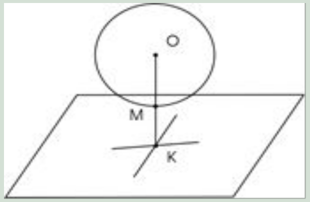
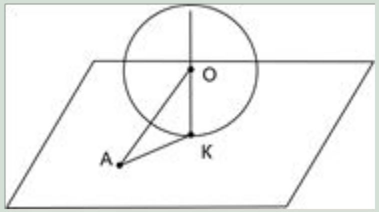
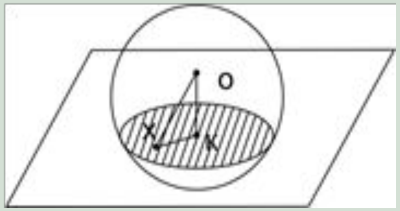
Шары и многогранники

презентация к лекции

В.П. Чуваков

Взаимное расположение шара и плоскости

Если расстояние от центра шара до плоскости больше радиуса, то шар и плоскость не имеют общих точек.	Если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу, то шар и плоскость имеют единственную общую точку и плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания	Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса , то пересечение шара и плоскости есть круг радиуса
		 $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Описанные сферы

Определение: **Сфера описана около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере**
Свойство: центр сферы равноудален от всех вершин многогранника

Описанные сферы

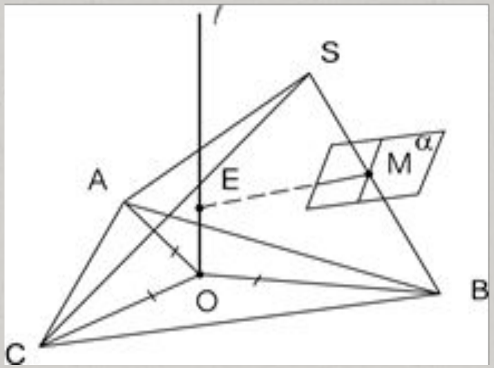
Определение: **Плоскость, проходящая через середину отрезка АВ перпендикулярно этому отрезку называется серединной перпендикулярной плоскостью.**
Свойство: Каждая точка серединной перпендикулярной плоскости равноудалена от концов отрезка.

Описанные сферы

Определение **Сфера описана около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере**
Свойство: центр сферы равноудален от всех вершин многогранника
Свойство: Центр описанной сферы – точка пересечения серединных перпендикулярных плоскостей всех ребер многогранника.

Теорема 1. **Около произвольной треугольной пирамиды можно описать сферу**

В произвольной треугольной пирамиде серединные перпендикулярные плоскости всех ребер имеют единственную общую точку, равноудаленную от всех вершин пирамиды. Общая точка является центром сферы, описанной около треугольной пирамиды

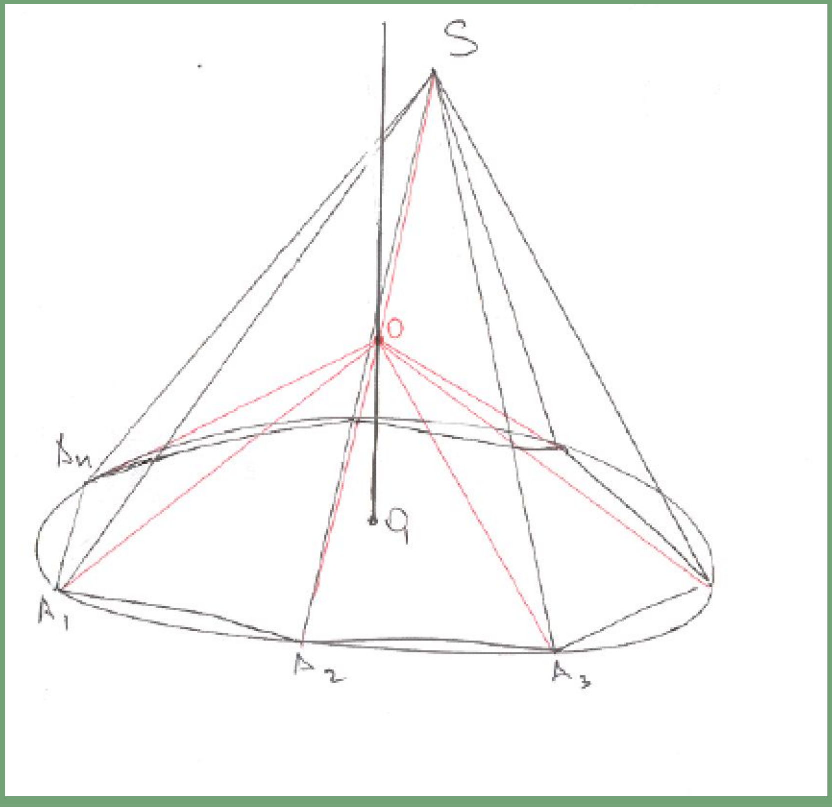


Описанные сферы

Утверждение 2. Пусть $SA_1 \ldots A_n$ – произвольная пирамида с основанием $A_1 \ldots A_n$. Вокруг пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда вокруг основания можно описать окружность.

