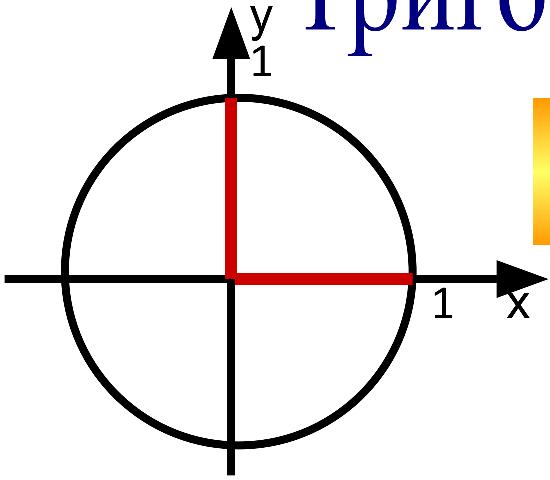
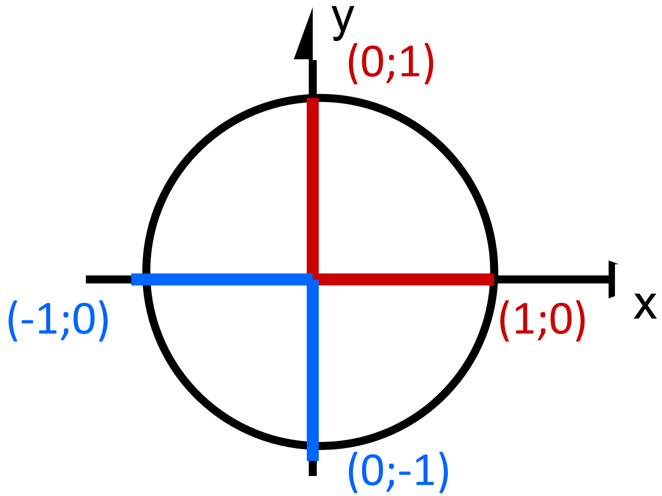
Тригонометрический круг

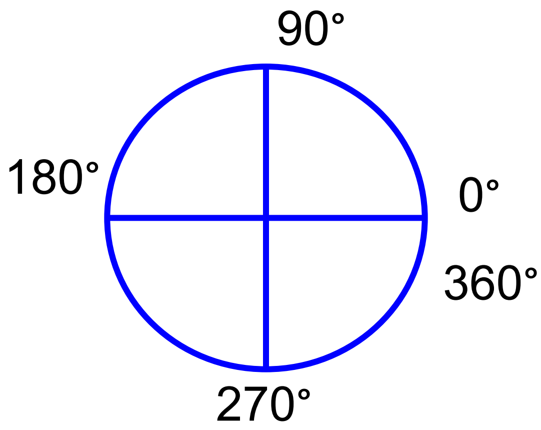


Тригонометрический круг – это круг с радиусом равным единице и с центром в начале координат.

