 0$$

где  $f = 1/k$  - единичная податливость, величина обратная жесткости

Определим единичную податливость методом сил

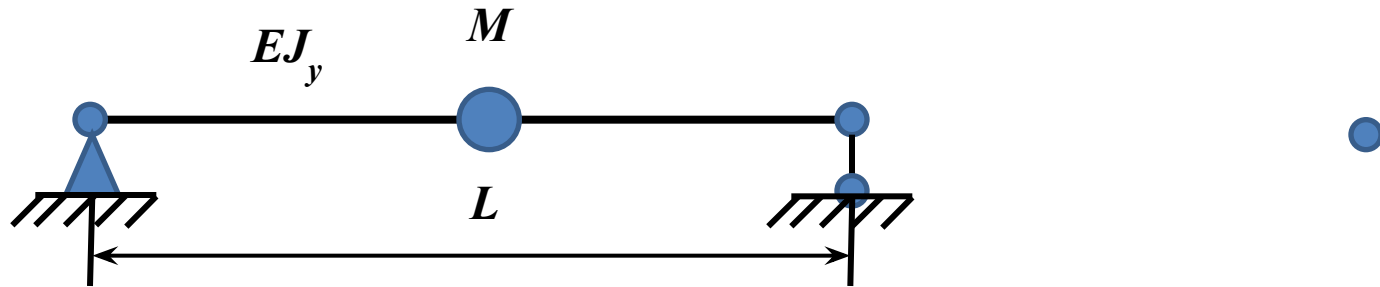


$$f_{11} = \frac{L^3}{3EJ_y}$$

$$k_{11} = \frac{3EJ_y}{L^3} = \frac{3 * 2 * 10^{11} * 5 * 27 * 10^{-8}}{8 * 12} = 0,85 * 10^4 \quad \text{H/м}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ_y}{mL^3}} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{0,85 * 10^4}{50}} = 7 \quad \text{1/с} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,16 \text{ Гц}$$

Рассмотрим изгибные колебания свободно опертого стержня с массой  $M$  по середине



$L = 2$  м, сечение прямоугольное шириной  $b = 5$  см и высотой  $h = 3$  см,  
 $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг

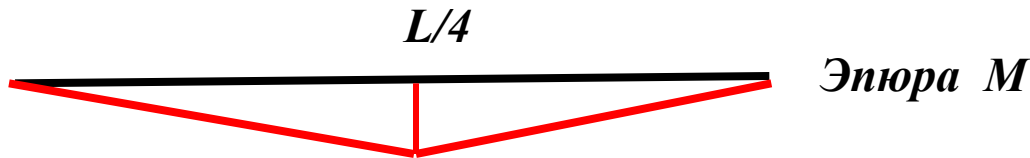
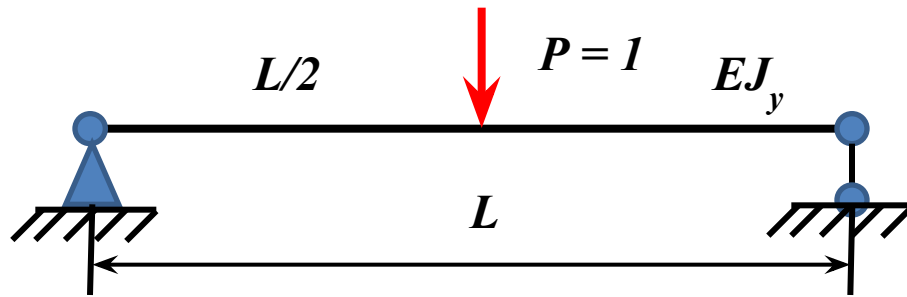
Уравнение для определения собственных частот колебаний

$$|k - \omega^2 m| = 0$$

$$|1 - \omega^2 m f| = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mf}}$$

Определим единичную податливость методом сил



Единичная податливость

$$f_{11} = \frac{L^3}{48EJ_y}$$

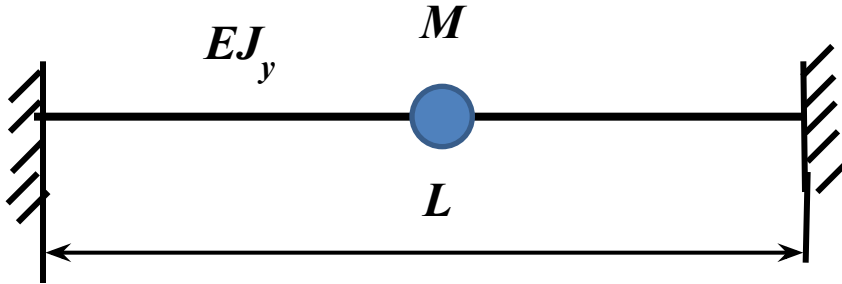
Круговая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ_y}{mL^3}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 27 \cdot 10^{-8}}{50 \cdot 8 \cdot 12}} = 52 \text{ 1/с}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 8,28 \text{ Гц}$$