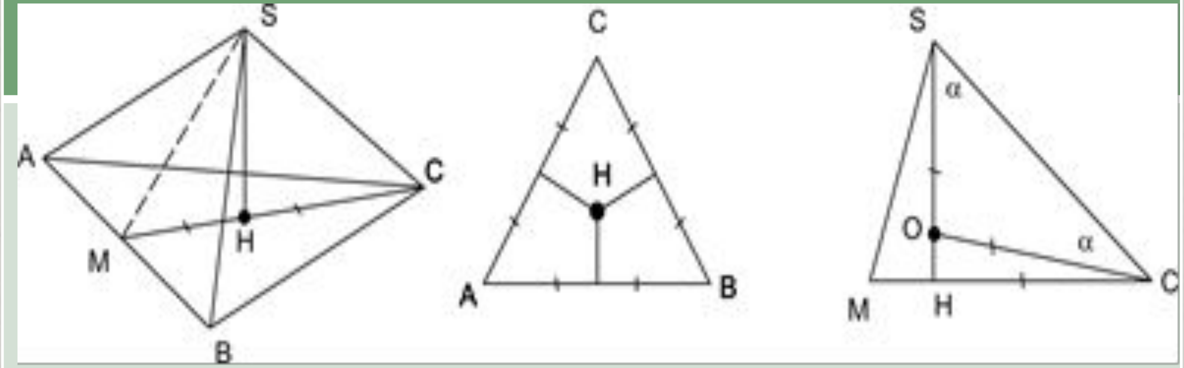
Свойство: **Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на перпендикуляре, проведенном через центр окружности, описанной около основания**

Описанные сферы

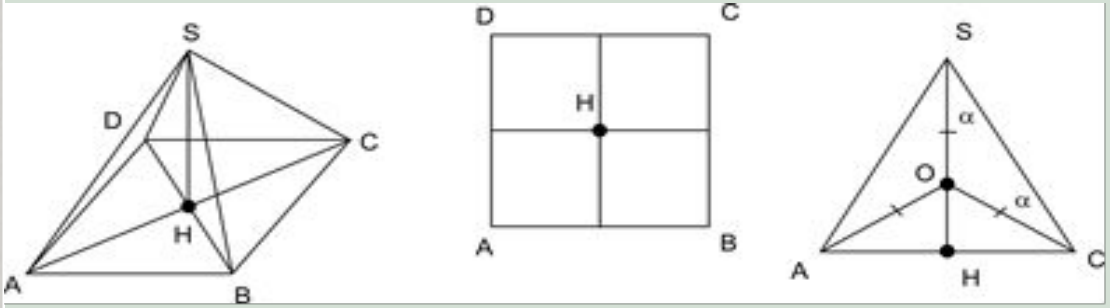


Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды

$$SH = R + R\cos 2\alpha$$



Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды



$$SH = R + OH = R + R\cos 2\alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$$

Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около основания можно описать окружность

Свойство:

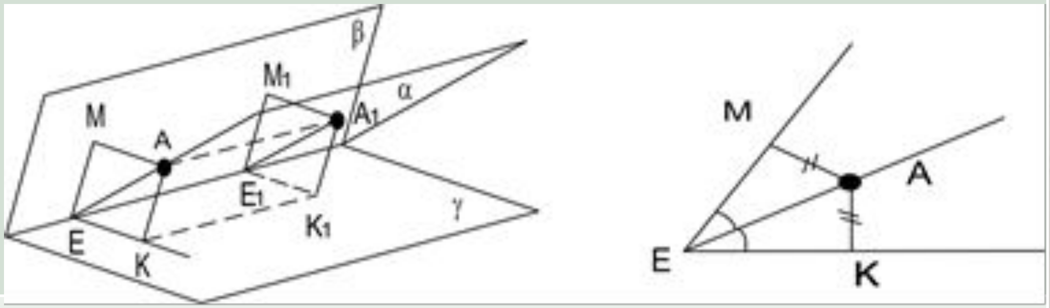
Центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры описанных около основания окружностей

Вписанные сферы

Определение: **Сфера вписана в многогранник, если она касается всех граней многогранника**
Определение: Биссекторной плоскостью двугранного угла называется плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и биссектрису линейного угла.
Свойство: Биссекторная плоскость - геометрическое место точек, равноудаленных от граней двугранного угла

Вписанные сферы

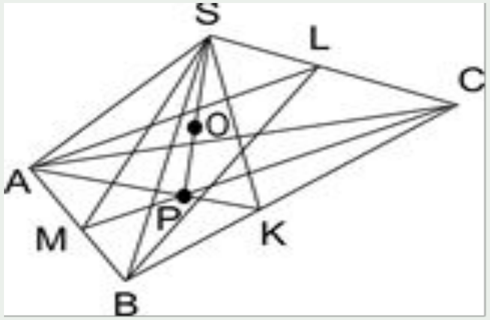
Если сфера касается граней двугранного угла, то ее центр лежит на биссекторной плоскости



$$EA = \frac{R}{\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad KE = R\ ctg\frac{\varphi}{2}.$$