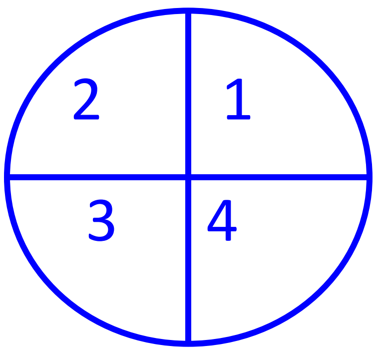
Радиус R = 1



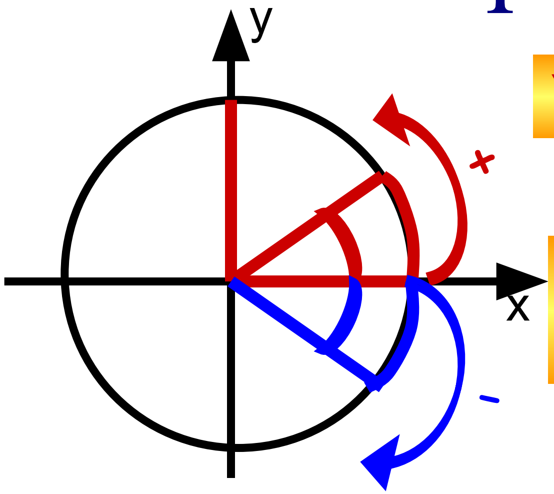
Градусная мера углов



Четверти круга



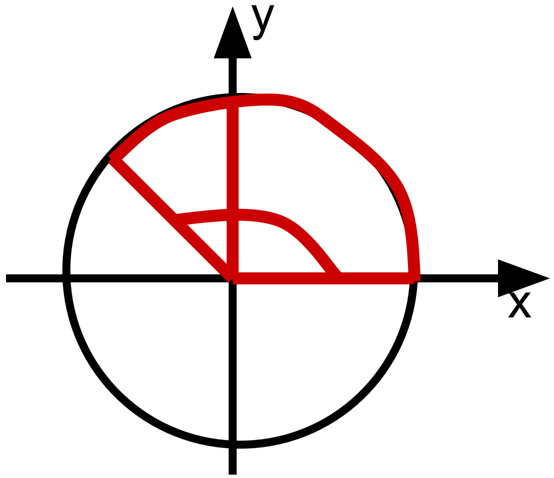
Углы на тригонометрическом круге

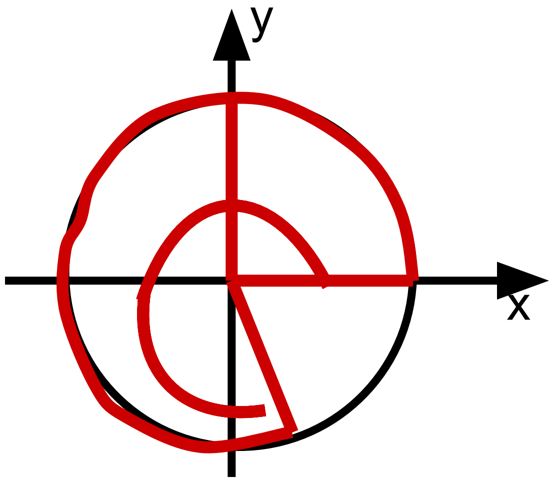


Угол на круге определяется поворотом радиуса

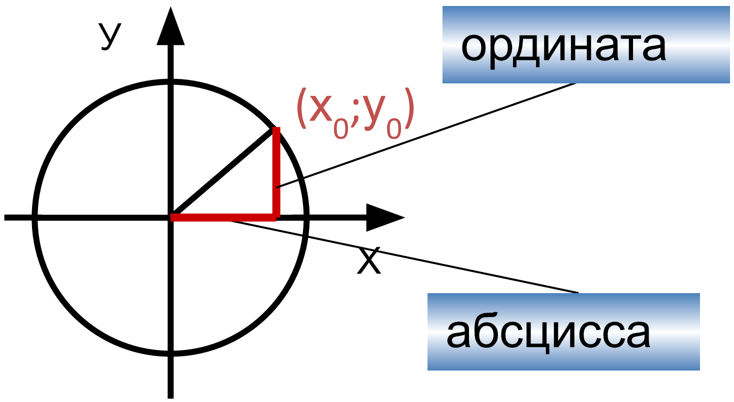
За нулевое положение радиуса принято его положение на положительном направлении оси X.

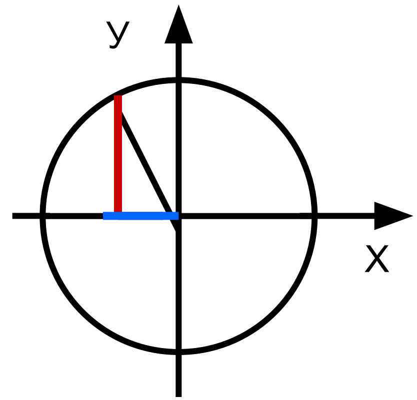
Угол поворота радиуса отсчитывается от положительного направления оси X: с плюсом - против часовой стрелки, с минусом - по часовой стрелке.