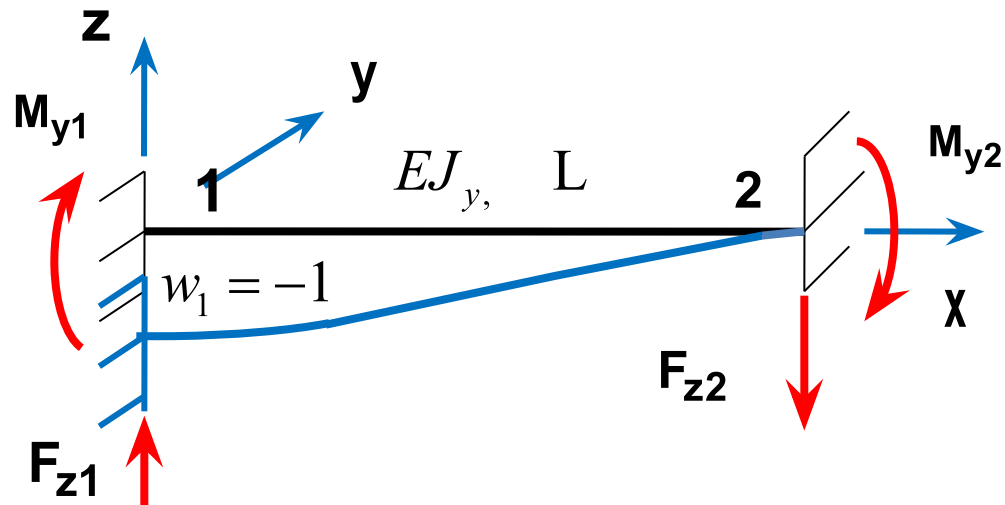
Рассмотрим только вертикальные колебания защемленного по краям стержня с массой  $M$  по середине



$L = 2$  м, сечение прямоугольное шириной  $b = 5$  см и высотой  $h = 3$  см,  
 $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Рассмотрим изгиб балки от вертикального перемещения

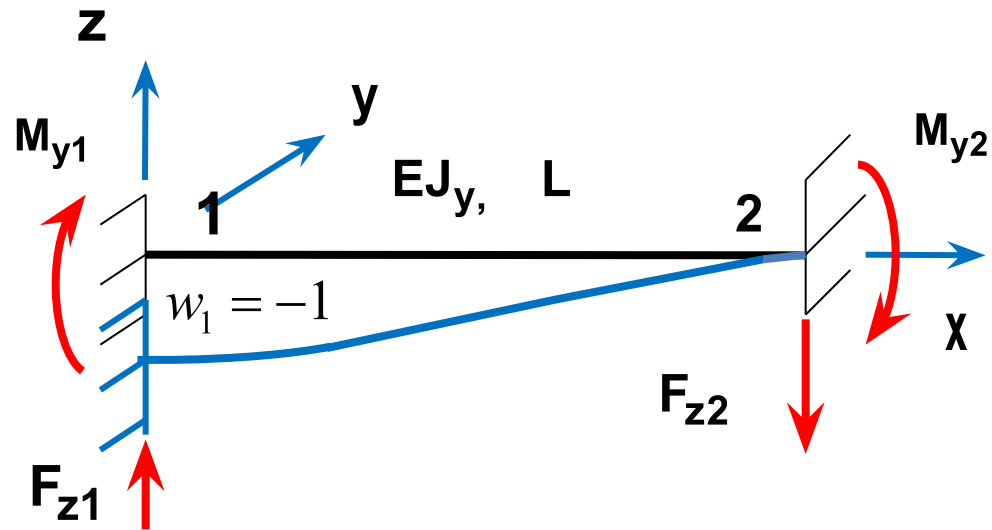


$$w(x) = w_1(0) + \theta_{y1}(0) x - \frac{M_{y1} * x^2}{2EJ_y} - \frac{F_{z1} * x^3}{6EJ_y}$$