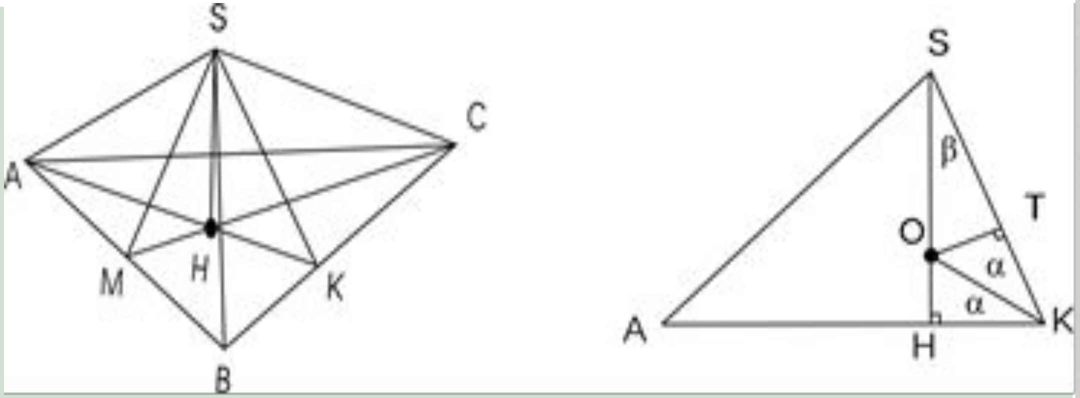
Вписанные шары

Свойство: Если сфера вписана в многогранник, то ее центр лежит на пересечении всех биссекторных плоскостей многогранника
В произвольную треугольную пирамиду можно вписать сферу



Вписанные сферы

Центр сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду лежит на высоте.

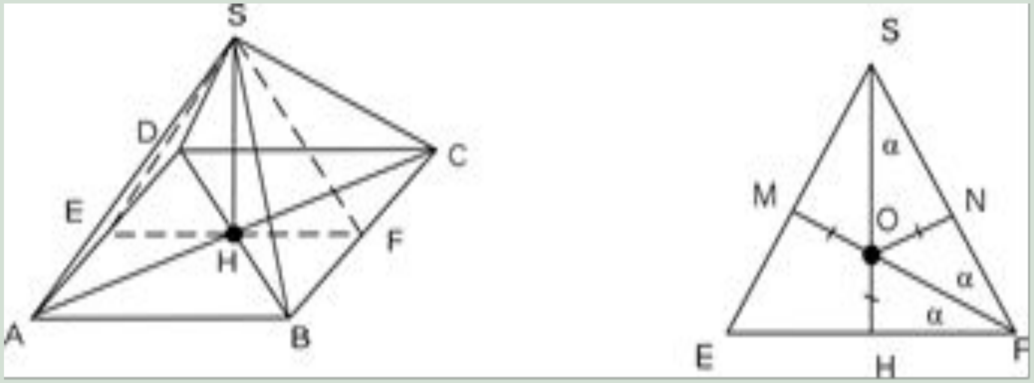


$$R = HK \cdot tg\,\alpha \qquad SH = R + \frac{R}{\sin\beta}$$

$$SO : OH = SK : HK, \quad OH = R, \quad SO + R = SH.$$

Вписанные сферы

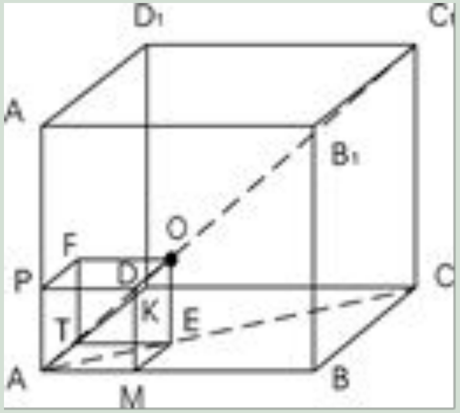
Радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, лежит на высоте



$SO : R = SF : HF$, $R + SO = SH$. $S_{ESF} = p \cdot R$ $R = HF \cdot tg\frac{\alpha}{2}$

Вписанные шары

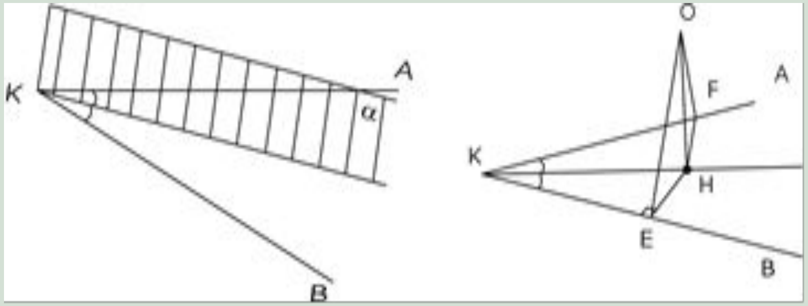
Если сфера радиуса R касается граней трехгранного угла A куба, то центр сферы лежит на диагонали куба и является вершиной куба с ребром R.



$OE \perp ABCD$, $OF \perp AA_1D_1D$, $OK \perp AA_1B_1B$

Касание лучей угла

Если сфера касается двух лучей угла, то центр сферы лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла, перпендикулярно плоскости этого угла.

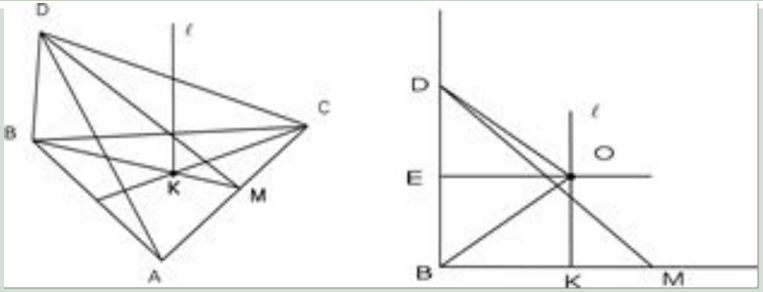


OE= OF= R

$OE \perp KB, \; OF \perp KA, \; HE \perp KB, \; HF \perp KA, \; OH \perp BKA$

Приложение

Пример 1. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной 3, одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и равно 2. Найдите радиус описанного шара.