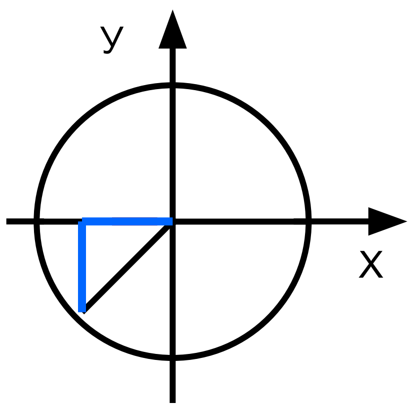


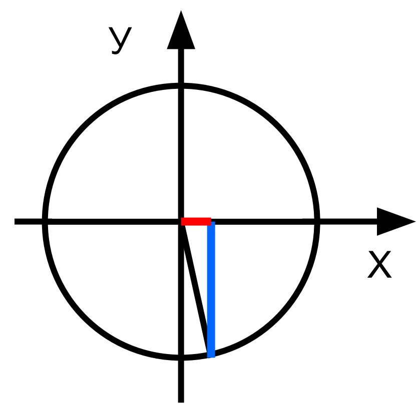


Координаты положения радиуса



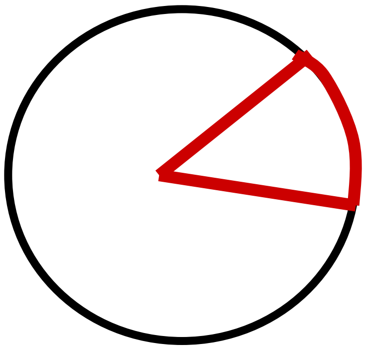






Радианная мера угла

Один радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу равную радиусу



Длина окружности $2\pi R$

В окружности $2\pi R : R = 2\pi$ радиан

2π соответствуют 360°

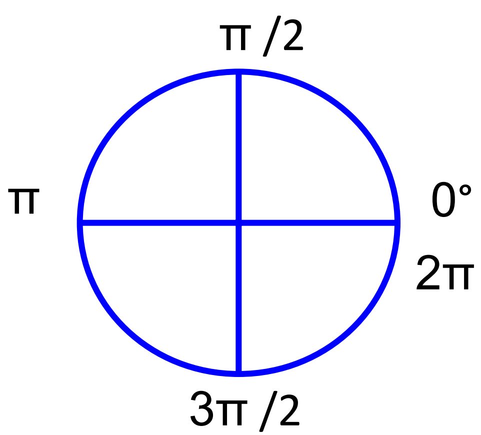
2π --------------- 360°

π --------------- 180°

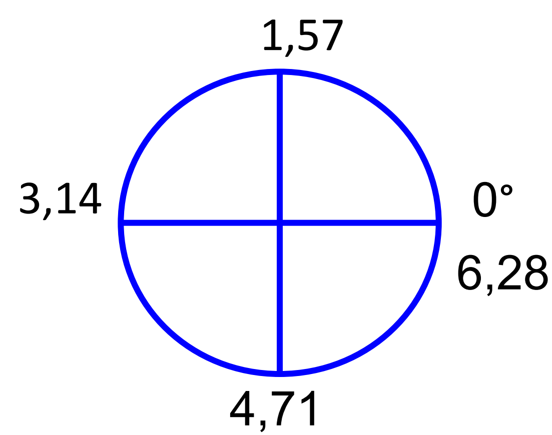
$90° = 180° /2 = \pi /2$

$270° = 90° \cdot 3 = 3\pi /2$

Радианная мера углов в круге



Так как $\pi = 3,14\ldots$, то



Перевод градусов в радианы

Для перевода в радианы удобно пользоваться пропорцией.

π --------------- 180°

Перевести 120° в радианы.

180° ------------------ π

120° ------------------ x

$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{120}}{}^{\circ} \cdot \pi}{\underset{3}{\cancel{180}}{}^{\circ}} \qquad x = \frac{2\pi}{3}$$

Запомните!

30° = π /6

45° = π /4

60° = π /3

Перевод радиан в градусы

Подставьте вместо π 180° и сократите

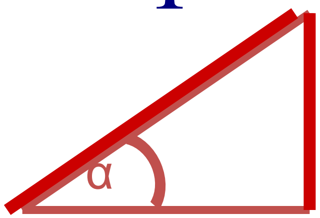
Перевести 3π /4 в градусы.

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$$

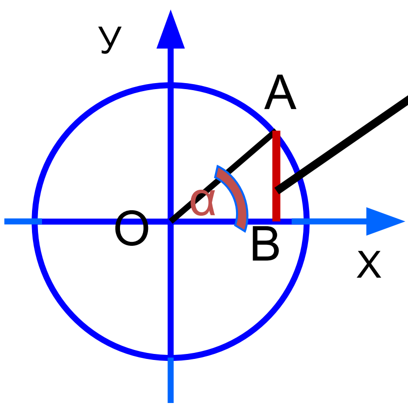
Определение тригонометрических функций

Повторение

sinα



$$\sin\alpha = \frac{\textit{противолеж.катет}}{\textit{гипотенуза}}$$



ордината

Заметим, OA = R = 1

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = AB$$

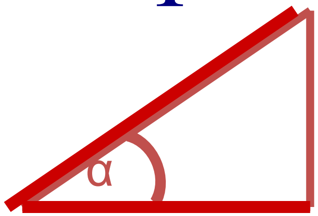
Синусом угла α является ордината точки A на круге, получающаяся при повороте радиуса на угол α.

