Тема 3. Элементы интегрального исчисления

3.1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные понятия

3.2. Основные методы интегрирования

3.3. Задача о площади. Определенный интеграл –основные понятия

3.4. Вычисление определенного интеграла. Основные свойства

3.5. Несобственные интегралы

- **3.1. Первообразная. Неопределенный интеграл.**
- **Основные понятия**
- **Определения**

Первообразная. Неопределенный интеграл.

Пусть задана дифференцируемая функция F(x).
Определим ее первую производную, *функцию f(x), и дифференциал dF. Получим*

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF}{dx} \quad \textbf{(1)} \qquad dF(x) = f(x)dx \quad \textbf{(2)}$$

В данной задаче *F(x)* задана, а *f(x)* - результат дифференцирования.
Рассмотрим обратную задачу: *Дана функция f(x),* производная от *F*(*x*).
Требуется определить функцию F(x), первообразную функции f(x).
***Определение.* *Первообразной заданной функции f(x) называется функция F(x),* производная которой равна *f*(*x*)**

$$F'(x) = f(x)$$

а дифференциал dF равен : $dF(x) = f(x)dx$

Первообразная. Неопределенный интеграл.

<u>Пример.</u> Пусть задана функция $F(x)=x^3$.

Очевидно, *она является первообразной функции* $f(x)=3x^2$,т. к.

$$f(x) = F'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2$$

Но функция $z=x^3+5$ также будет первообразной для $f(x)=3x^2$, т.к.

$$z' = (x^3 + 5)' = 3x^2$$

<u>Очевидно, что любая функция $F(x) = x^3+c$, где c – произвольная постоянная, имеет производную $3x^2$ и поэтому будет первообразной для $f(x)=3x^2$.</u>

<u>Очевидно, задача нахождения первообразных неоднозначна</u>

Первообразная. Неопределенный интеграл (продолжение)

Справедливо утверждение:

Если функция *F*(*x*) - первообразная функции *f*(*x*) на интервале (*a*,*b*), то всякая другая первообразная функции *f*(*x*) отличается от *F*(*x*) на постоянное слагаемое *c* . представляется в виде *F*(*x*)+*c* ,

Выражение F(x)+c представляет собой общий вид первообразных для f(x), совокупность всех первообразных, семейство первообразных. Совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом функции f(x) и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Операцию вычисления неопределенного интеграла называют интегрированием функции.

Так как $(F(x)+c)' = f(x)$ **то** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Следовательно, если функцию f(x) проинтегрировать, а затем полученный результат продифференцировать, то получим снова функцию f(x).

Дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций

$$\int \left(f(x)+q(x)-h(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int q(x)dx - \int h(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx.$$

- **3.2. Основные методы интегрирования**
- **Таблица интегралов**
- **Методы вычисления неопределенных интегралов**

Основные методы интегрирования

Вычисление неопределенного интеграла - задача значительно более сложная, чем отыскание производной.
Нет никаких общих правил для нахождения неопределенных интегралов от произведений или частного двух функций. Нет общего правила интегрирования сложной функции.
Кроме того, интегралы от некоторых элементарных функций, например, интегралы от функций

$$\exp(-x^3), \qquad \frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{1}{\ln x}$$

не являются элементарными, не берутся в элементарных функциях.
Для вычисления неопределенных интегралов используют:

- табличные интегралы;
- преобразования подынтегрального выражения
- различные методы интегрирования

Таблица основных интегралов, с - константа

1. $\int dx = x + c, c$ **с - константа**

- **2.** $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
- **3.** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- **4.** $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$
- **5.** $\int e^{x} dx = e^{x} + c$
- **6.** $\int \cos x dx = \sin x + c$
- **7.** $\int \sin x dx = -\cos x + c$

- 8. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

- 9. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} - -ctgx + c$$

- 10. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctgx + c$$

- 11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

- 12. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$$

Методы вычисления неопределенных интегралов.