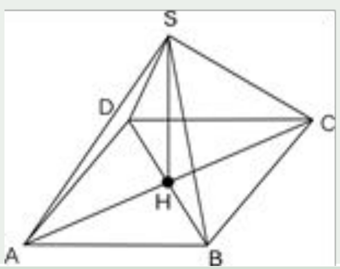
Центр сферы лежит на перпендикуляре к основанию, проведенном через центр описанной около основания окружности.

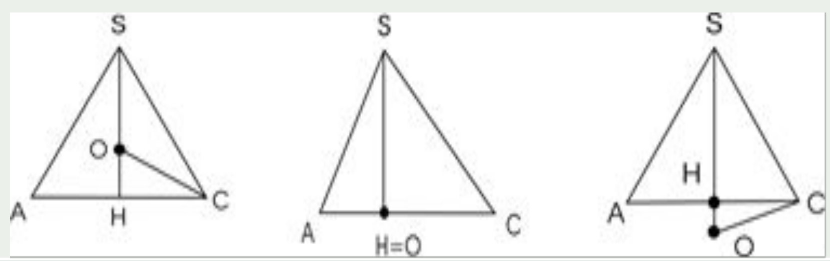
$$OD = OB = R$$

Приложение

Пример 2. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите расстояние от центра описанного шара до основания, если радиус шара равен R.

Так как все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты попадает в точку пересечения диагоналей прямоугольника, и любая точка высоты равноудалена от вершин основания. Центр шара лежит на высоте.



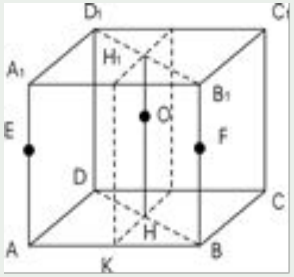


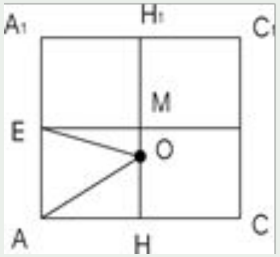
$$OS = OC = OA = R$$

Приложение

Пример 3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и вершины A, C.

Сфера проходит через точки E, F $\Rightarrow$ центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости, проходящей через точку K. Сфера проходит через точки A, C $\Rightarrow$ центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости DBB_1D_1. Следовательно, центр сферы лежит на пересечении плоскостей α и DBB_1D_1.

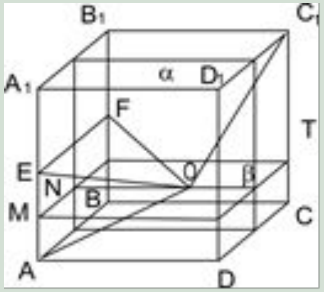


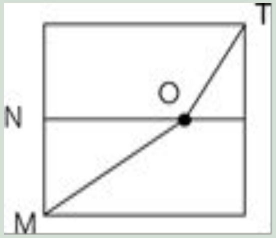


$$OE = OA = R$$

Приложение

Пример 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром α Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и вершины A, C_1.

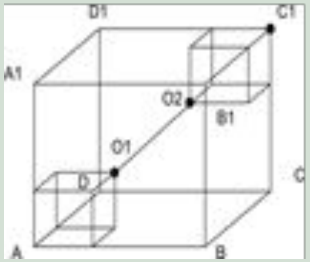


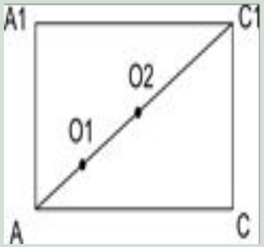


$$OE = OA = OA_1 = R$$

Приложение

Пример 5. В угол A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $1,5$ вписан шар радиуса $0,5$. Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной C_1 и касающегося первого шара.

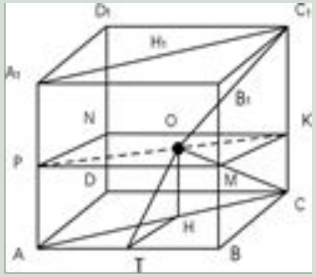




$$\sqrt{3}\cdot 1{,}5 = \sqrt{3}\cdot 0{,}5 + 0{,}5 + R + \sqrt{3}\,R$$

Приложение

Пример 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины C, C_1 и касающегося прямых AB, AD.



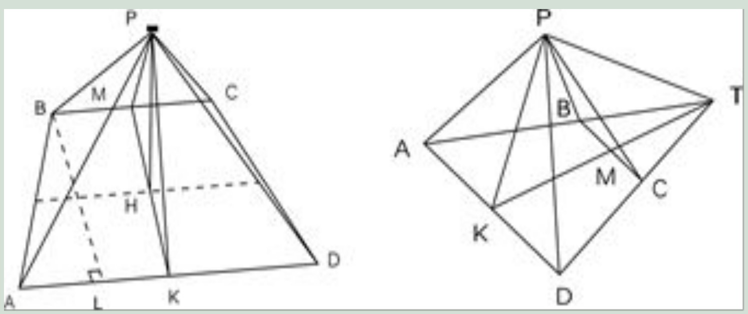
$OH \perp AC,\ HT \perp AB,\ OT = OC = OC_1 = R$

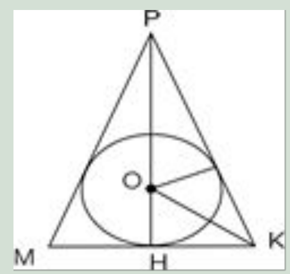
Пусть $OK = x$. Тогда $R^2 = OC^2 = x^2 + \dfrac{1}{4}$,

$PO = AH = \sqrt{2} - x,\ HT = \dfrac{AH}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}.$

Приложение

Пример 7. Основание пирамиды $PABCD$ – равнобедренная трапеция с боковыми сторонами $AB = CD = b$ и острым углом A, равным α Боковые грани APD, BPC – равнобедренные треугольники $(BP = PC,\ AP = PD)$, образующие с основанием угол φ. Известно, что в пирамиду можно вписать шар. Найдите радиус этого шара.