Синус угла α – это ордината (у) угла α

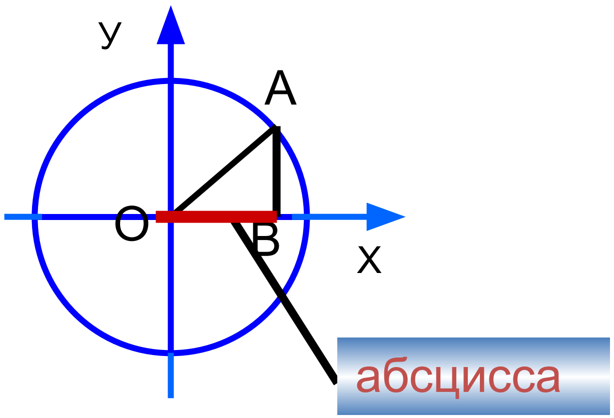
Определение тригонометрических функций

Повторение

cosα



$$\cos\alpha = \frac{\textit{прилеж.катет}}{\textit{гипотенуза}}$$



Заметим, ОА = R = 1

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = OB$$

Косинусом угла α является абсцисса точки А на круге,
получающаяся при повороте радиуса на угол α.

Косинус угла α – это абсцисса (х) угла α

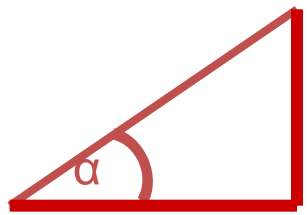
Определение тригонометрических функций

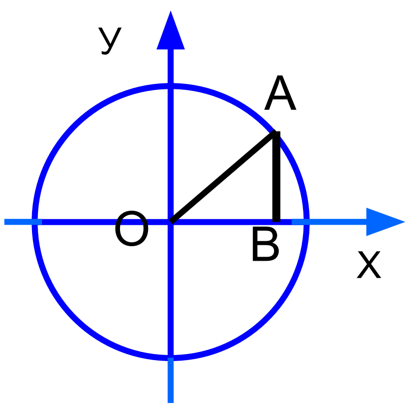
tgα, ctgα

Повторение

$$tg\alpha = \frac{противолеж.катет}{прилеж.катет}$$

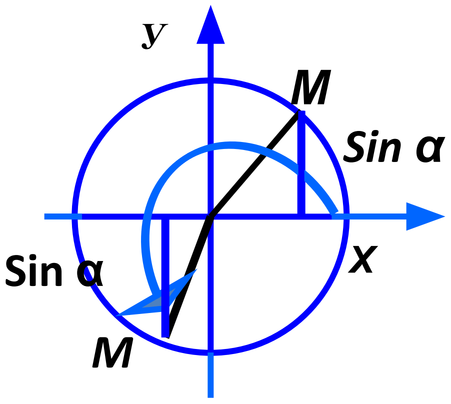
$$ctg\alpha = \frac{прилеж.катет}{противолеж.катет}$$





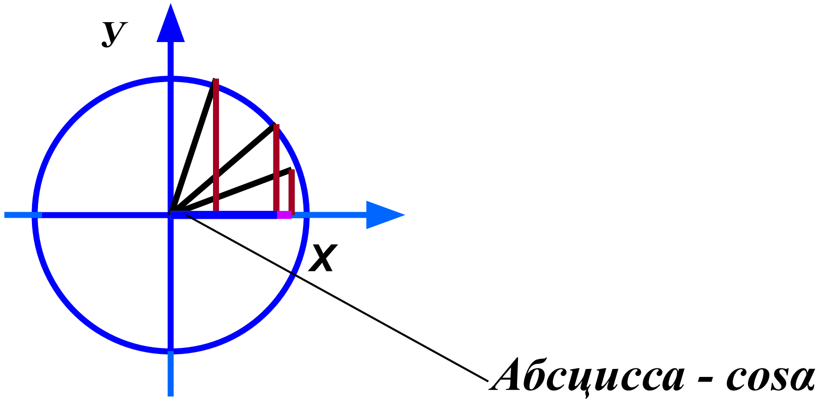
$$tg\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