В рамках изучаемой дисциплины рассматриваются следующие *методы* вычисления неопределенных интегралов:

1. **Преобразование подынтегрального выражения**
2. **Ввод новой переменной интегрирования**
3. **Метод интегрирования по частям**
4. **Метод интегрирования рациональной функции**

1. Метод преобразования подынтегрального выражения (подынтегральной функции)

Пример 1.1. Вычислить $\int \frac{dx}{3^x}$

Решение. **Преобразованием подынтегральной функции**

сведем интеграл $\int \frac{dx}{3^x}$ **к табличному** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C$

$$\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \int a^x dx = \frac{(1/3)^x}{\ln(1/3)} + C$$

1. Метод преобразования подынтегрального выражения (подынтегральной функции)

Пример 1.2. Вычислить $\int 2^{3x-1}dx$

Решение. **Преобразуем подынтегральную функцию**

$$2^{3x-1} = 2^{3x} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \left((2)^3\right)^x = \frac{1}{2} \cdot 8^x$$

Тогда

$$\int 2^{3x-1}dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{8^x}{\ln 8} + C$$

2. Ввод новой переменной интегрирования.

Вместо переменной интегрирования x вводят новую Переменную интегрирования *t* , интеграл сводят к более простому, например, к табличному.

Пусть *x*=φ(*t*), где φ(*t*) - непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную . Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

2. Ввод новой переменной интегрирования.

Пример 2.1. Вычислить

$$\int \sqrt{1-3x}dx.$$

Решение. Введем новую переменную t=1-3x. ***Продифференцируем по* x. Тогда *dt*= - 3*dx и*** $dx=-\frac{dt}{3}.$

Подставим найденные выражения в интеграл и получим

$$\int \sqrt{t}\cdot(-\frac{dt}{3})=-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$\frac{-1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot t^{\frac{1}{2}+1}=-\frac{2t\sqrt{t}}{9}+c$$

Ответ

$$\int \sqrt{1-3x}dx=-\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x}+c$$

Пример 2.2. **Вычислить интеграл**

$$\int \sin(4x+2)dx$$

Решение. Сделаем замену переменной *t*=4*x*+2. Тогда

$$dt = 4dx, dx = \frac{dt}{4}, \int \sin(4x+2)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt$$

$$\int \sin(4x+2)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt = \frac{1}{4}\cdot(-\cos t) = -\frac{1}{4}\cos(4x+2)+c$$

Пример 2.3. **Вычислить** $\int x \cdot e^{x^2} dx$

Решение. Введем новую переменную $t=x^2$

Тогда

$$dt = 2x \cdot dx, x \cdot dx = \frac{dt}{2},$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

3. *Метод интегрирования по частям.*

Дан интеграл $\int f(x)dx$

где подынтегральное выражение представляет собой произведение некоторой функции ***u*(*x*)** на дифференциал другой функции ***d*v(*x*)**, то есть подынтегральное выражение

$$f(x)dx = u(x)dv(x).$$

Тогда

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$$

Эта формула называется ***формулой интегрирования по частям.***

Методом интегрирования по частям решены задачи 3.1 и 3.2

Пример 3.1. **Найти** $\int x \sin 2x dx$

Решение. **Пусть** $u = x, dv = \sin 2x \cdot dx$

Чтобы применить формулу интегрирования по частям найдем *du* и *v*(*x*)

$$du = dx, v = \int dv = \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}$$

Подставим в формулу интегрирования по частям и получим:

$$\int x \sin 2x dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Пример 3.2. **Найти** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Решение. **Пусть** $\ln x = u, dv = \frac{dx}{x^2}$

Тогда

$$du = \frac{dx}{x},$$

$$v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

4. Метод интегрирования рациональных функций

Рациональной функцией или *рациональной дробью называется функция которая равна частному от деления двух многочленов (полиномов) переменной х..*

Многочленом называется функция вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Старшая степень ***n*** переменной *x* называется *степенью многочлена*, а числа a_0 , a_1, a_2,…a_n - его коэффициентами

Если $P_n(x)$ - многочлен степени *n*, а $Q_m(x)$ - многочлен степени *m*,

то функция

$$P(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

называется *рациональной функцией* или *рациональной дробью.*

«Правильной» рациональной дробью называют рациональную функцию, у которой степень ***n*** числителя меньше степени ***m*** знаменателя.

