Лекція №3.

Чисельні методи одновимірної мінімізації

1. Постановка задачі
2. Методи нульового порядку (прямі)
   2.1. Метод дихотомії
   2.2. Метод золотого перерізу
   2.3. Метод квадратичної апроксимації
   2.4. Метод Фібоначі
   2.5. Метод порозрядного пошуку

Лекція №3.

Чисельні методи одновимірної мінімізації

1. Постановка задачі. (Алгоритм Свенна)
2. Методи нульового порядку (прямі)
   2.1. Метод дихотомії
   2.2. Метод золотого перерізу
   2.3. Метод квадратичної апроксимації
   2.4. Метод Фібоначі
   2.5. Метод порозрядного пошуку

Постановка задачі

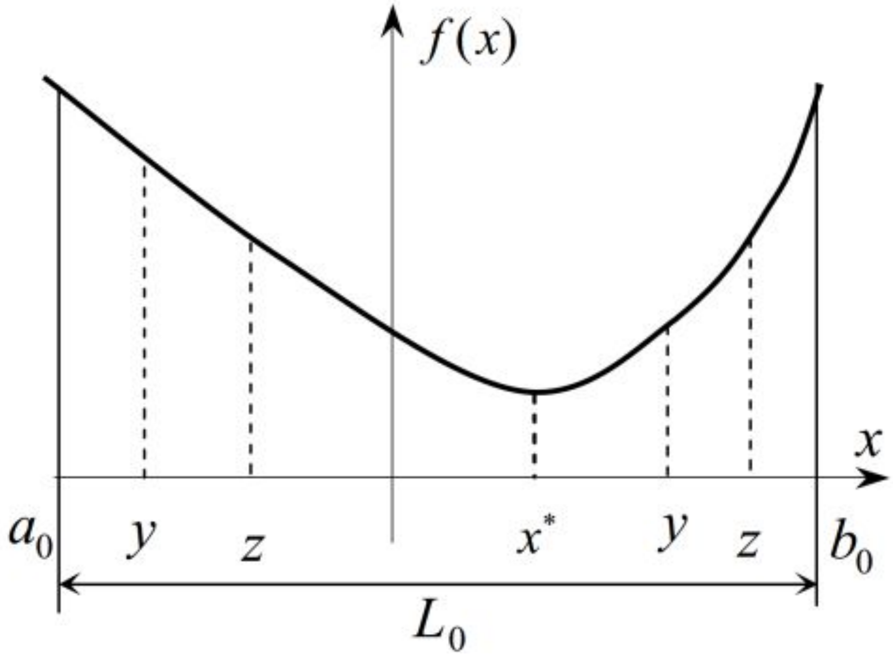
Поставлена задача одновимірної мінімізації може бути розв’язана за допомогою необхідних і достатніх умов безумовного екстремуму (див. розд. 1.2). Однак проблема одержання розв’язку рівняння $\frac{df(x)}{dx} = 0$ може виявитися досить складною. Більше того, в практичних задачах функція $f(x)$ може бути не задана в аналітичному вигляді або часто невідомо, чи є вона диференційовною. Тому одержання розв’язку поставленої задачі чисельним методом є актуальним.

Зауваження 3.1.

1. Для методів одновимірної мінімізації типовим є задання апріорної інформації про положення точки мінімуму за допомогою початкового інтервалу невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$ (рис. 3.1). Вважається, що точка мінімуму x^* належить інтервалу L_0, тобто $x^* \in L_0 \subset R$.

2. Більшість відомих методів одновимірної мінімізації застосовується для класу унімодальних функцій.

Означення 3.1. Функція $f(x)$ називається *унімодальною на інтервалі* $L_0 = [a_0; b_0]$, якщо вона досягає глобального мінімуму на $[a_0; b_0]$ в єдиній точці x^*, причому ліворуч від x^* ця функція строго спадає, а праворуч від x^* строго зростає. Якщо $a_0 \le y < z < x^*$, то $f(y) > f(z)$, а якщо $x^* < y < z \le b_0$, то $f(y) < f(z)$ (рис. 3.1).



