

Модуль 1 . Математические основы компьютерной графики

**Геометрические
преобразования на плоскости.**

- Черепашков, А.А. Компьютерные технологии, моделирование и автоматизированные системы в машиностроении: учеб. для вузов по специальности "Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение)"
- Дёмин А.Ю. Основы компьютерной графики: учеб. пособие/А.Ю. Дёмин. – Томск: Из-во Томского политехнического университета, 2011. – 191 с.
- Роджерс, Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики: Пер. с англ.- М.: Мир, 201. – 604с., ил.

Преобразование точек.

- Перенос:

$$[x^* \ y^*] = [x \ y] + [a \ b] = [x + a \ y + b]$$

Преобразование общего вида

$$[x \ y] * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [(ax + cy) \quad (bx + dy)] = [x^* \ y^*]$$

- Отсутствие движения

$$[x \ y] * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [(1x + 0y) \quad (0x + 1y)] == [x^* \ y^*]$$

- Масштабирование

$$[x \ y] * \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [(ax + 0y) \quad (0x + 1y)] = [ax \quad y] = [x^* \ y^*]$$

$$[x \ y] * \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = [(ax + 0y) \quad (0x + dy)] = [ax \quad dy] = \\ = [x^* \ y^*]$$

- Отображение

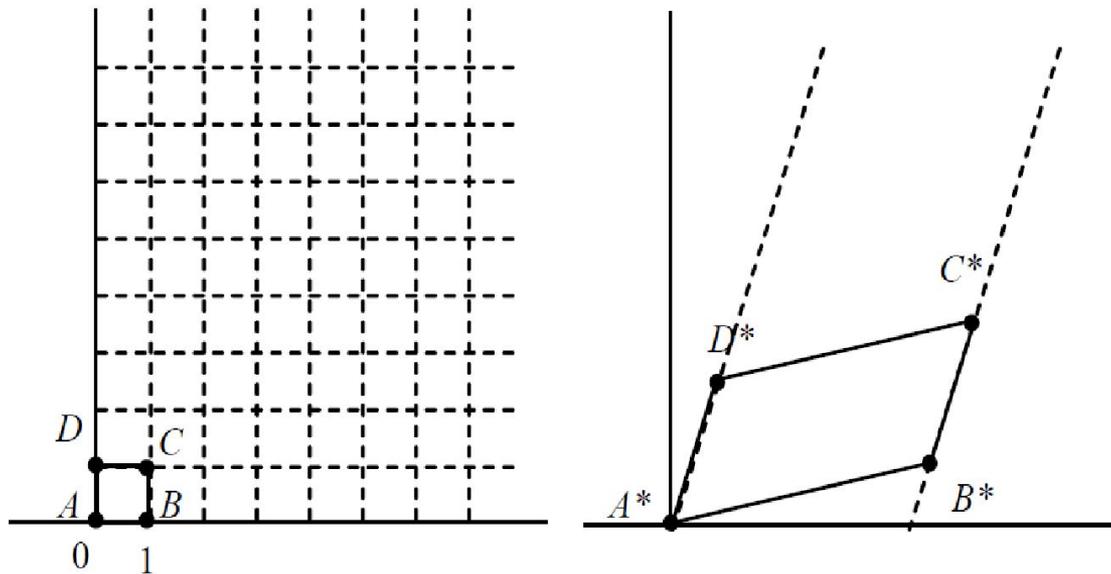
$$[x \ y] * \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [(-1x + 0y) \quad (0x + 1y)] = [-x \quad y] \\ = [x^* \ y^*]$$