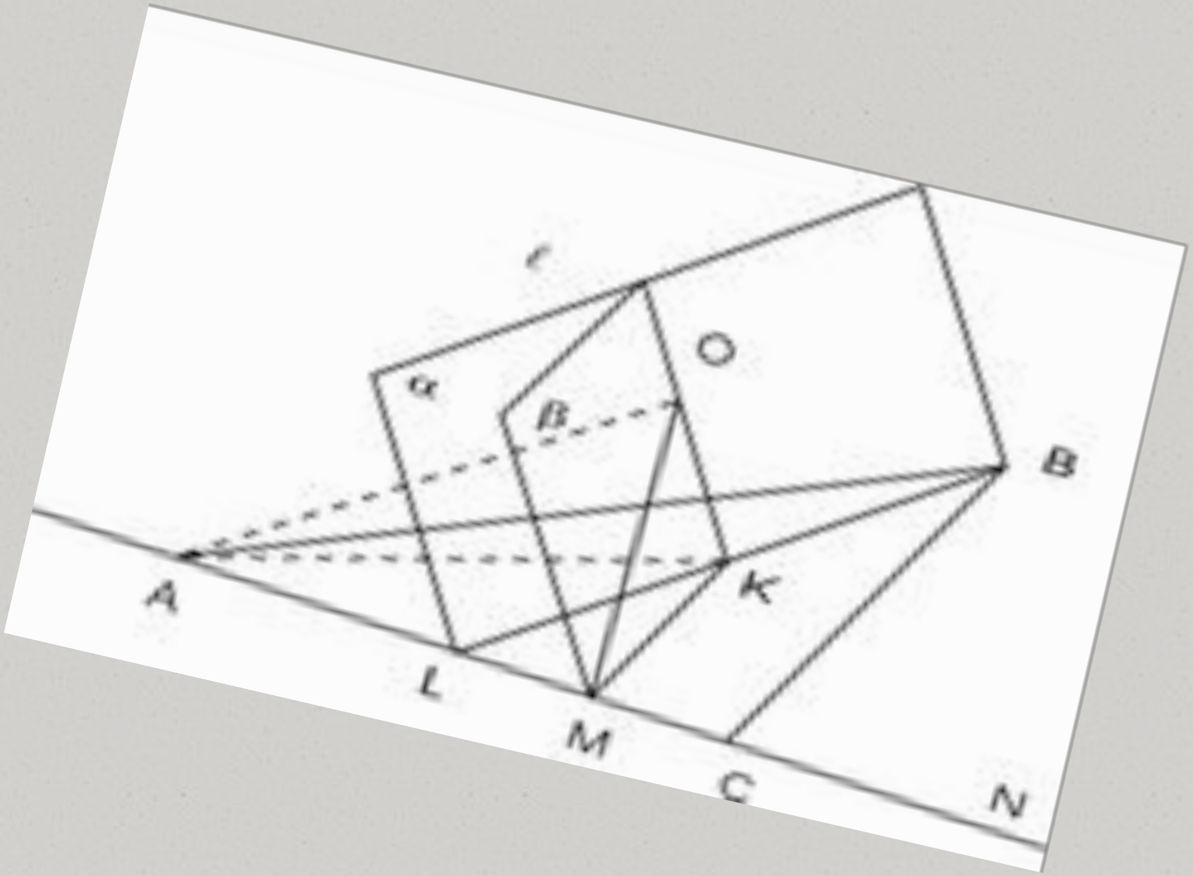
Высота пирамиды является пересечением биссекторных плоскостей, центр шара лежит на высоте, а его радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник MPK

Приложение

Пример 9. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$. Точка N лежит на луче AC, $AN = 6$. Шар радиуса 4 касается лучей BA, BC, его центр равноудален от точек A и N. Найдите расстояние от центра шара до точки A.

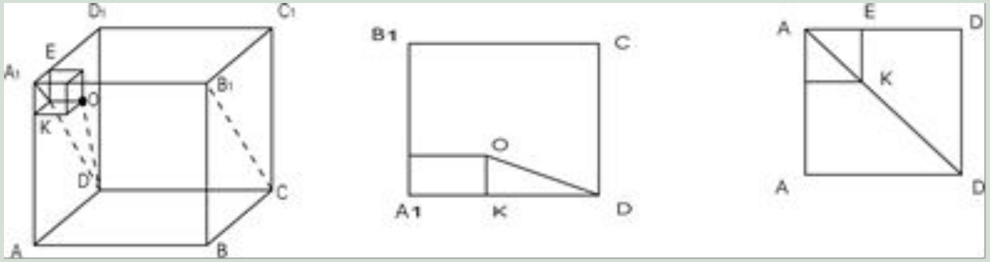
Шар касается лучей BA и BC $\Rightarrow$ центр шара лежит в плоскости α проходящей через биссектрису BL перпендикулярно плоскости ABC. Центр шара равноудален от точек A, N $\Rightarrow$ центр шара лежит на серединной перпендикулярной плоскости β проходящей через точку M.