Пример 4.1.

Найти

$$\int \frac{1+2x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Решение. **Разобьем сначала интеграл на сумму двух интегралов, из которых первый найдем сразу, а второй вычислим после простых преобразований:**

$$\int \frac{1+2x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{dx}{(1+x)^2} + 2\int \frac{xdx}{(1+x)^2} = \int (1+x)^{-2}dx + 2\int \frac{(x+1)-1}{(1+x)^2}dx;$$

$$\int \frac{1+2x}{(1+x)^2}dx = -\frac{1}{1+x} + 2\ln|1+x| + \frac{2}{1+x} = 2\ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + c.$$

Пример 4.2 **Найти** $\int \frac{x^2+2x+4}{x+2}dx.$

Решение. **Подынтегральная функция** $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$

не является правильной дробью. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int \frac{x^2+2x+4}{x+2}dx = \int \frac{x(x+2)}{x+2}dx + 4\int \frac{dx}{x+2} =$$

- $$= \int \int xdx + 4\ln|x+2| = \frac{x^2}{2} + 4\ln|x+2| + c$$

Пример 4.3. Найти $\int \frac{dx}{x(x-8)}$.

Решение. Представим подынтегральную функцию как сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x(x-8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-8}$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю. Получим

$$\frac{1}{x(x-8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-8} = \frac{A(x-8)+Bx}{x(x-8)} = \frac{x(A+B)-8A}{x(x-8)}.$$

Равенство должно выполняться при любых значениях переменной х. Так как знаменатели равны, то должны быть равны и числители. Тогда

$$A+B=0, -8A=1, A=-\frac{1}{8}, B=\frac{1}{8}.$$

- **Теперь интеграл сведется к сумме двух интегралов**

$$\int \frac{dx}{x(x-8)} = -\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-8} = -\frac{1}{8}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|x-8| = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-8}{x}\right| + c$$

- **3.3. Определенный интеграл**
- **Задача о площади.**
- **Определенный интеграл –основные понятия**

3.3. Задача о площади. Понятие определенного интеграла

Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции CABD. Трапеция ограничена осью OX, двумя вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$, а сверху – графиком функции $f(x)$.
Предполагается, что **$f(x)$ непрерывна и положительна на интервале $[a,b]$.**
Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0$, x_1, x_2,…,$x_n=b$ на n равных частей.
Получим n малых отрезков одинаковой длины $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,…,$[x_{n-1}, x_n]$ одинаковой длины.
Обозначим длину каждого отрезка Δx_k , k=1, 2,…n . Очевидно,