- Сдвиг

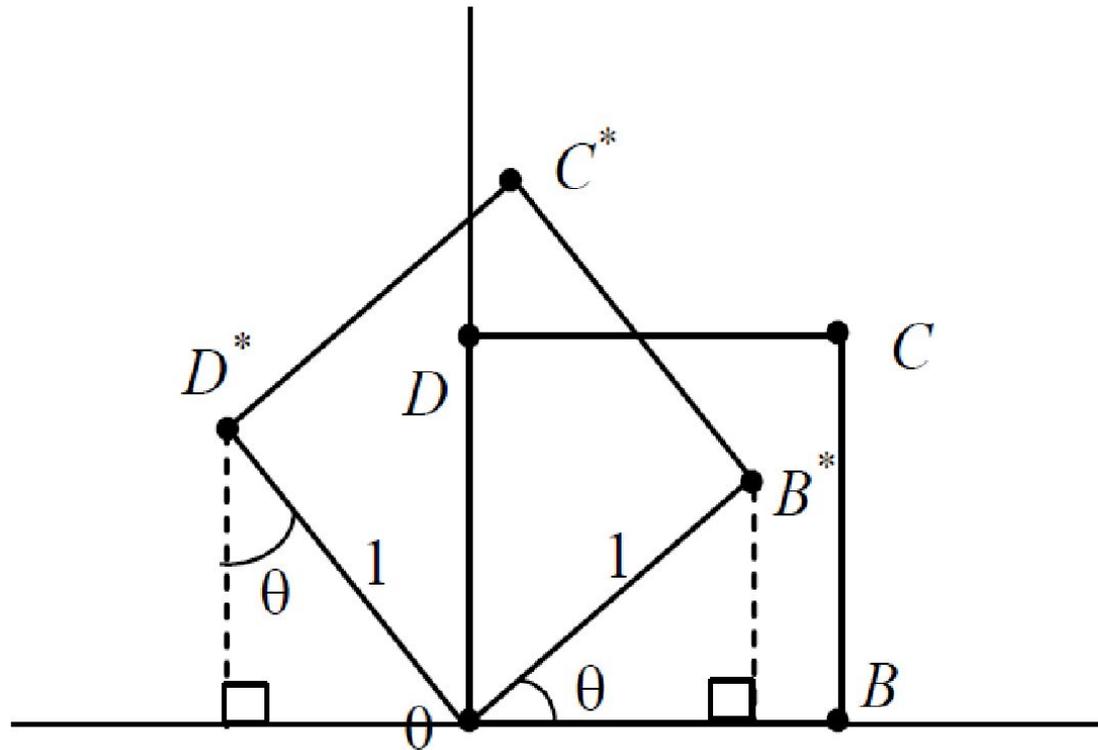
$$[x \ y] * \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad (bx + y)] = [x^* \ y^*]$$

Преобразование единичного квадрата

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{bmatrix}$$



Вращение



$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Вращение

• Поворот на 90° $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

• Поворот на 180° $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Отображение

- вращение вокруг линии $y = x$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- вращение вокруг линии $y = 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Однородные координаты

$$P^* = P + T, \quad P^* = P \cdot S, \quad P^* = P \cdot R$$

Перенос

$$\begin{aligned} [x \ y \ 1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{bmatrix} &= [x + m \quad y + n] = \\ &= [x^* \ y^*] \end{aligned}$$

Матрица 3*3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

Однородные координаты

$$\bullet \quad [x \ y \ 1] * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x + m \quad y + n \quad 1] = \\ = [x^* \ y^* \ 1] = [X \ Y \ H]$$

$$[x^* \ y^* \ 1] = \begin{bmatrix} X & Y \\ H & H & 1 \end{bmatrix}$$

Однородное координатное воспроизведение

$$\begin{matrix} [hx \ hy \ h] \\ x = \frac{hx}{h}, \quad y = \frac{hy}{h} \end{matrix}$$

- $$[x^* \ y^*] = [x \ y] * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$[X \ Y \ H] = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