$$OK \perp ABC,\ KM \perp AC,\ OM \perp AC \Rightarrow OM = R$$



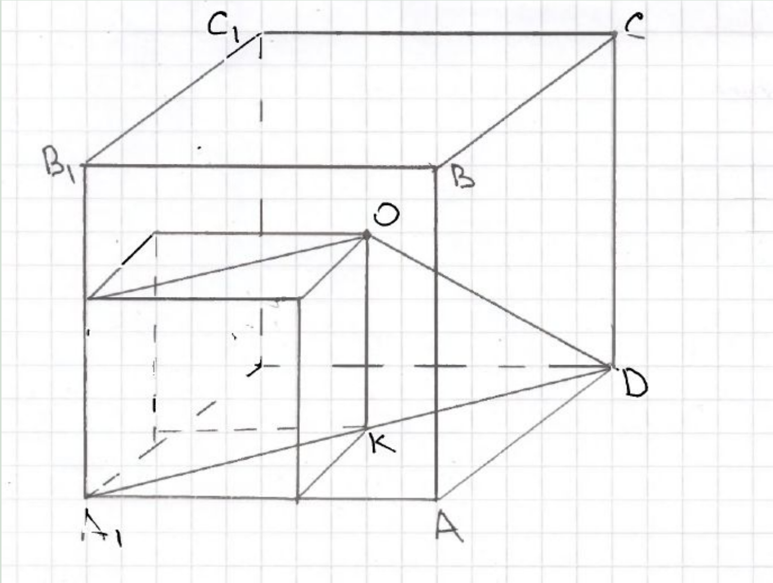
Приложение

Пример 10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1. Два шара одинакового радиуса касаются друг друга. Один – с центром в точке D, другой – касается трехгранного угла с вершиной A_1. Найдите радиусы шаров.



Шар вписан в угол $A_1 \Rightarrow$ центр шара O является вершиной куба с ребром R, построенного в вершине A_1. Шары касаются $\Rightarrow$ $OD = 2R$.

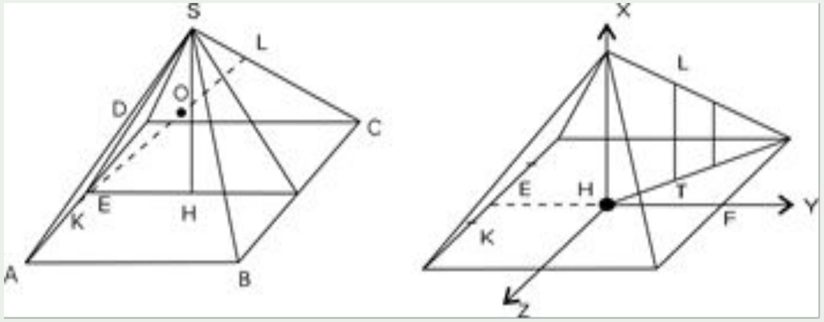
Приложение

Перевернем куб на другую грань.


Приложение

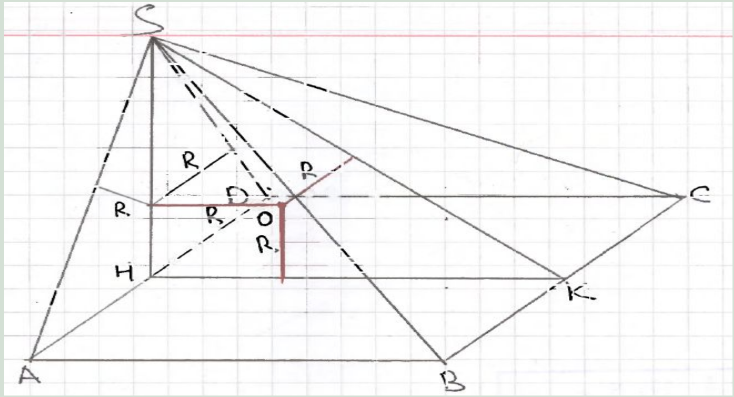
Пример 11. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6, высота пирамиды равна 4. Точки K, L расположены на ребрах AD, SC так, что $AK : KD = SL : LC = 1 : 2$. Шар касается плоскостей ASB, CSD и его центр лежит на прямой KL. Найдите радиус шара.

Центр O шара лежит на пересечении прямой KL и биссекторной плоскости ESF. Радиус шара R – расстояние от точки O до плоскости ASB.



Приложение

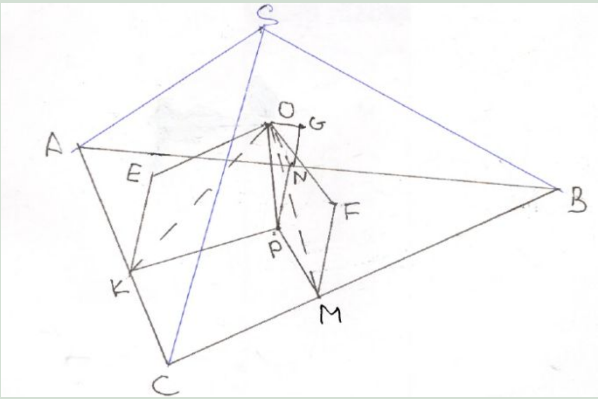
Пример 12. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 3$, высота пирамиды равна 4 и проходит через середину AD. Найдите AD, если известно, что в пирамиду можно вписать шар.