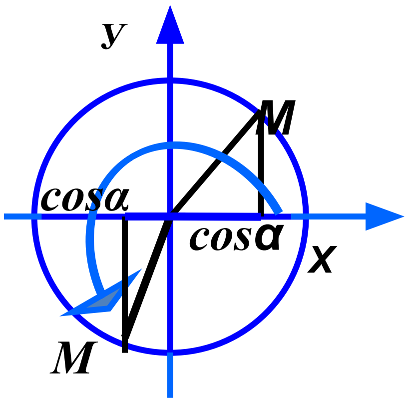


Запомни! Синус – это ордината (у)

cosα

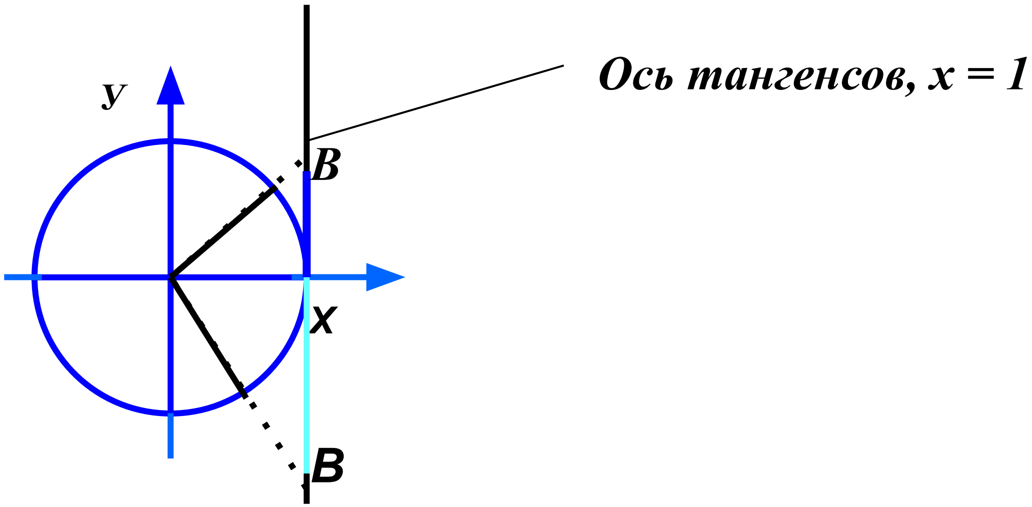


2) Косинусом угла α является абсцисса точки М на тригонометрическом круге, получающаяся при повороте радиуса на угол α.



Запомни! косинус – это абсцисса (х)

tgα

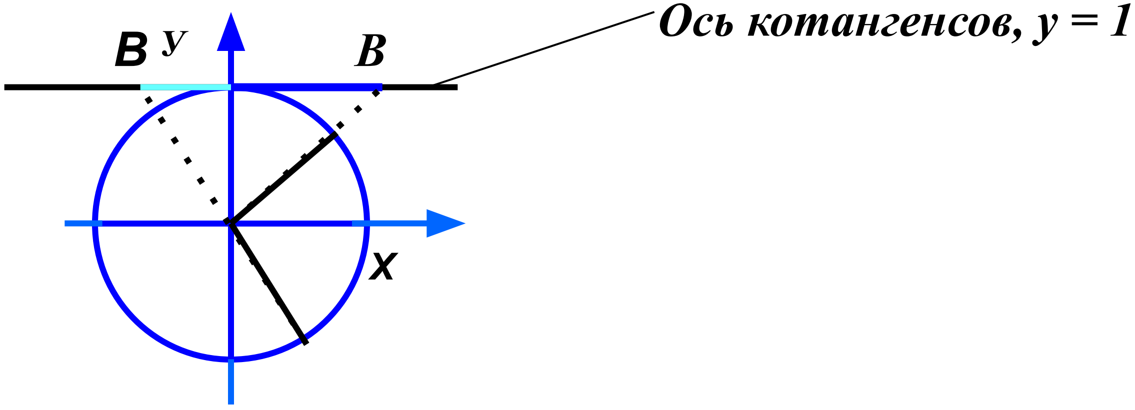


3) Тангенсом угла α является ордината точки В на оси тангенсов (х = 1), получающаяся при пересечении продолжения радиуса с осью тангенсов при повороте радиуса на угол α.