Для евристичного вибору початкового інтервалу невизначеності можна застосувати **алгоритм Свенна** (Swann W. H.):

1) задати довільно наступні параметри: x_0 – деяку точку, $t > 0$ – величину кроку. Прийняти $k = 0$.

2) обчислити значення функції в трьох точках: $x_0 - t$, x_0, $x_0 + t$;

3) перевірити умова закінчення:

а) якщо $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то початковий інтервал невизначеності знайдено: $\left[a_0; b_0\right] = \left[x_0 - t;\ x_0 + t\right]$;

б) якщо $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то функція не є унімодальною (див. означення 3.1), а необхідний інтервал невизначеності не може бути знайдено. Обчислення при цьому припиняються (рекомендується задати іншу початкову точку x_0);

в) якщо умова закінчення не виконується, то перейти до кроку 4;

4) визначити величину Δ:

а) якщо $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то $\Delta = t$, $a_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + t$, $k = 1$;

б) якщо $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то $\Delta = -t$, $b_0 = x_0$, $x_1 = x_0 - t$, $k = 1$;

5) знайти наступну точку $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$;

6) перевірити умови спадання функції:

а) якщо $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ і $\Delta = t$, то $a_0 = x_k$;

якщо $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ і $\Delta = -t$, то $b_0 = x_k$;

в обох випадках прийняти $k = k + 1$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, процедура завершується. При $\Delta = t$ прийняти $b_0 = x_{k+1}$, а при $\Delta = -t$ прийняти $a_0 = x_{k+1}$. В результаті маємо $\left[a_0; b_0\right]$ – шуканий початковий інтервал невизначеності.

Для евристичного вибору початкового інтервалу невизначеності можна застосувати **алгоритм Свенна** (Swann W. H.):

1) задати довільно наступні параметри: x_0 – деяку точку, $t > 0$ – величину кроку. Прийняти $k = 0$.

2) обчислити значення функції в трьох точках: $x_0 - t$, x_0, $x_0 + t$;

3) перевірити умова закінчення:

а) якщо $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то початковий інтервал невизначеності знайдено: $[a_0; b_0] = [x_0 - t; x_0 + t]$;

б) якщо $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то функція не є унімодальною (див. означення 3.1), а необхідний інтервал невизначеності не може бути знайдено. Обчислення при цьому припиняються (рекомендується задати іншу початкову точку x_0);

в) якщо умова закінчення не виконується, то перейти до кроку 4;

4) визначити величину Δ:

а) якщо $f(x_0 - t) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + t)$, то $\Delta = t$, $a_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + t$, $k = 1$;

б) якщо $f(x_0 - t) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + t)$, то $\Delta = -t$, $b_0 = x_0$, $x_1 = x_0 - t$, $k = 1$;

5) знайти наступну точку $x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta$;

6) перевірити умови спадання функції:

а) якщо $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ і $\Delta = t$, то $a_0 = x_k$;

якщо $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ і $\Delta = -t$, то $b_0 = x_k$;

в обох випадках прийняти $k = k + 1$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, процедура завершується. При $\Delta = t$ прийняти $b_0 = x_{k+1}$, а при $\Delta = -t$ прийняти $a_0 = x_{k+1}$. В результаті маємо $[a_0; b_0]$ – шуканий початковий інтервал невизначеності.

Приклад 3.1

Знайти початковий інтервал невизначеності для пошуку мінімуму функції $f(x) = (x-5)^2$.

Розв'язання

Скористаємося алгоритмом Свенна.

1^0. Задамо $x_0 = 1$ і $t = 1$. Приймемо $k = 0$.

2^0. Обчислимо значення функції в точках $x_0 - t = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 + t = 2$: $f(0) = 25$, $f(1) = 16$, $f(2) = 9$.

3^0. Умови закінчення не виконуються.

4^0. Оскільки $f(0) > f(1) > f(2)$, то $\Delta = t = 1$, $a_0 = 1$, $x_1 = x_0 + t = 2$, $k = 1$.

5^0. Знайдемо наступну точку $x_2 = x_1 + 2\Delta = 4$.

6^0. Оскільки $f(x_2) = 1 < f(x_1) = 9$ і $\Delta = 1$, то $a_0 = x_1 = 2$. Приймемо $k = 2$ і перейдемо до кроку 5.

