Спецификация уравнения множественной регрессии. Выбор формы зависимости

Лекция

Спецификация уравнения регрессии

- Выбор переменных (предыдущая лекция)
- Выбор формы зависимости

Цели лекции

1. Свести вместе все, что мы знаем о выборе формы зависимости и рассмотреть особенности многомерного случая
2. Изучить последствия неправильного выбора функциональной формы
3. Найти средства, позволяющие улучшить качество выбора формы связи

Роль постоянного члена регрессии

1. Свободный член абсорбирует все смещения и сдвиги

2. Исключение постоянного члена приводит к нарушению предпосылки 1^0 теоремы Гаусса-Маркова о равенстве нулю математического ожидания случайного отклонения

Интерпретация постоянного члена регрессии

1. Постоянный член задает точку пересечения графика уравнения регрессии с осью *Y*
2. Интерпретируется как ожидаемое значение *Y*, когда объясняющие переменные и случайный член равны нулю

Иногда постоянный член имеет содержательный смысл

Пример роли постоянного члена. Анализ затрат

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 Q_i + \varepsilon_i$$

β_0 − постоянные затраты, $\beta_1 Q$ − переменные затраты

Если постоянные затраты малы, то можно исключить свободный член, получив лишнюю степень свободы

Исключение постоянного члена всегда должно быть обосновано экономически

Необоснованное исключение из уравнения регрессии постоянного члена приводит к серьезным ошибкам!

Последствия исключения постоянного члена

1. Оценки коэффициентов при переменных искажаются и смещаются

2. *t*-статистики становятся некорректными

$$t_j = \frac{b_j}{S_{b_j}}$$

Роль постоянного члена регрессии. Выводы

Выводы:

1. За редкими и обоснованными исключениями не следует исключать постоянный член из уравнения регрессии
2. Не следует полагаться на оценку самого постоянного члена

Выбор формы зависимости

Альтернативные функциональные формы

1. Линейные зависимости
2. Нелинейные зависимости, приводящиеся преобразованием переменных к линейным
3. Нелинейные зависимости, не приводящиеся преобразованием переменных к линейным

Линейные зависимости

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_m X_m + \varepsilon$$

Интерпретация коэффициентов регрессии: предельные эффекты факторов (при постоянстве прочих факторов)

$$\beta_k = \frac{dY}{dX_k} \approx \frac{\Delta Y}{\Delta X_k}$$

Вычисление эластичностей

$$L(Y, X_k) = \frac{dY / dX_k}{Y / X_k} = \frac{dY}{dX_k} \cdot \frac{X_k}{Y} = \beta_k \frac{X_k}{Y}$$

Анализ эластичностей – мощное средство анализа зависимостей

Логарифмические зависимости

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \dots + \beta_m \ln X_m + \varepsilon$$

Интерпретация коэффициентов регрессии: являются непосредственно факторными эластичностями

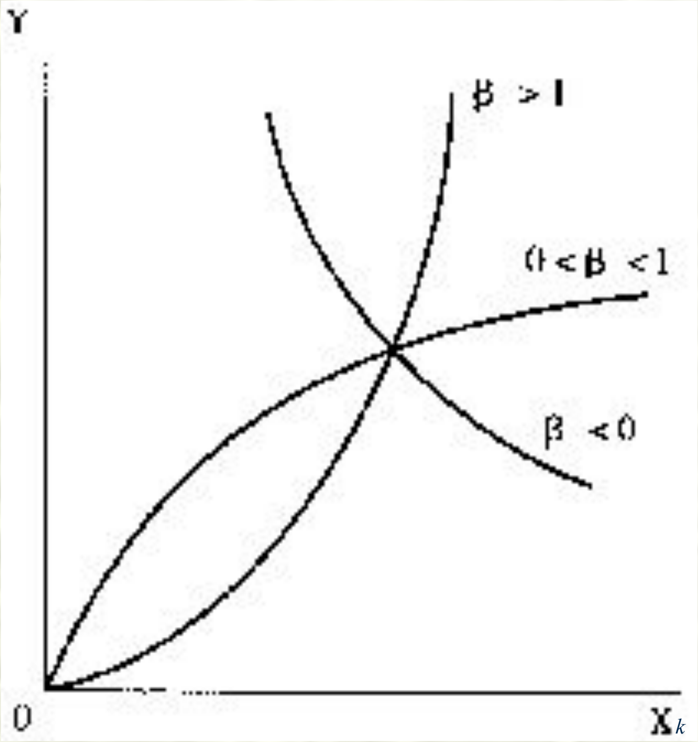
$$L(Y, X_k) = \frac{\%\Delta Y}{\%\Delta X_k} = \frac{\Delta Y}{\Delta X_k} \cdot \frac{X_k}{Y} = \beta_k$$