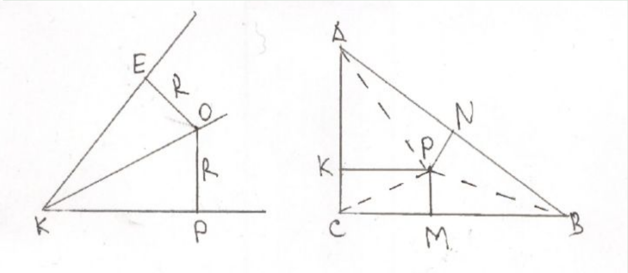


Центр O шара лежит на биссекторной плоскости HSK, а расстояния от точки O до плоскостей $ASD, ABCD, ASB, CSD$ равны радиусу шара R.

Приложение

Пример 13. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой b. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углами α, β, γ. Найдите радиус вписанного шара.

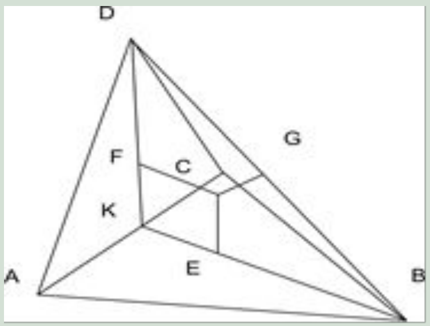


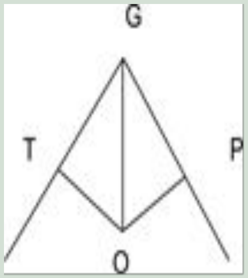


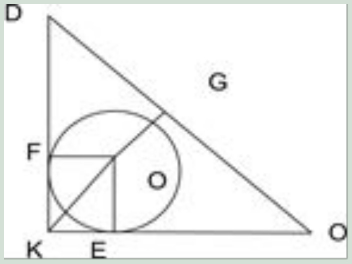
Пусть O – центр шара, P, E, F, G – точки касания шара с основанием и боковыми гранями. Тогда: $OP = OE = OF = OG$ – радиусы, перпендикулярные граням; OK, OM, ON – биссектрисы двугранных углов; $PK \perp AC$, $PM \perp CB$, $PN \perp AB$.

Приложение

Пример 14. Грани ACD и ACB треугольной пирамиды $ABCD$ – равносторонние треугольники со стороной a, перпендикулярные друг другу. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.



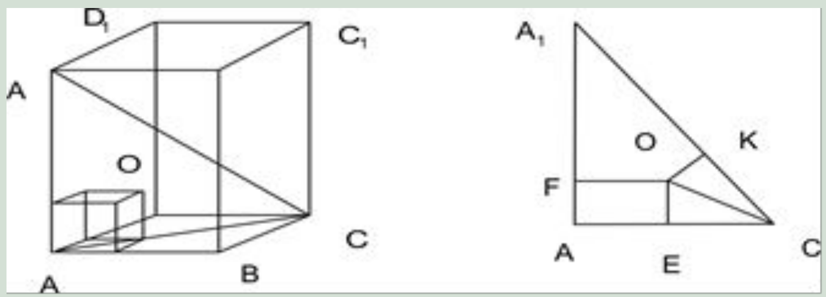




Центр шара лежит в биссекторной плоскости DKB, $OF = OE = R$, $OG = \dfrac{R}{\sin\varphi}$

Приложение

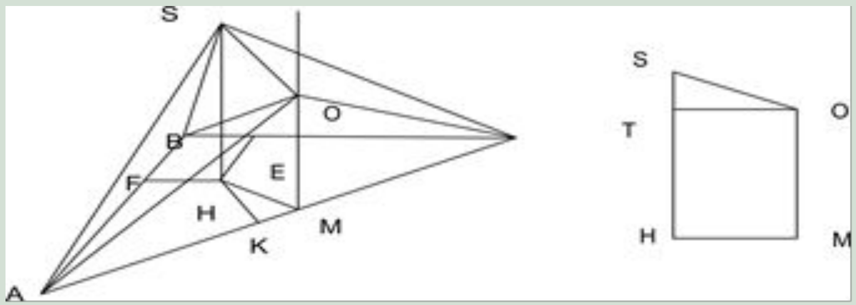
Пример 15. Квадрат $ABCD$ со стороной 1 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковое ребро которого равно 4. Сфера, центр которой лежит внутри параллелепипеда, касается граней $ABCD$, AA_1B_1B, AA_1D_1D и прямой A_1C. Найдите радиус сферы.



Так как сфера касается граней трехгранного угла с вершиной A и прямой A_1C, то центр сферы O является вершиной куба со стороной R, вписанной в этот трехгранный угол, а расстояние от точки O до прямой A_1C равно R.

Приложение

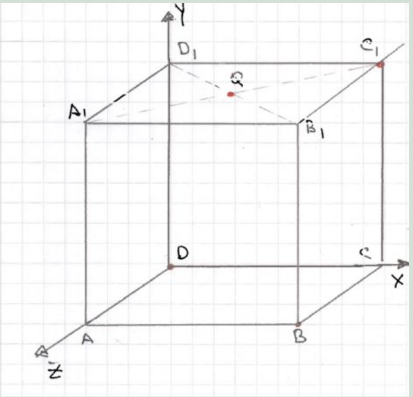
Пример 16. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 8, 9 все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом. Найдите высоту пирамиды, если радиус описанной около пирамиды сферы равен 7.