5^1. Знайдемо наступну точку $x_3 = x_2 + 4\Delta = 8$.

6^1. Оскільки $f(x_3) = 9 > f(x_2) = 1$ і $\Delta = t = 1$, то пошук завершено і права границя $b_0 = x_3 = 8$. Тому початковий інтервал невизначеності має вигляд $[a_0; b_0] = [2; 8]$.

Методи нульового порядку (прямі)

Методи, що використовують тільки значення функції $f(x)$ в заданих точках, називаються *методами нульового порядку* (або *прямими методами*) мінімізації. Перевагою методів нульового порядку є те, що від цільової функції не треба вимагати диференційовності і, більше того, вона може бути не задана в аналітичному вигляді.

2.1. Метод

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$.

Стратегія розв'язання задачі Метод дихотомії можна віднести до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і необхідна точність. Алгоритм ґрунтується на аналізі значень функції в двох точках (див. рис. 3.2). Для їхнього знаходження поточний інтервал невизначеності ділиться навпіл і в обидва боки від середини відкладається по $\delta/2$, де δ – мале додатне число. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

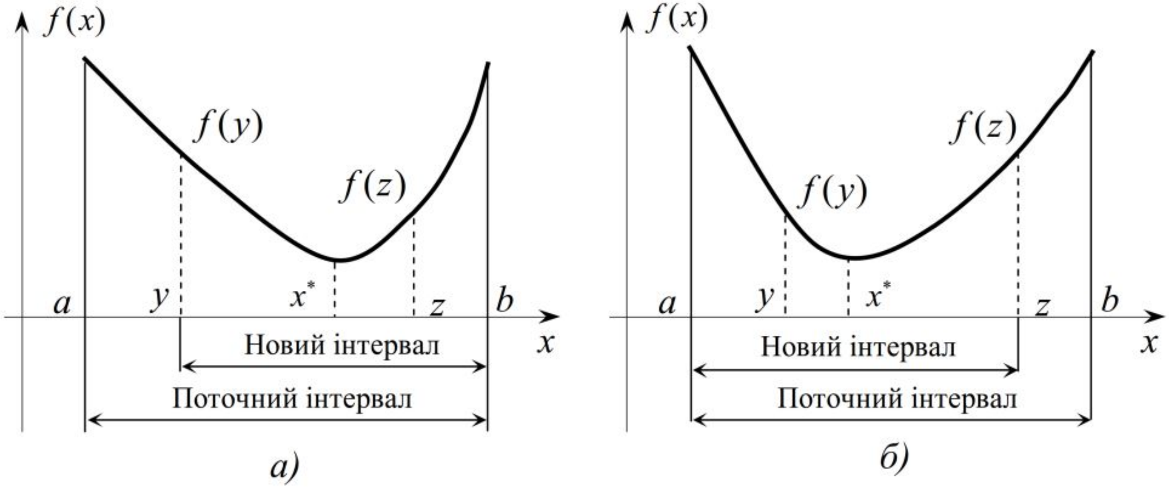


Рис. 3.2

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$, $\delta > 0$ мале число, $\varepsilon > 0$ – необхідну точність.

2. Прийняти $k = 0$.

3. Обчислити $y_k = \dfrac{a_k + b_k - \delta}{2}$, $f(y_k)$; $z_k = \dfrac{a_k + b_k + \delta}{2}$, $f(z_k)$.

4. Порівняти $f(y_k)$ з $f(z_k)$:

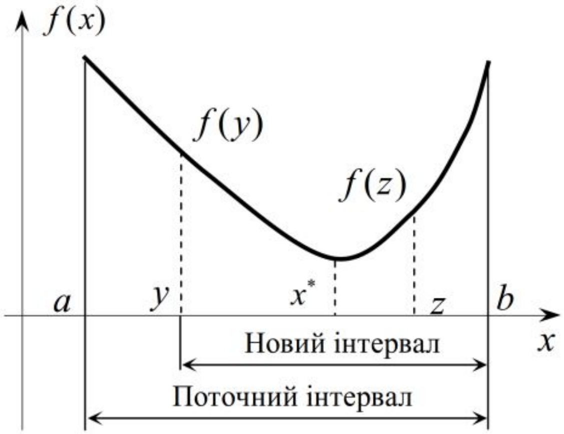
а) якщо $f(y_k) \le f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$.