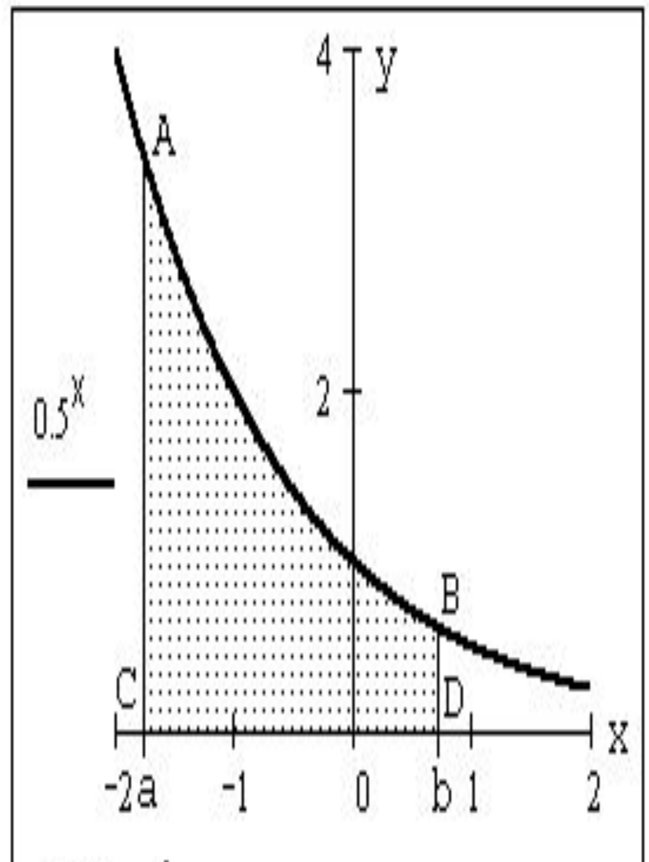


Рис. 1

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}.$$

Проводя через точки деления прямые, параллельные оси OY, разобьем криволинейную трапецию CABD на *n* малых криволинейных трапеций Обозначим через ΔS_k - площадь малой криволинейной трапеции, а через *S* площадь всей криволинейной трапеции, то

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n \qquad S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k .$$

Заменим площадь ΔS_k каждой малой криволинейной трапеции площадью

$$\Delta S_k' = f(x_k) \cdot \Delta x_k , r = 1,2,\ldots,n.$$

соответствующего прямоугольника (рис. 2), с основанием Δx_k и высотой , равной значению функции *f*(*x*) в конце интервала разбиения

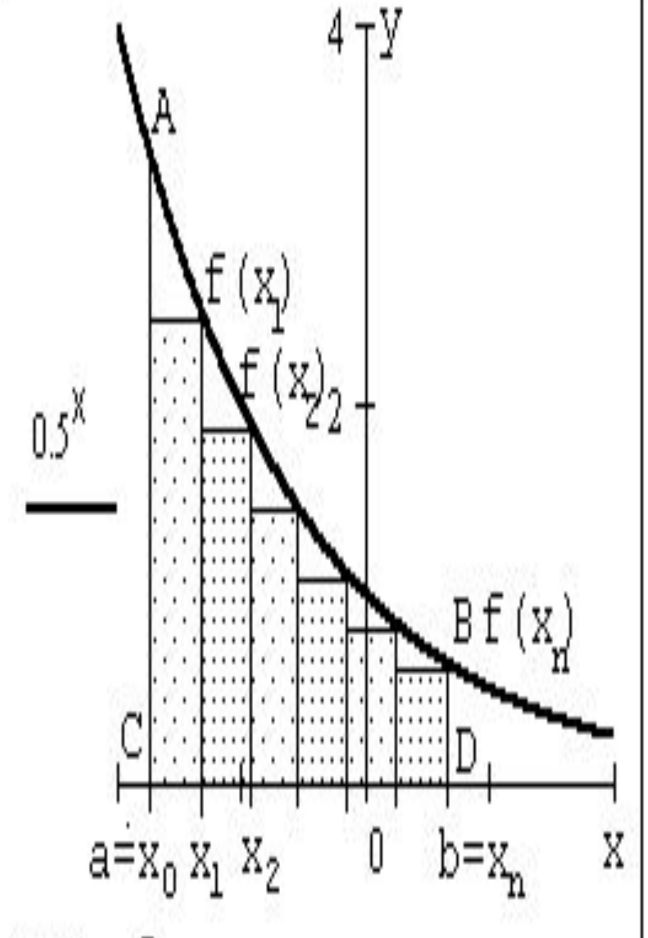


Рис. 2

Очевидно, что $\Delta S_k \approx \Delta S_k'$ **и искомую площадь можно приближенно представить суммой площадей прямоугольников, что равносильно замене функции** ***f***(***x***) **ступенчатой функцией .**

$$S \approx f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k .$$

Ясно, что чем меньше длина промежутков $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots n$ **, тем точнее ступенчатая фигура приближает (аппроксимирует) криволинейную трапецию.**

За точное значение площади ***S*** **криволинейной трапеции принимают предел последовательности площадей ступенчатых фигур, когда** $n \to \infty$ **и все длины** Δx_k **стремятся к нулю.**

