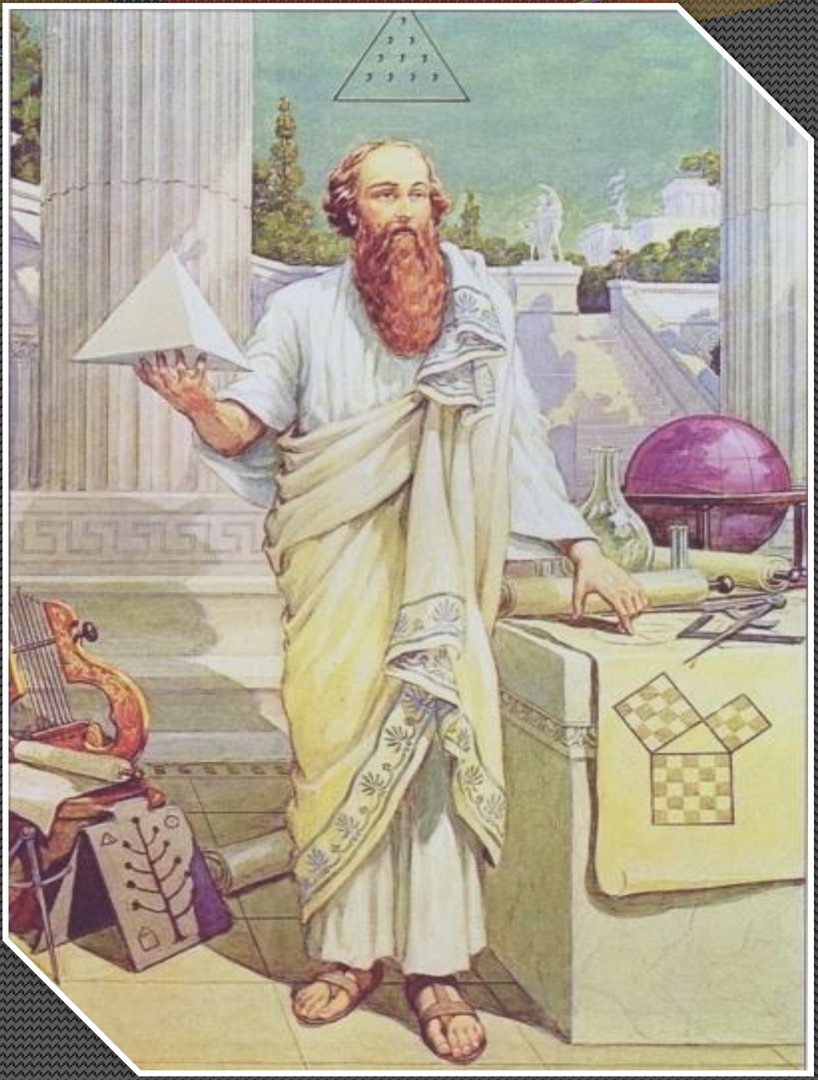
Неопределенный интеграл.
Способы вычисления

Интегральное исчисление появилось во времена античного периода развития математической науки и началось с метода исчерпывания, который разработан математиками Древней Греции, и представлял собой набор правил, разработанных Евдоксом Книдским. По этим правилам вычисляли площади и объёмы



Евдокс Книдский
ок. 408 — ок. 355 год до н. э.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной функции f(x) на интервале (a; b) называют совокупность первообразных функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где С – произвольная постоянная (const).

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C;$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C.$

Свойства неопределенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx\ .$$

3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\ .$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

Замечание. Формула $\int dF(x) = F(x) + C$ остается справедливой, если вместо x подставить любую дифференцируемую функцию.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов.

Основные методы интегрирования

1. Табличный.

2. Сведение к табличному преобразованием подынтегрального выражения в сумму или разность.

3. Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).

4. Интегрирование по частям

Пример 1.

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5dx + \int 4cosxdx - \int 2xdx + \int 1dx =$$

$$3\int x^5dx + 4\int cosxdx - 2\int xdx + 1\int dx =$$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$

$\int cosxdx = sinx +$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$

$\int dx = x + c$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4sinx - \frac{2x^2}{2} + x + C \Rightarrow \frac{1}{2}x^6 + 4sinx - x^2 + x + C$$

Пример 2.

Проверить решение

!

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\int\left(3x^{-5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x}\right)dx$$

$$3\int x^{-5}dx - \int x^4dx + 7\int e^x dx - 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{3x^{-4}}{-4} - \frac{x^5}{5} + 7e^x - 2lnx + c$$

$$-\frac{3}{4x^4} - \frac{1}{5}x^5 + 7e^x - 2lnx + c$$

Записать решение:

Пример 4. $\int \sin(6x+2)dx$

Проверить решение

Записать решение:

Введем новую переменную и выразим дифференциалы:

$6x+2=u$

$du=6dx, \qquad dx=\frac{1}{6}du$

$$\int \sin(6x+2)dx=\int \sin u\cdot\frac{1}{6}du$$

$$=\frac{1}{6}\int \sin u\,du=-\frac{1}{6}\cos u+c$$

$$-\frac{1}{6}\cos u+c=$$
$$-\frac{1}{6}\cos(6x+2)+C$$

Пример **5.** $\int \sqrt{3-6x}dx$

Проверить решение

$u = 3 - 6x$

Записать решение:

Выполняем замену:

$$u = 3 - 6x$$

Выражаем дифференциалы:

$$du = -6dx \quad dx = -\frac{1}{6}du$$

$$-\frac{1}{6}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$-\frac{1}{9}(3-6x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = -\frac{1}{9}\sqrt[2]{(3-6x)^3} + \mathrm{C}$$

$$-\frac{1}{9}(3-6x)\sqrt{3-6x}+\mathrm{C}$$

Интегрирование по частям

Формула $\int u\,dv = uv - \int v\,du,$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, называется

формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если

$$\int v\,du$$

более прост в вычислении, чем

$$\int u\,dv.$$

Интегрирование по частям

Теорема

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

$$\int_1^e x \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2 \ln e}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \boxed{\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$$