5. Обчислити $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ і перевірити умови закінчення:

а) якщо $|L_{2(k+1)}| \le \varepsilon$ процес пошуку завершується і $x^* \in L_{2(k+1)} = [b_{k+1}; a_{k+1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину останнього інтервалу: $x^* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;

б) якщо $|L_{2(k+1)}| > \varepsilon$, прийняти $k = k + 1$ і перейти до кроку 3.



Приклад 3.4

Знайти мінімум функції $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом дихотомії.

Розв'язання

1. Задамо початковий інтервал невизначеності $L_0 = [0; 10]$ (див. п. 1 приклада 3.2). Приймемо $\delta = 0.2$, $\varepsilon = 1$.

2. Приймемо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $y_0 = \dfrac{a_0 + b_0 - \delta}{2} = 4.9$, $z_0 = \dfrac{a_0 + b_0 + \delta}{2} = 5.1$;

$$f(y_0) = -10.78, \quad f(z_0) = -9.18.$$

4^0. Оскільки $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = z_0 = 5.1$.

5^0. Одержимо $L_2 = [0; 5.1]$, $|L_2| = 5.1 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 1$ і перейдемо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $y_1 = \dfrac{a_1 + b_1 - \delta}{2} = 2.45$, $z_1 = \dfrac{a_1 + b_1 + \delta}{2} = 2.65$;

$$f(y_1) = -17.395, \quad f(z_1) = -17.755.$$

4^1. Оскільки $f(y_1) > f(z_1)$, то $a_2 = y_1 = 2.45$, $b_2 = b_1 = 5.1$.

5^1. Одержимо $L_4 = [2.45; 5.1]$, $|L_4| = 2.65 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 2$ і перейдемо до кроку 3.

3^2. Обчислимо $y_2 = \dfrac{a_2 + b_2 - \delta}{2} = 3.675$, $z_2 = \dfrac{a_2 + b_2 + \delta}{2} = 3.875$;

$$f(y_2) = -17.089, \quad f(z_2) = -16.469.$$

4^2. Оскільки $f(y_2) < f(z_2)$, то $a_3 = a_2 = 2.45$, $b_3 = z_2 = 3.875$.

5^2. Одержимо $L_6 = [2.45; 3.875]$, $|L_6| = 1.425 > \varepsilon = 1$. Приймемо $k = 3$ і перейдемо до кроку 3.

3^3. Обчислимо $y_3 = \dfrac{a_3 + b_3 - \delta}{2} = 3.06$, $z_3 = \dfrac{a_3 + b_3 + \delta}{2} = 3.26$;

$$f(y_3) = -17.99, \quad f(z_3) = -17.86.$$

4^3. Оскільки $f(y_3) < f(z_3)$, то $a_4 = a_3 = 2.45$, $b_4 = z_3 = 3.26$.

5^3. Одержимо $L_8 = [2.45; 3.26]$, $|L_8| = 0.81 < \varepsilon = 1$. Таким чином, $x^* \in L_8 = [2.45; 3.26]$, $n = 8$ і як розв'язок приймаємо:

$$x^* \cong \frac{2.45 + 3.26}{2} = 2.855, \quad f(x^*) = f_{\min} = -17.958.$$

2.2. Метод золотого

.

Постановка задачі Потрібно знайти безумовний мінімум унімодальної функції $f(x)$ однієї змінної, тобто знайти таку точку $x^* \in R$, що $f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$.

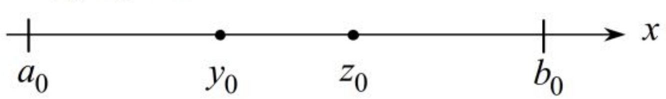
Для побудови конкретного методу одновимірної мінімізації, що працює за принципом послідовного скорочення інтервалу невизначеності, треба задати правило вибору на кожному кроці двох внутрішніх точок (див. рис. 3.2). Число обчислень нових точок і значень функції повинне бути мінімальним. В методі золотого перерізу в якості двох внутрішніх точок вибираються точки так званого золотого перерізу.