.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k .$$

Сумма вида $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$ ***называется интегральной суммой***

<u>Предел</u>, к которому стремится последовательность интегральных сумм при n→∞ , называется <u>определенным интегралом</u> функции f(x) на отрезке [a, b]. Определенный интеграл функции f(x) на интервале [a, b] обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

- **В записи определенного интеграла**

$$\int_a^b f(x)dx.$$

числа *a* и *b* - соответственно *нижний и верхний пределы интегрирования*, *f*(*x*) - *подынтегральной функцией*, отрезок [*a*, *b*] - *область интегрирования*.
Если функция *f*(*x*) - непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то определенный интеграл существует (достаточное условие).

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y= f(x), где f(x)≥0 на всем отрезке [a, b], численно равна определенному интегралу .
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y= f(x), где f(x) <=0 на всем отрезке [a, b], численно равна определенному интегралу, взятому со Знаком минус .

- **3.4. Вычисление определенного интеграла. Основные свойства**

- **Для вычисления определенного интеграла применяют формулу *Ньютона-Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- **Эта формула справедлива, если *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*] и *F*(*x*) - одна из ее первообразных.**
- **Разность *F*(*b*) - *F*(*a*) символически обозначают** $F(x)\Big|_a^b$
- ***Пример:* вычислить определенный интеграл функции 2^x на интервале [0, 1],**

$$\int_0^1 2^x dx$$

- **Первообразная для 2^x ,** $\int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2}$
- **Тогда** $\int_0^1 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^1 = \dfrac{2}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}$

- **Основные свойства определенного интеграла**

- 1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0.$$
- 2. $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$
- 3. $$\int_a^b \big(f(x) \pm q(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b q(x)dx.$$
- **4. Если интервал интегрирования [*a*, *b*] разбит на части [*a*,*c*] и [*c*, *b*], то**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

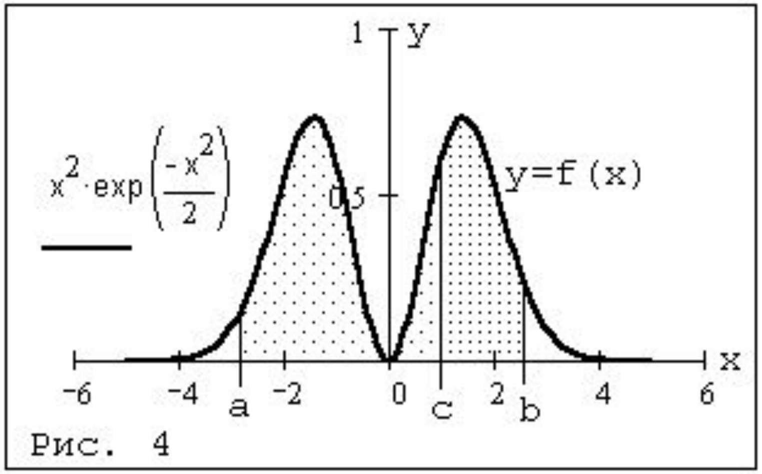


Рис. 4

- 5. Если функция $f(x) \geq 0$ на интервале $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Если $f(x) \leq 0$ и $b \geq a$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- 6. Если для всех $x \in [a,b]$ выполняется $f(x) \leq g(x)$
- то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b q(x)dx$$