$$3)\,tg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ctgα



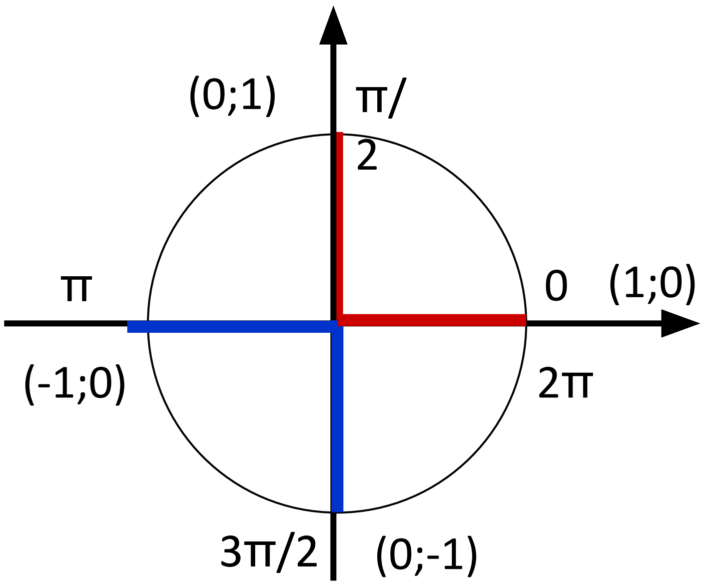
4) Котангенсом угла α является абсцисса точки В на оси котангенсов (у = 1), получающаяся при пересечении продолжения радиуса с осью котангенсов при повороте радиуса на угол α.

$$4)\ ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Значения тригонометрических функций

Диаметральные углы



Красная линия - это плюс

Синяя – это минус

	0	*π/2*	*π*	*3π/2*	*2π*
y	0	1	0	-1	0
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0
x	1	0	-1	0	1
tg	0	-	0	-	0
ctg	-	0	-	0	-

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Значения тригонометрических функций

Табличные значения

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ряд синуса

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Запомни!!

Для косинуса поменяйте крайние значения

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ряд тангенса

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Для котангенса поменяйте крайние значения

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Свойства триг. функций

Знать

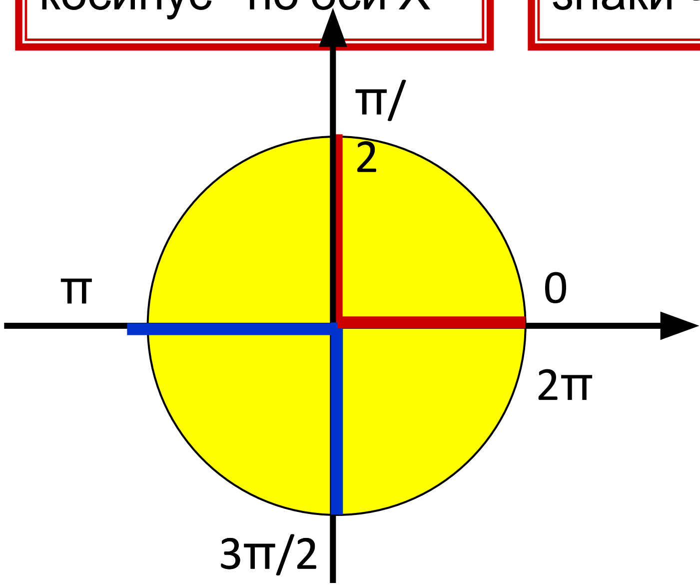
1. Знаки по четвертям

Синус: знаки соответствуют знакам по оси У, косинус –по оси Х

Тангенс и котангенс в 1 четв.- плюс, далее знаки чередуются

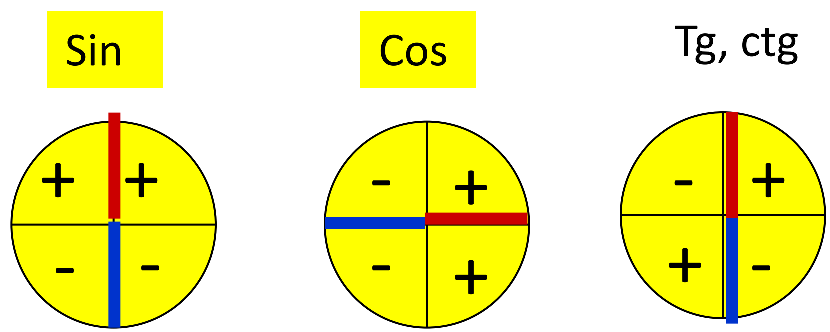
Уметь

1. Определять четверть нахождения угла; 2. Определить знак функции.