Означення 3.3. Точка здійснює *«золотий переріз» відрізка,* якщо відношення довжини всього відрізка до більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до меншого.

На відрізку $[a_0;b_0]$ є дві симетричні відносно його кінців точки y_0 і z_0:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_0} = \frac{b_0 - y_0}{y_0 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{z_0 - a_0} = \frac{z_0 - a_0}{b_0 - z_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618 .$$

Крім того, точка y_0 здійснює золотий переріз відрізка $[a_0;z_0]$, а точка z_0 – відрізка $[y_0;b_0]$ (рис. 3.5).



Стратегія розв'язання задачі

Метод можна віднести до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і необхідна точність. Алгоритм зменшення інтервалу ґрунтується на аналізі значень функції в двох точках (див. рис. 3.5). В якості точок обчислення функції вибираються точки золотого перерізу. Тоді з урахуванням властивостей золотого перерізу на кожній ітерації, крім першої, потрібно тільки одне нове обчислення функції. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$, точність $\varepsilon > 0$.

2. Прийняти $k = 0$.

3. Обчислити:

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0),\ z_0 = a_0 + b_0 - y_0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38196.$$

4. Обчислити $f(y_k)$, $f(z_k)$.

5. Порівняти значення $f(y_k)$ і $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \le f(z_k)$, то прийняти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ і $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$. Перейти до кроку до кроку 6;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ і $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$.

6. Обчислити $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ і перевірити умови закінчення:

а) якщо $\Delta \le \varepsilon$, процес пошуку завершується і $x^* \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти середину останнього інтервалу: $x^* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;

б) якщо $\Delta > \varepsilon$, прийняти $k = k + 1$ і перейти до кроку 4.

Підручник:
Нефьодов - Методи оптимізації в прикладах і задах

Алгоритм метода золотого сечения следующий.

Шаг 1. Определить x_1 и x_2 по формуле (2.6). Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Положить $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$. Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Проверка окончания поиска: если $\varepsilon_n > \varepsilon$, то перейти к шагу 3, иначе — к шагу 4.

Шаг 3. Переход к новому отрезку и новым пробным точкам. Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то положить

$$b = x_2, \quad x_2 = x_1, \quad f(x_2) = f(x_1), \quad x_1 = b - \tau(b-a)$$

и вычислить $f(x_1)$, иначе положить

$$a = x_1, \quad x_1 = x_2, \quad f(x_1) = f(x_2), \quad x_2 = b - \tau(b-a)$$

и вычислить $f(x_2)$. Положив $\varepsilon_n = \tau\varepsilon_n$, перейти к шагу 2.

Шаг 4. Окончание поиска: положить

$$x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}, \quad f^* \approx f(\bar{x}).$$

<u>Підручник:</u>
Гончаров - Методы оптимизации

2.3. Метод квадратичної апроксимації (метод парабол)

Стратегія розв'язання задачі Метод квадратичної інтерполяції, або метод Пауелла (Powell M. J. D.), можна віднести до послідовних стратегій. Задається початкова точка і за допомогою пробного кроку знаходяться три точки так, щоб вони були якнайближче до шуканої точки мінімуму. В одержаних точках обчислюються значення функції. Потім будується інтерполяційний поліном другого степеню, що проходить через ці три точки. Як наближення точки мінімуму береться точка мінімуму полінома. Процес пошуку закінчується, коли одержана точка відрізняється від найкращої з трьох опорних точок не більше ніж на задану величину.

Алгоритм

1. Задати початкову точку x_1, величину кроку $\Delta x > 0$, ε_1 і ε_2 – малі додатні числа, які характеризують точність.

2. Обчислити $x_2 = x_1 + \Delta x$.

3. Обчислити $f(x_1) = f_1$ і $f(x_2) = f_2$.

4. Порівняти $f(x_1)$ з $f(x_2)$:

а) якщо $f(x_1) > f(x_2)$, прийняти $x_3 = x_1 + 2\Delta x$ (рис. 3.6,а);

б) якщо $f(x_1) \le f(x_2)$ прийняти $x_3 = x_1 - \Delta x$ (рис. 3.6,б).

5. Обчислити $f(x_3) = f_3$.

6. Знайти $F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$, $x_{\min} = x_i :\ f(x_i) = F_{\min}$.