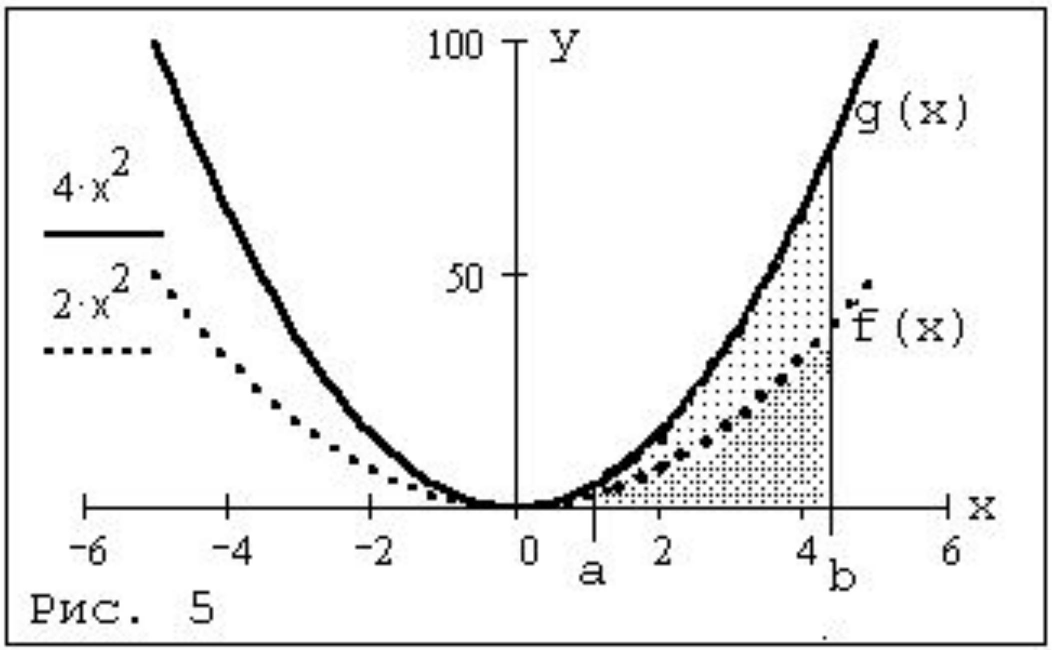


Рис. 5

- **Теорема о среднем значении.**

- Если *f*(*x*) - непрерывна на [*a*, *b*] , то на этом отрезке существует точка ξ $a \le \xi \le b$ такая, что прямоугольник с основанием *b* - *a* и высотой f(ξ) равновелик площади криволинейной трапеции (рис. 6).

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

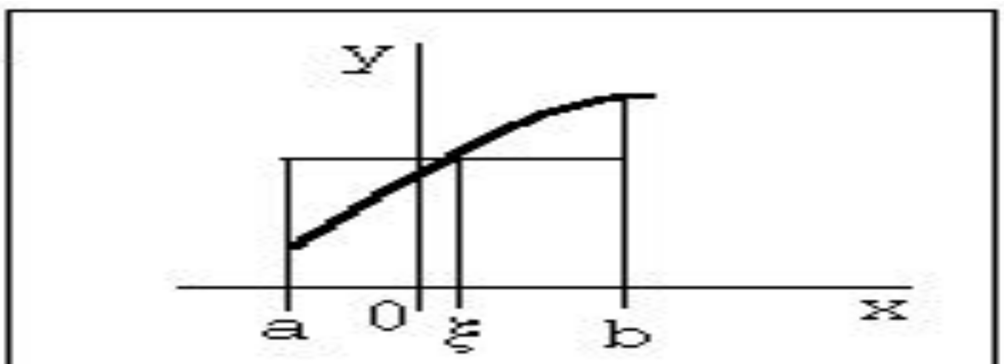


Рис. 6

- **Примеры вычисления определенного интеграла**

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Решение. Воспользуемся методом замены переменной. Обозначим

$x = \sin t$, тогда $dx = \cos t\,dt$

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной нет необходимости возвращаться к старой переменной, необходимо пересчитать пределы интегрирования.