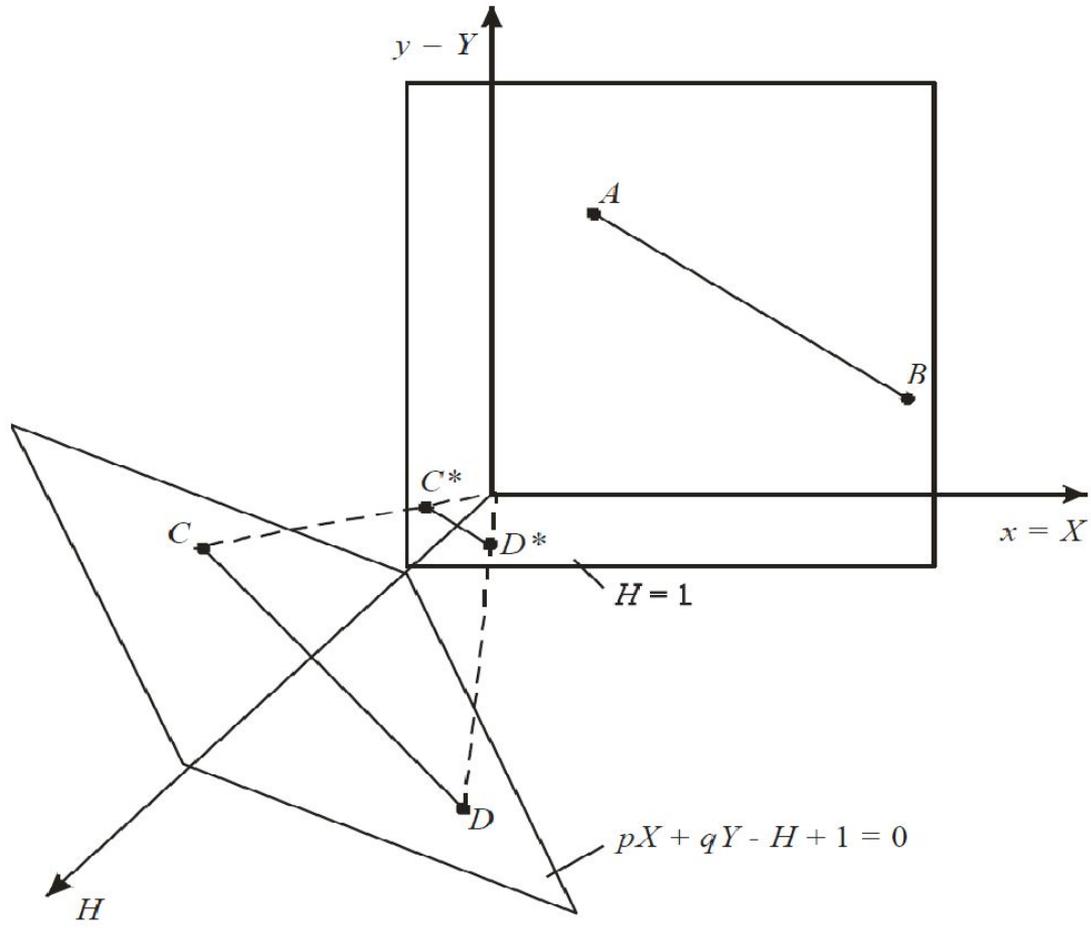
Нормализация

$$x^* = \frac{X}{H}, y^* = \frac{Y}{H}$$

• Матрица преобразования общего вида

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [X \quad Y \quad H] &= [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [x \quad y \quad (px + qy + 1)] \end{aligned}$$



$$x^* = \frac{X}{H} = \frac{X}{pX + qY + 1}, \quad y^* = \frac{Y}{H} = \frac{Y}{pX + qY + 1}$$

- $$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline m & n & s \end{array} \right].$$

$$\begin{array}{l} [X \quad Y \quad H] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = \\ [x \quad y \quad s] \end{array}$$

$$x^* = \frac{x}{s} \quad \text{и} \quad y^* = \frac{y}{s}$$

$$[x \ y \ 1] \rightarrow [x/s \ y/s \ 1]$$

Двумерное вращение вокруг произвольной оси

- $$[x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X \quad Y \quad H] =$$

$$= [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -m(\cos \theta - 1) + n(\sin \theta) & -m(\sin \theta) - n(\cos \theta - 1) & 1 \end{bmatrix}$$

- Поворот $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Перенос $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$[X \ Y \ H] =$$

$$= [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X \ Y \ H] = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [-y + 7 \quad x - 1 \quad 1]$$