$$w_1(0) = -1 \quad \theta_{y1}(0) = 0$$

$$w(x) = -1 - \frac{M_{y1} * x^2}{2EJ_y} - \frac{F_{z1} * x^3}{6EJ_y}$$

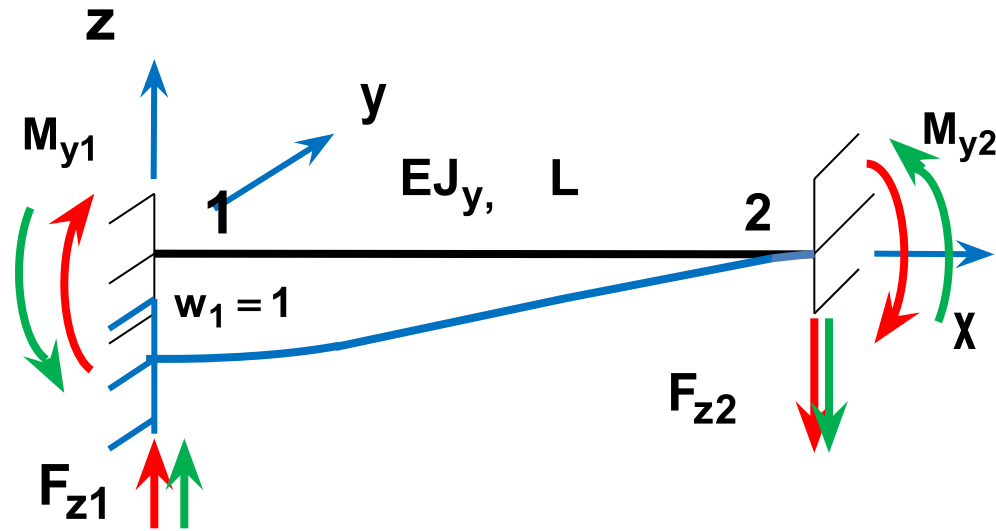
$$w'(x) = -\frac{M_{y1} * x}{EJ_y} - \frac{F_{z1} * x^2}{2EJ_y}$$



$$w_2(L) = 0 \quad \frac{M_{y1} * L^2}{2EJ_y} + \frac{F_{z1} * L^3}{6EJ_y} = -1 \quad \rightarrow \quad F_{z1} = \frac{12EJ_y}{L^3}$$

$$\theta_{y2}(L) = 0 \quad \frac{M_{y1} * L}{EJ_y} + \frac{F_{z1} * L^2}{2EJ_y} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{y1} = -\frac{6EJ_y}{L^2}$$

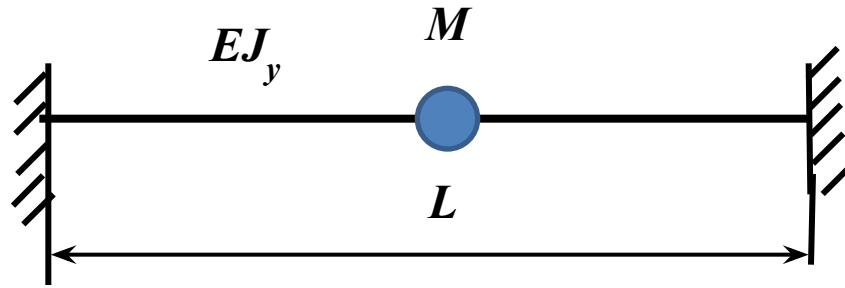




$$F_{z1} - F_{z2} = 0 \quad F_{z2} = \frac{12EJ_y}{L^3} \quad \longrightarrow \quad F_{z1} = \frac{12EJ_y}{L^3} \quad \longrightarrow \quad F_{z2} = -\frac{12EJ_y}{L^3}$$

$$\sum M_{y1} = 0 \quad F_{z2} * L + M_{y1} + M_{y2} = 0$$

$$\frac{12EJ_y}{L^3} * L - \frac{6EJ_y}{L^2} + M_{y2} = 0 \quad \longrightarrow \quad M_{y2} = -\frac{6EJ_y}{L^2} \quad \longrightarrow \quad M_{y2} = -\frac{6EJ_y}{L^2}$$



$L = 2$  м, сечение прямоугольное шириной  $b = 5$  см и высотой  $h = 3$  см,  
 $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг

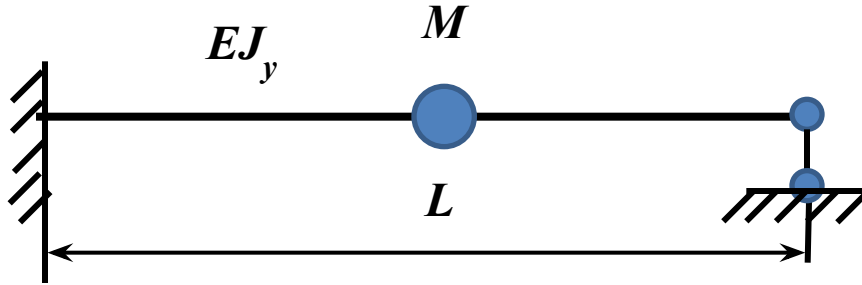
Уравнение для определения собственных частот колебаний

$$|k - \omega^2 m| = 0$$

$$F_{z1} = \frac{12EJ_y}{L^3} \quad k_{z11} = \frac{2 * 12EJ_y}{L^3 / 8} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 12EJ_y}{m * L^3 / 8}} = \sqrt{\frac{192EJ_y}{m * L^3}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 * 12 * 2 * 10^{11} * 5 * 27 * 10^{-8} * 8}{50 * 8 * 12}} = 104 \quad 1/c \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 16,6 \text{ Гц}$$