Так как все грани пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты точка H является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC $(HF = HE = HK = r)$. Центр O сферы, описанной около пирамиды, равноудален от вершин прямоугольного треугольника ABC и, следовательно, лежит на прямой l, проходящей через середину гипотенузы точку M перпендикулярно плоскости основания ABC $(OA = OC = OB = OS = R)$.

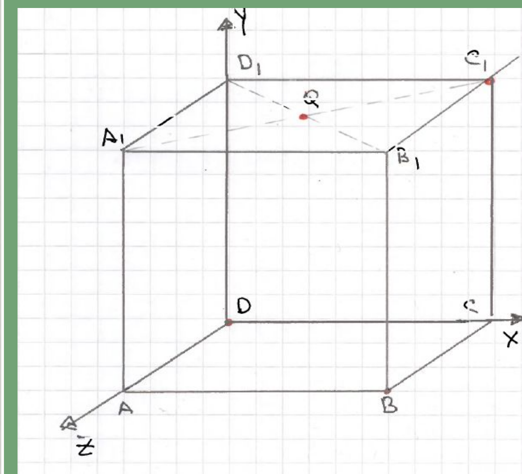
Приложение

Пример 17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка Q – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки B, D, C_1, Q.



Запишем уравнение сферы, проходящей через заданные точки.

Приложение

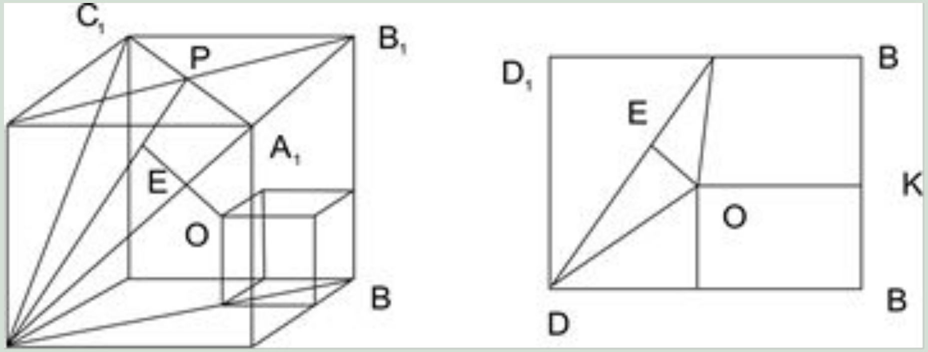


$$\begin{cases}(1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = R^2;\\ a^2 + b^2 + c^2 = R^2;\\ (1-a)^2 + b^2 + (1-c)^2 = R^2;\\ (0,5 - a)^2 + (1-b)^2 + (0,5 - c)^2 = R^2.\end{cases}$$

$OE = OK = R,\ KB = R/\sqrt{2}$

Приложение

Пример 18. Ребро куба равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся ребер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1.



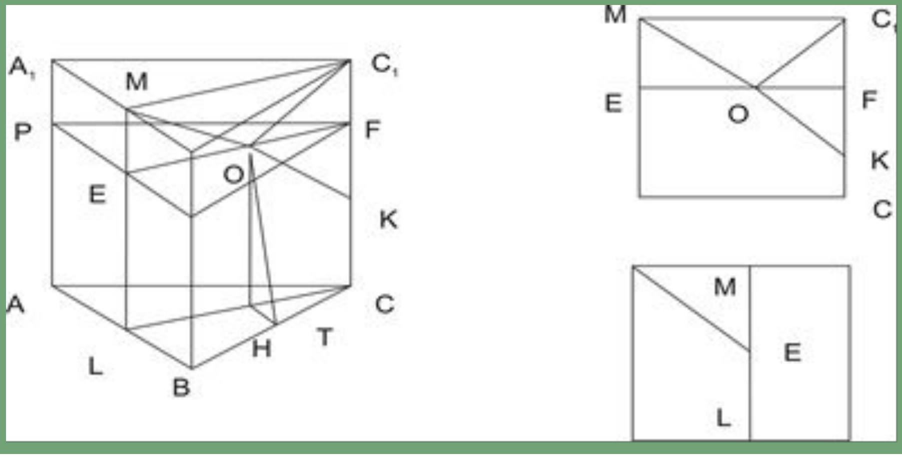
Так как сфера касается ребер трехгранного угла с вершиной B, то центр сферы O является вершиной куба с диагональю R, вписанного в этот трехгранный угол.

$OE = OK = R,\ KB = R/\sqrt{2}$

Приложение

Пример 20. Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K $(C_1K = 4)$ и касается всех ребер ломаной $BCAA_1B_1$. Найдите радиус сферы и объем призмы.

Приложение



точки K, C_1 лежат на сфере $\Rightarrow$ центр сферы O лежит в плоскости PFQ ($PA_1 = QB_1 = FC_1$).

сфера касается ребер $CA, CB \Rightarrow O$ лежит на плоскости LMC_1C.

сфера касается ребер AA_1, $A_1B_1 \Rightarrow O$ лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла AA_1B_1.

центр O лежит на прямой EF, значит A_1E – биссектриса, а указанная плоскость проходит через прямую EF.

$$OT = OC_1 = OM = R.$$

Спасибо!