Красная линия - это плюс

Синяя – это минус



sin315º < 0, т.к угол 3 четв.
tg5π/6 <0, угол 2 четв.
$\cos^2 11\pi/4 > 0$, т.к Cos^2

5. Множество значений функций

Уметь находить множество значений функции, выражения

-1 ≤ sin x ≤ 1, или |sinx | ≤ 1,

-1 ≤ cos x ≤ 1, или |cosx | ≤ 1,

tgx € R, ctgx € R,

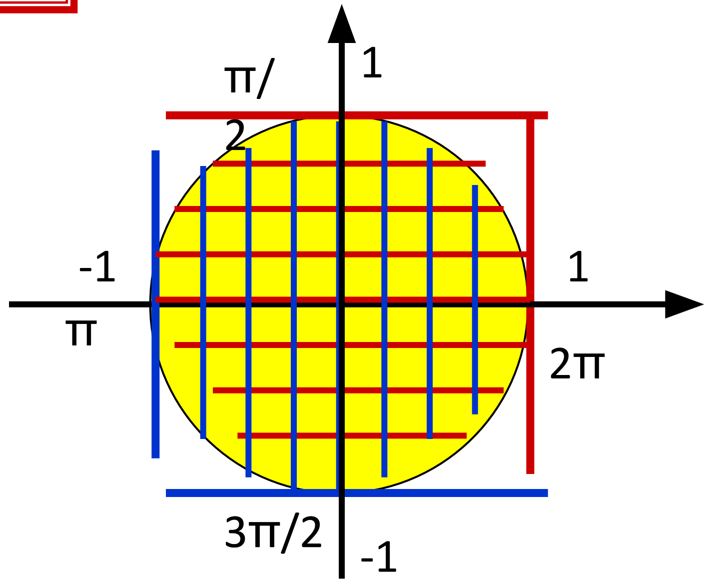
y = 3 -2sinx. E(y) = (1;5)

sinx = -1, y = 3+2 = 5

sinx = 1, y = 3-2 = 1

|sinx | ≤ 1

|cosx | ≤ 1



Период

Период – это число, при прибавлении которого к аргументу значение функции не изменяется.

$f(x+T) = f(x)$

Если T – период, то Tn для n € Z тоже период. Считается T – наименьший период

Так как $f(x+Tn) = f(x)$, то Tn можно опустить

sin, cos T = 2π

tg, ctg T = π

Примеры

1. sin 390º = sin (360º + 30º) = sin 30º = ½
2. sin 790º = sin (2·360º + 30º) = sin 30º = ½
3. tg 210º = tg (180º + 30º) = tg 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. cos 7π/3= cos (2π + π/3) = cos π/3 = ½
5. cos (2π – β) = cos (-β) = cos β
6. sin (6π – 2α) = sin (-2α) = - sin 2α

Четность, нечетность

Синус, тангенс, котангенс – функции нечетные.

Минус у угла можно вынести за знак функции

Косинус – функция четная.

Минус у угла можно опустить

Примеры

1. sin (– x) = - sin x

2. sin (π/4 – x) = - sin (x - π/4)

3. tg (- π/6) = - tg π/6 = - $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. cos (-7π/3)= cos 7π/3 = cos (2π + π/3) = cos π/3 = ½

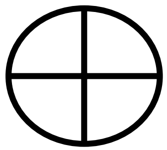
5. cos (-β) = cos β

6. ctg (2α - π/2) = - ctg (π/2 - 2α)

Область определения

Синус, косинус

$D(y) = R$



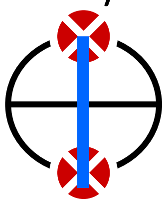
Функции непрерывны на R

Тангенс

$D(y) = R,\ x \neq \pi/2 + \pi n$

$x = \pi/2 + \pi n$ – вертикальная асимптота

π/2



3π/2

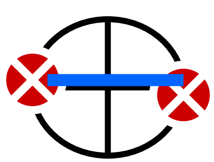
tgx – определен при cosx ≠ 0

Котангенс

$D(y) = R,\ x \neq \pi n$

$x = \pi n$ – горизонтальная асимптота

π



0

ctgx – определен при sinx ≠ 0