7. Обчислити точку мінімуму інтерполяційного полінома, побудованого по трьох точках: $\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2^2 - x_3^2) f_1 + (x_3^2 - x_1^2) f_2 + (x_1^2 - x_2^2) f_3}{(x_2 - x_3) f_1 + (x_3 - x_1) f_2 + (x_1 - x_2) f_3}$, і величину функції $f(\bar{x})$ (рис. 3.6).

Якщо знаменник в формулі для $\bar{x}$ на деякій ітерації перетворюються на нуль, то результатом інтерполяції є пряма. В цьому випадку рекомендується позначити $x_1 = x_{\min}$ і перейти до кроку 2.

8. Перевірити виконання умов закінчення:

$$\left| \frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| < \varepsilon_1, \quad \left| \frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}} \right| < \varepsilon_2 .$$

Тоді:

а) якщо обидві умови виконані, процедура закінчена і $x^* \cong \bar{x}$;

б) якщо хоча б одна з умов не виконується і $\bar{x} \in [x_1; x_3]$, вибрати найкращу точку ($x_{\min}$ або $\bar{x}$) і дві точки по обидві боки від неї. Позначити ці точки в природному порядку і перейти до кроку 6;

в) якщо хоча б одна з умов не виконується і $\bar{x} \notin [x_1; x_3]$, то прийняти $x_1 = \bar{x}$ й перейти до кроку 2.

2.4. Метод

Для побудови ефективного методу одновимірної мінімізації, що працює за принципом послідовного скорочення інтервалу невизначеності, треба задати правило вибору на кожному кроці двох внутрішніх точок. Бажано, щоб одна з них завжди використовувалася в якості внутрішньої і для наступного інтервалу. Тоді кількість обчислень функції скоротиться вдвічі. В методі Фібоначі (L. Fibonacci) реалізована стратегія, що забезпечує максимальне гарантоване скорочення інтервалу невизначеності при заданій кількості обчислень функції і претендує на оптимальність. Ця стратегія опирається на числа Фібоначі.

Означення 5.4. *Числа Фібоначі* визначаються за формулою

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2,3,4,\dots .$$

Послідовність чисел Фібоначі має вигляд $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$.

Стратегія розв'язання задачі

Метод Фібоначі можна віднести до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і кількість n обчислень функції. Алгоритм зменшення інтервалу ґрунтується на аналізі значень функції в двох точках (див. рис. 3.2). Точки обчислення функції знаходяться з використанням послідовності із $n+1$ чисел Фібоначі. Як і в методі золотого перерізу, на першій ітерації потрібні два обчислення функції, а на кожній наступній - тільки по одному. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності виявляється меншою за встановлену величину.

Алгоритм

1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0; b_0]$, $\varepsilon > 0$ – припустиму довжину кінцевого інтервалу, $\delta > 0$ – (константа визначення меж інтервалу).

2. Знайти кількість n обчислень функції як найменше ціле число, при якому задовольняється умова $F_n \geq \frac{|L_0|}{\varepsilon}$, і числа Фібоначі F_0, F_1, …, F_n … .

3. Прийняти $k = 0$.

4. Обчислити $y_0 = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0)$.

5. Обчислити $f(y_k)$ і $f(z_k)$.

6. Порівняти $f(y_k)$ і $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \leq f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} = y_k$; $y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-3}}{F_n}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, прийняти $a_{k+1} = y_k$; $b_{k+1} = b_k$; $y_{k+1} = z_k$; $z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$.

7. Перевірити умови закінчення і, якщо треба, зробити заключне n-е обчислення функції для одержання розв'язку:

а) якщо $k \neq n-3$, прийняти $k = k+1$ і перейти до кроку 5;

б) якщо $k = n-3$, то завжди $y_{n-2} = z_{n-2} = \dfrac{(a_{n-2} + b_{n-2})}{2}$, тобто відсутня точка нового обчислення функції. Треба прийняти: $y_{n-1} = y_{n-2} = z_{n-2}$; $z_{n-1} = y_{n-1} + \delta$. В точках y_{n-1} і z_{n-1} обчислюються значення функції і знаходяться границі кінцевого інтервалу невизначеності:

– якщо $f(y_{n-1}) \leq f(z_{n-1})$, прийняти $a_{n-1} = a_{n-2}$, $b_{n-1} = z_{n-1}$;

– якщо $f(y_{n-1}) > f(z_{n-1})$, прийняти $a_{n-1} = y_{n-1}$, $b_{n-1} = b_{n-2}$.