Теперь наклон переменный

$$Наклон(Y, X_k) = \frac{dY}{dX_k} = \left(\frac{dY}{dX_k} \cdot \frac{X_k}{Y} \right) \cdot \frac{Y}{X_k} = \beta_k \frac{Y}{X_k},$$

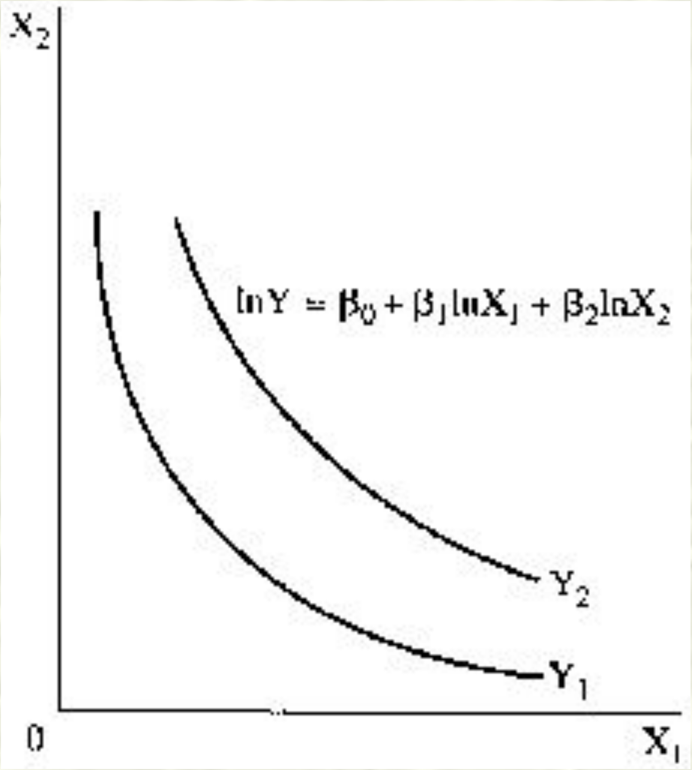
Логарифмические зависимости

В зависимости от значений коэффициентов регрессии логарифмические зависимости отображают большое разнообразие форм



Логарифмические зависимости

Изокванты (которые были прямыми линиями для линейного уравнения) теперь становятся привычными для экономической теории вогнутыми кривыми уровня



Пример. Производственная функция Кобба-Дугласа

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} v$$

Замена переменных делает уравнение линейным

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \ln v$$

Сумма эластичностей указывает на эффект масштаба

$$\alpha + \beta < 1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha + \beta > 1$$

Пример. Производственная функция Кобба-Дугласа

Оценивание производственной функции при ограничении на эффект масштаба

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha} v$$

Переходим к удельным величинам (на единицу труда)

$$Y / L = A(K / L)^{\alpha} v$$

Теперь переход к логарифмам позволяет получить оценку

$$\ln(Y / L) = \ln A + \alpha \ln(K / L) + \ln v$$

Пример. Производственная функция Кобба-Дугласа

Учет и оценка технического прогресса

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} e^{rt} v$$

После логарифмирования

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + rt + \ln v$$

Здесь также можно использовать ограничение на эффект масштаба

Линейно-логарифмические зависимости

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

В нелинейной паре коэффициент наклона рассчитывается как:

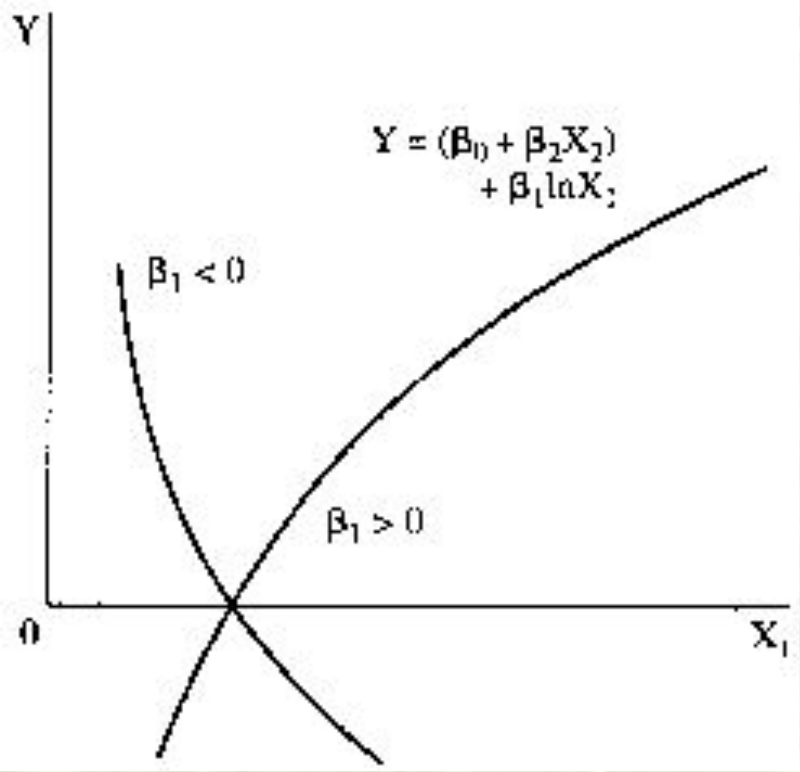
$$\frac{dY}{dX_1} = \frac{\beta_1}{X_1} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{dY}{dX_1 / X_1} \approx \frac{\Delta Y}{(\Delta X_1 / X_1)}$$

Вычисление эластичности:

$$L(Y, X_1) = \frac{dY / dX_1}{Y / X_1} = \frac{dY}{dX_1} \cdot \frac{X_1}{Y} = \frac{\beta_k}{Y}$$

Линейно-логарифмические зависимости

В зависимости от значений коэффициентов регрессии полулогарифмические зависимости отображают большое разнообразие форм с эффектом насыщения



Логарифмически-линейные зависимости

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Наклон: $\beta_1 Y$

Эластичность: $\beta_1 X_1$

Эти функции хорошо подходят для моделирования эффектов, которые проявляются в процентном выражении в ответ на абсолютный рост факторов (например, вознаграждение)

Полиномиальные формы зависимости

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_2 + \varepsilon$$

Наклон:

$$\frac{dY}{dX_1} = \beta_1 + 2\beta_2 X_1$$

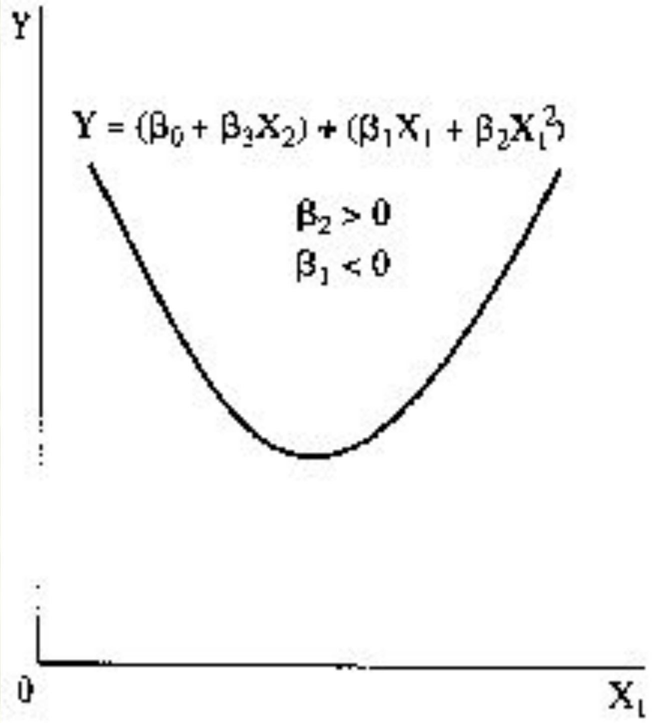
Эластичность:

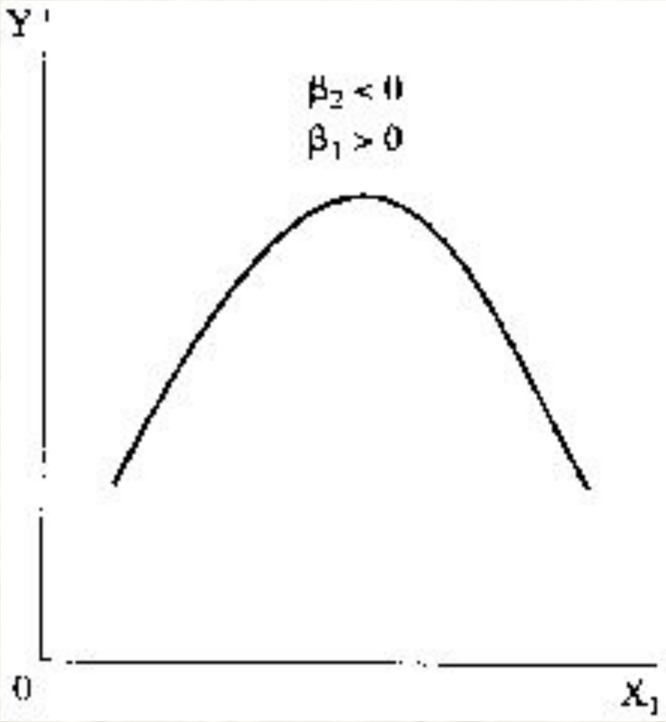
$$\frac{\%\Delta Y}{\%\Delta X_1} = \beta_1 \frac{X_1}{Y} + 2\beta_2 \frac{X_1^2}{Y}$$

Эти функции хорошо подходят для моделирования эффекта масштаба, анализа максимумов и минимумов

Полиномиальные формы зависимости

В зависимости от знаков коэффициентов регрессии квадратичные зависимости имеют U-образную и обратную U-образную формы





Обратные формы зависимости

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_1} + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Наклон:

$$\frac{dY}{dX_1} = -\frac{\beta_1}{X_1^2}$$

Эластичность:

$$\frac{\%\Delta Y}{\%\Delta X_1} = -\frac{\beta_1}{YX_1}$$

Асимптота:

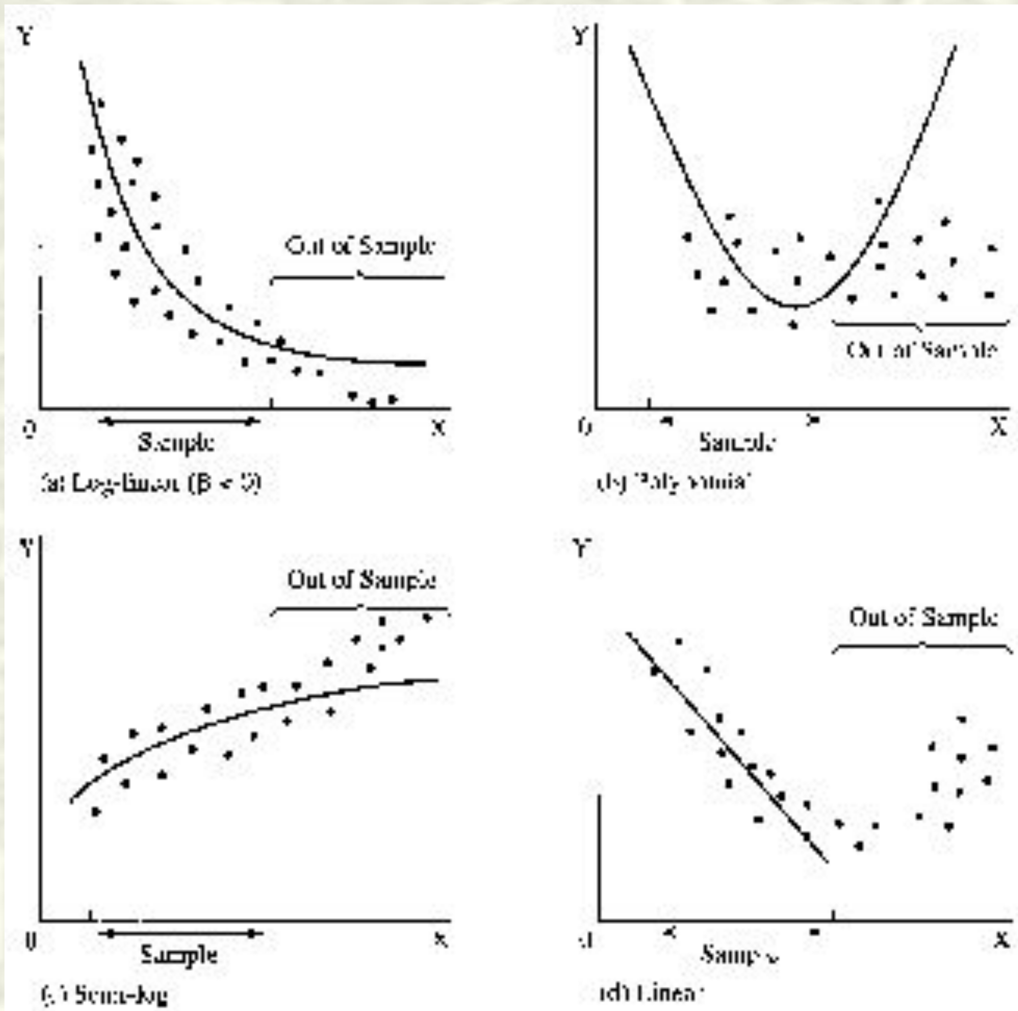
$$Y = \beta_0 + \beta_2 X_2$$

Эти функции хорошо подходят для моделирования эффектов полного насыщения и ограниченности

Сводка результатов для альтернативных форм связи

Функциональная форма	Уравнение (без учета других факторов)	Наклон $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$	Эластичность $\frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$
Линейная	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon$	β_1	$\beta_1\left(\frac{X_i}{Y_i}\right)$
Двойная логарифмическая	$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon$	$\beta_1\left(\frac{Y_i}{X_i}\right)$	β_1
Линейно-логарифмическая (lnX)	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \varepsilon$	$\beta_1\left(\frac{1}{X_i}\right)$	$\beta_1\left(\frac{1}{Y_i}\right)$
Логарифмически-линейная (lnY)	$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon$	$\beta_1 Y_i$	$\beta_1 X_i$
Полиномиальная	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_1 X_i^2 + \varepsilon$	$\beta_1 + 2\beta_2 X_i$	$\beta_1\left(\frac{X_i}{Y_i}\right) + 2\beta_2\left(\frac{X_i^2}{Y_i}\right)$
Обратная	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + \varepsilon$	$-\beta_1\left(\frac{1}{X_i^2}\right)$	$-\beta_1\left(\frac{1}{X_i Y_i}\right)$

Ограниченное использование нелинейных форм за пределами выборки



Последствия неправильного использования функциональных форм

1. Ухудшение статистических характеристик (качества) уравнения (не всегда)

2. Невозможность использования построенных уравнений за пределами выборки

Коэффициенты детерминации (обычный и скорректированный) для различных функциональных форм несравнимы

Нелинейный метод наименьших квадратов

Используется в тех случаях, когда уравнение не приводится с помощью преобразований переменных к линейной форме

Пример: Кривая Филлипса

$$INF_t = \beta_0 + \frac{\beta_1}{UNR_{t-1} - \beta_2}$$

Пример. Кривая Филлипса

$$Q = \sum_t \left(INF_t - \hat{INF}_t \right)^2 = \sum_t \left(INF_t - \beta_0 - \frac{\beta_1}{UNR_{t-1} - \beta_2} \right)^2 \to \min$$

Нетрудно убедиться, что система уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 0, \quad j = 0,1,2$$

является нелинейной относительно неизвестных параметров $\beta_j,\ j = 0,1,2$

Нелинейный метод наименьших квадратов. Способы реализации

Численные методы:

1. Метод прямого поиска минимума функционала $Q(\beta)$
2. Методы приближенного решения системы нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 0, \quad j = \overline{0, m}$$

Конец лекции