В нашем примере при x=0 t=0 т.к. sin(0)=0; при =0; при x=1

Пределы интегрирования по переменной

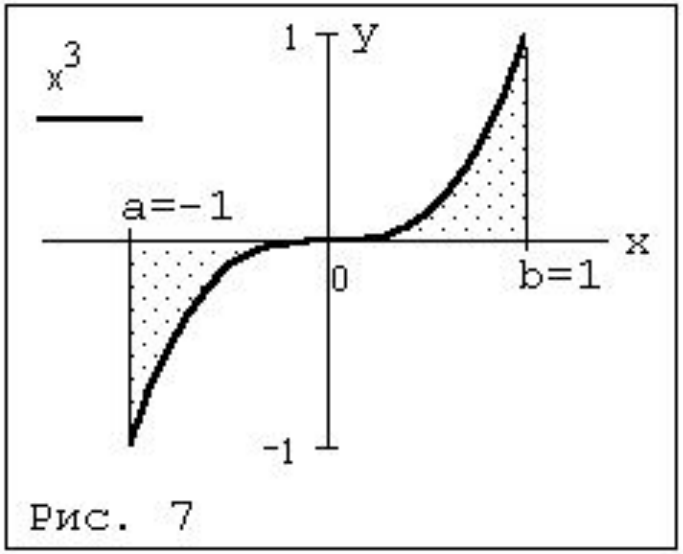
Если x = 0, то sin(t) =0; t=0. Если x = 1, то $\sin t = 1 \quad t = \frac{\pi}{2}$

Тогда

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Пример 2. Вычислить $\int_{-1}^{1} x^3 dx$

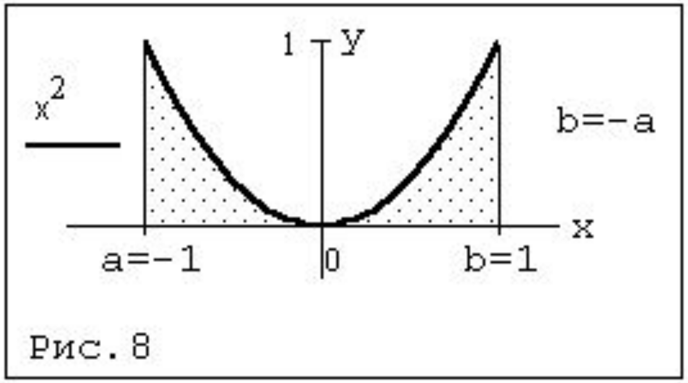


Решение. Подынтегральная функция $y = x^3$ - нечетная, а область интегрирования – отрезок, симметричный относительно начала координат.

Из геометрических соображений (рис. 7) такой интеграл будет равен нулю:

$$\int x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Если $f(x)$- функция четная, а отрезок интегрирования [-a, a], то можно вычислить интеграл от 0 до a и полученный результат удвоить:



$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \left.\frac{2}{3}x^3\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

- **Пример 3.** Вычислить $\int_0^1 x \cdot e^x dx$
- **Решение**. Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

- Возьмем в качестве $u = x, dv = e^x dx$
- Тогда $du = dx, v = e^x$

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$$

3.5. Несобственные интегралы

Определение термина «Определенный интеграл» было дано в предположении, что промежуток интегрирования [*a*, *b*] конечен и функция *f*(*x*) непрерывна на нем.

Рассмотрим случай, когда промежуток интегрирования бесконечен. Например, в теории вероятностей большую роль играют интегралы

$$\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \int_{-\infty}^{a} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Такие интегралы называют *несобственными.*

Пример. **Функция** $y = \frac{1}{x^2}$ **непрерывна на бесконечном интервале**

.

$[1,+\infty)$

Если ***A*** **- любое конечное число,** ***A*** **> 1 , то существует интеграл**

$$\int_1^A \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{A}$$

который при $A \to +\infty$ **имеет предел, равный единице.**

Этот предел называют ***несобственным интегралом функции***

$$y = \frac{1}{x^2}$$

на бесконечном интервале $[1,+\infty)$ **и обозначают символом**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Таким образом $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$$

- Аналогично определяется несобственный интеграл на интервалах $(-\infty, b], (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B \to -\infty} \int_{B}^{b} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

- Для несобственных интегралов сохраняются основные свойства определенных интегралов.
- Так как несобственный интеграл вычисляется как предел, то он может быть конечным, тогда интеграл сходится, или бесконечным. Во втором случае несобственный интеграл

  расходится