Процес пошуку завершується і $x^* \in [a_{n-1}; b_{n-1}]$. В якості наближеного розв'язку можна взяти будь-яку точку останнього інтервалу, наприклад, його середину $x^* \cong \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$.

2.5. Метод порозрядного пошуку

Рассмотрим усовершенствованный метод перебора с целью уменьшения количества значений $f(x)$, которые необходимо находить в процессе минимизации.

Во-первых, если $f(x_i) \le f(x_{i+1})$, то отпадает необходимость вычислять $f(x)$ в точках x_{i+2}, x_{i+3} и т.д., так как из унимодальности функции $f(x)$ следует, что $x^* \le x_{i+1}$.

Во-вторых, разумно было бы сначала определить отрезок, содержащий точку x^* с небольшой точностью, а затем искать ее на этом отрезке с меньшим шагом дискретизации, повышая точность.

Такая возможность улучшения метода перебора реализована в методе поразрядного поиска, в котором перебор точек отрезка происходит сначала с шагом $\Delta = x_{i+1} - x_i > \varepsilon$ до тех пор, пока не выполнится условие $f(x_i) \le f(x_{i+1})$ или пока очередная из этих точек не совпадет с концом отрезка. После этого шаг уменьшается (обычно в четыре раза), и перебор точек с новым шагом производится в противоположном направлении до тех пор, пока значения $f(x)$ не перестанут уменьшаться или очередная точка не совпадет с концом отрезка и т.д. Процесс завершается, когда перебор в данном направлении закончен, а использованный при этом шаг дискретизации не превосходит ε.

Підручник:
Гончаров - Методы оптимизации

Пример 2.4. Методом поразрядного поиска найти

$$f(x) = x^4 + e^{-x} \to \min,\ x \in [0,1] \text{ с точностью до } \varepsilon = 0{,}1.$$

□ Начальный шаг $\Delta = 0{,}25$. Вычисляя последовательно значения $f(x)$ в точках дискретизации с шагом 0,25, получим

x	$0 \to 0{,}25 \to 0{,}50 \to 0{,}75$
$f(x)$	$1{,}000 > 0{,}783 > 0{,}669 < 0{,}789$

Так как $f(0{,}50) < f(0{,}75)$, причем $|\Delta| > \varepsilon$, то поиск x^* продолжаем из начальной точки $x_0 = 0{,}75$, изменив его направление и уменьшив шаг в четыре раза:

x	$0{,}4375 \leftarrow 0{,}5000 \leftarrow 0{,}5625 \leftarrow 0{,}6250 \leftarrow 0{,}6875 \leftarrow 0{,}750$
$f(x)$	$0{,}682 > 0{,}669 < 0{,}670 < 0{,}688 < 0{,}726 < 0{,}789$

Так как $|\Delta| = 0{,}0625 < \varepsilon$, то поиск завершен и $x^* \approx 0{,}5$, $f^* \approx 0{,}67$ (сравнить с результатом решения примера методом перебора; здесь потребовалось только 8, а не 11 вычисленных значений функции $f(x)$). ■

№	Назва методу	$\varepsilon = 10^{-4}$			
		N_k	N_f	x^*	f^*
1.	**Дихотомії**	16	36	4.487679	0.526477
2.	**Золотого перерізу**	22	24	4.487690	0.526477

Примітка.
N_k- кількість ітерацій,
N_f- кількість обчислень функції,
x^*- наближене значення,
f^*- наближене значення мінімуму цільової функції.

№	Назва методу	$\varepsilon = 10^{-8}$			
		N_k	N_f	x^*	f^*
1.	**Дихотомії**	30	60	4.487670	0.526477
2.	**Золотого перерізу**	41	43	4.487670	0.526477

Примітка.
N_k- кількість ітерацій,
N_f- кількість обчислень функції,
x^*- наближене значення,
f^*- наближене значення мінімуму цільової функції.