Рассмотрим только вертикальные колебания статически неопределимой балки с массой  $M$  по середине



$L = 2$  м, сечение прямоугольное шириной  $b = 5$  см и высотой  $h = 3$  см,  
 $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mf}}$$

Единичную податливость методом сил

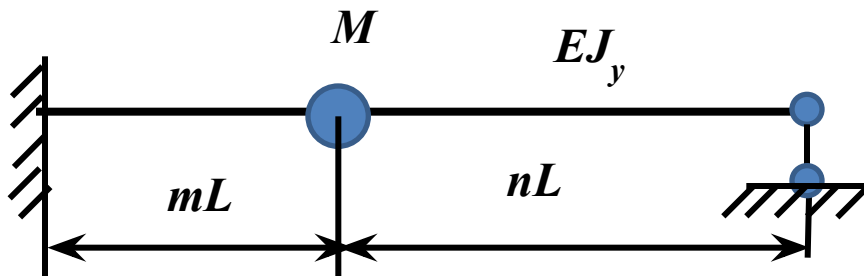
$$f_{11} = \frac{7L^3}{768EJ_y}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{768EJ_y}{m7L^3}} \quad \omega = \sqrt{\frac{768 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 27 \cdot 10^{-8}}{50 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 12}} = 78 \quad 1/c$$

$$f = 12,6 \Gamma\text{ц}$$

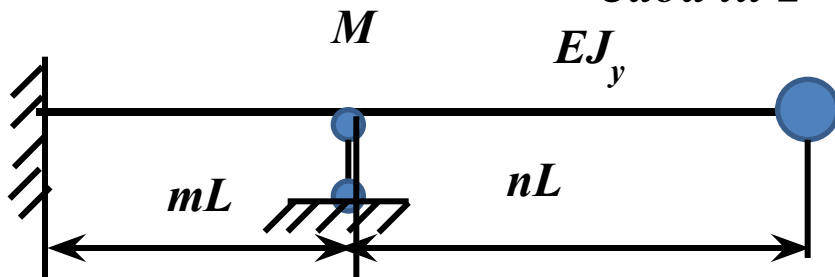
## Задачи для зачета

### Задачи 1



Дано:  $L = 1$  м, сечение круглое  $d = 5$  см,  $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг  
Определить собственную частоту колебаний системы в Гц.

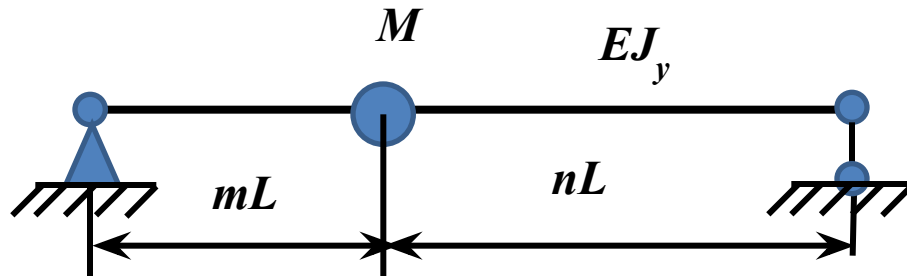
### Задачи 2



Дано:  $L = 1$  м, сечение круглое  $d = 5$  см,  $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг  
Определить собственную частоту колебаний системы в Гц.

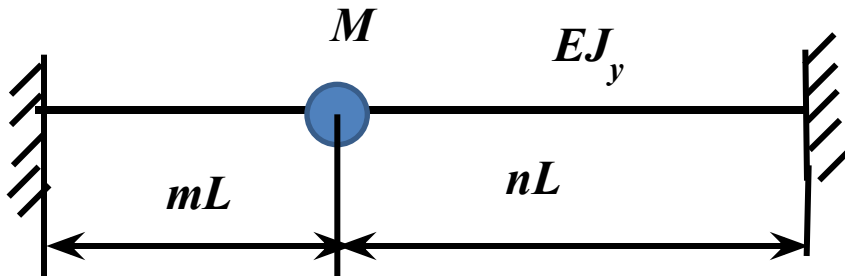
## Задачи для зачета

### Задачи 3



Дано:  $L = 1$  м, сечение круглое  $d = 5$  см,  $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг  
Определить собственную частоту колебаний системы в Гц.

### Задачи 4



Дано:  $L = 1$  м, сечение круглое  $d = 5$  см,  $E = 200\,000$  Мпа,  $M = 50$  кг  
Определить собственную частоту колебаний системы в Гц.