

Абстрактный синтаксис языка Expr4

1) Синтаксические категории

$e \in \text{Expr4}$
 $be \in \text{BExpr}$
 $x \in \text{Var}$
 $bx \in \text{BVar}$
 $op \in \text{Op}$
 $bop \in \text{BOp}$
 $n \in \text{Num}$

2) Определения

$op ::= + \mid - \mid * \mid \text{div}$
 $bop ::= \text{And} \mid \text{Or}$
 $e ::= x \mid n \mid e' \text{ op } e'' \mid \text{let } x=e' \text{ in } e'' \mid$
 $\quad \text{if } be \text{ then } e' \text{ else } e''$
 $be ::= bx \mid T \mid F \mid \text{Not } be' \mid \text{Equal } (e, e')$
 $\quad \mid be' \text{ bop } be''$

Отношение \Rightarrow языка Expr4

- Оно имеет две составляющие:
арифметическую $\rho \vdash e \Rightarrow_A v$
и булеву $\rho \vdash be \Rightarrow_B bv$
- Окружение в языке Expr4 определяется объединением двух функций
 $\rho : \text{Var} \cup \text{BVar} \rightarrow \text{Num} \cup \{\text{T}, \text{F}\}$
- Таким образом значения в окружении становятся типированными: $\rho(x) \in \text{Num}, \rho(bx) \in \{\text{T}, \text{F}\}$.
- Типы отношений:
 $\Rightarrow_A : \text{ENV} \rightarrow \text{Expr4} \rightarrow \text{Num}$
 $\Rightarrow_B : \text{ENV} \rightarrow \text{Bexpr} \rightarrow \{\text{T}, \text{F}\}$.

Естественная семантика языка Expr4

✓ Правило CR

$$\frac{}{\rho \vdash n \Rightarrow_A n}$$

✓ Правило VarR

$$\frac{}{\rho \vdash x \Rightarrow_A \rho(x)}$$

✓ Правило OpR

$$\frac{\rho \vdash e \Rightarrow_A v \quad \rho \vdash e' \Rightarrow_A v'}{\rho \vdash e \text{ op } e' \Rightarrow_A \text{Ap}(\text{op}_{\text{Num}}, v, v')}$$

✓ Правило LocR

$$\frac{\rho \vdash e \Rightarrow_A v \quad \rho[x/v] \vdash e' \Rightarrow_A v'}{\rho \vdash \text{let } x = e \text{ in } e' \Rightarrow_A v'}$$

Естественная семантика языка Expr4 (продолжение)

✓ Правило IfR

$$\frac{\rho \vdash be \Rightarrow_B T \quad \rho \vdash e \Rightarrow_A v}{\rho \vdash \text{if } be \text{ Then } e \text{ Else } e' \Rightarrow_A v}$$

$$\frac{\rho \vdash be \Rightarrow_B F \quad \rho \vdash e' \Rightarrow_A v'}{\rho \vdash \text{if } be \text{ Then } e \text{ Else } e' \Rightarrow_A v'}$$

Семантика отношения \Rightarrow_B

- Правило CR

$$\frac{}{\rho \vdash \mathbf{T} \Rightarrow_B \mathbf{T}} \quad \frac{}{\rho \vdash \mathbf{F} \Rightarrow_B \mathbf{F}}$$

- Правило VarR

$$\frac{}{\rho \vdash \mathbf{bx} \Rightarrow_B \rho(\mathbf{bx})}$$

- Правило EqR

$$\frac{\rho \vdash e \Rightarrow_A v \quad \rho \vdash e' \Rightarrow_A v}{\rho \vdash \mathbf{Equal}(e, e') \Rightarrow_B \mathbf{T}}$$

$$\frac{\rho \vdash e \Rightarrow_A v \quad \rho \vdash e' \Rightarrow_A v'}{\rho \vdash \mathbf{Equal}(e, e') \Rightarrow_B \mathbf{F}}$$

$[v \neq v']$

Семантика отношения \Rightarrow_B (продолжение)

- Правило BOpR

$$\frac{\rho \vdash be \Rightarrow_B bv \quad \rho \vdash be' \Rightarrow_B bv'}{\rho \vdash be \text{ bop } be' \Rightarrow_B \text{Ap}(bop, bv, bv')}$$

- Правило NotR

$$\frac{\rho \vdash be \Rightarrow_B T}{\rho \vdash \text{Not } be \Rightarrow_B F} \quad \frac{\rho \vdash be \Rightarrow_B F}{\rho \vdash \text{Not } be \Rightarrow_B T}$$

Определение функций

Введем новую синтаксическую категорию - имена функций. С этими именами будем связывать тела функций и таким образом делать определения.

Например,

$$\mathbf{square(x) \leq x*x.}$$

Такое определение будем называть *декларацией*.

Смысл выражения $\mathbf{square(3)}$ можно сформулировать так: «Вычислить $\mathbf{x*x}$ в окружении, где с \mathbf{x} связано $\mathbf{3}$ ». Обобщённо в форме правила: Если задана декларация $\mathbf{f(x) \leq e}$, то применимо правило:

$$\frac{\rho \vdash e' \Rightarrow v' \quad \rho[x/v'] \vdash e \Rightarrow v}{\rho \vdash f(e') \Rightarrow v}$$

Рекурсивные функции

Определим функцию, вычисляющую факториал:

```
fact(x) <= If Equal(x,0)
      Then 1
      Else x*fact(x-1) .
```

Вычислим **Fact(2)**.

```
ρ[x/2] ⊢ If Equal(x,0) Then 1 Else x*fact(x-1) ⇒
2* Fact(1) ⇒
```

```
ρ[x/1] ⊢ 2*If Equal(x,0) Then 1 Else x*fact(x-1) ⇒
2 * 1 * fact(0) ⇒
```

```
ρ[x/0] ⊢ 2*1*If Equal(x,0) Then 1 Else x*fact(x-1) ⇒
2 * 1 * 1 ⇒ 2
```