

Лекция . Парадоксы и проблемы теории множеств



*Он стал поэтом – для математика у него не хватало фантазии.
Немецкий математик Давид Гильберт о своем ученике*



Эвклид
III в. до н. э

Систематизация математики

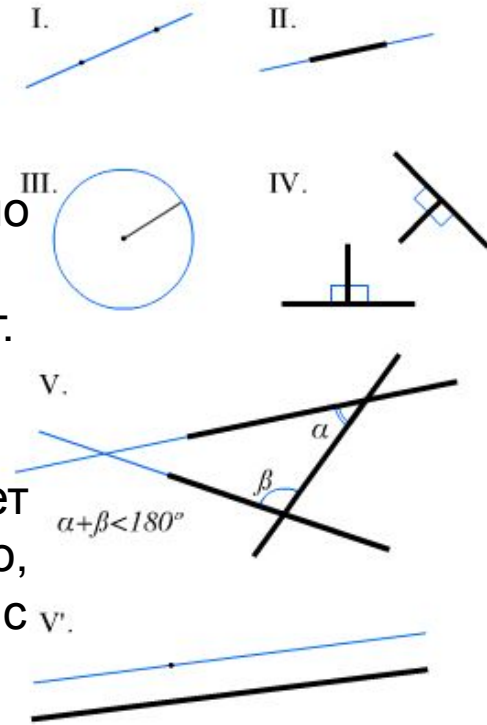
Изложение в «Началах» Эвклида ведётся строго дедуктивно. Каждая книга начинается с определений. В первой книге за определениями идут аксиомы и постулаты. Затем следуют предложения, которые делятся на задачи (в которых нужно что-то построить) и теоремы (в которых нужно что-то доказать).

Первая книга начинается определениями :

1. Точка есть то, что не имеет частей. (Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν — букв. «Точка есть то, часть чего ничто»)
2. Линия — длина без ширины.
3. Края же линии — точки.
4. Прямая линия есть та, которая равно лежит на всех своих точках. (Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κείται)
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Края же поверхности — линии.
7. Плоская поверхность есть та, которая равно лежит на всех своих линиях.

За определениями Евклид приводит постулаты

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.



Наиболее интересен в аксиоматике Евклида последний, знаменитый пятый постулат. **Среди других, интуитивно очевидных постулатов, он нарочито чужероден**, его громоздкая формулировка закономерно вызывает некоторое чувство протеста и желание отыскать для него доказательство.

Такие доказательства уже в древности пытались построить Птолемей и Прокл; а в Новое время из этих попыток [развились неевклидова геометрия](#). Первые 28 теорем I книги относятся к абсолютной геометрии, то есть не опираются на V постулат.

За постулатами следуют аксиомы, которые имеют характер общих утверждений, относящихся в равной мере как к числам, так и к непрерывным величинам:

1.Равные одному и тому же равны и между собой.

2.И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3.И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

4.(И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.)

5.(И удвоенные одного и того же равны между собой.)

6.(И половины одного и того же равны между собой.)

7.И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

8.И целое больше части.

9.(И две прямые не содержат пространства.)

В скобки взяты аксиомы, принадлежность которых Евклиду Гейберг, автор классической реконструкции текста «Начал», счёл сомнительной.

Постулаты 4—5 (I, Постулаты, 4—5) в ряде списков выступают как аксиомы (I, Аксиомы, 10—11).

Предыстория теории множеств

Множества, в том числе и бесконечные, в неявной форме фигурировали в математике со времён Древней Греции.

Зачатки идеи о равномощности множеств встречаются у Галилея: рассуждая о соответствии между числами и их *квадратами*, он обращает внимание на неприменимость аксиомы «целое больше части» к бесконечным объектам.

Парадокс Галилея — пример, иллюстрирующий свойства бесконечных множеств. *Натуральных чисел столько же, сколько квадратов натуральных чисел*, то есть в множестве 1, 2, 3, 4... столько же элементов, сколько в множестве 1, 4, 9, 16...

В своей последней работе «Две Науки», Галилей привёл два противоречащих друг другу суждения о натуральных числах.

Первое: некоторые числа являются *точными квадратами* (то есть квадратами других целых чисел); другие же числа таким свойством не обладают. Таким образом, **точных квадратов и обычных чисел вместе должно быть больше, чем просто точных квадратов.**

Второе суждение: для каждого натурального числа найдётся его точный квадрат, и наоборот — для каждого точного квадрата найдётся целый квадратный корень, **поэтому точных квадратов и натуральных чисел должно быть одинаковое количество.** Это один из первых, хотя и не самый ранний, пример использования понятия взаимно-однозначного отображения в контексте бесконечных множеств. Галилей сделал вывод, что **судить об одинаковом количестве элементов можно только для конечных множеств.**

Первое представление об актуально бесконечном множестве относят к работам Гаусса начала 1800-х годов, опубликованным в его «Арифметических исследованиях».

Вводя сравнения на множестве рациональных чисел, Гаусс обнаружил классы эквивалентности (**классы вычетов**) и разбивает всё множество на эти классы, отмечая их бесконечность и взаимное соответствие, рассматривает бесконечное множество решений $ax + b \equiv 0 \pmod{n}$ как единую совокупность,

классифицирует бинарные квадратичные формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$ в зависимости от определителя и рассматривает этот бесконечный набор классов как **бесконечные совокупности объектов нечисловой природы**,

предполагает возможность выбирать из классов эквивалентностей по одному объекту-представителю всего класса: использует методы, характерные для теоретико-множественного подхода, не использовавшиеся явно в математике до XIX века.

В более поздних работах Гаусс, рассматривая совокупность комплексных чисел с рациональными вещественной и мнимой частью, говорит о вещественных, положительных, отрицательных, чисто мнимых целых числах как её подмножествах. Однако бесконечные множества или классы как самостоятельные объекты исследования Гауссом явно не выделялись, более того, Гауссу принадлежат **высказывания против возможности использования актуальной бесконечности в математических доказательствах**.

В работах Галуа, Шёмана и Серре по теории функциональных сравнений 1820—1850-х годов намечаются **элементы теоретико-множественного подхода**,

которые обобщил Дедекин в 1857 году, явно сформулировавший в качестве одного из выводов **необходимость рассмотрения целой системы бесконечно многих сравнимых чисел как единого объекта, общие свойства которого равным образом присущи всем его элементам**, а систему бесконечно многих несравнимых классов уподобляет ряду целых чисел.

Штейнер явно вводит понятие несчётного множества для множества точек на прямой и множества лучей в пучке и оперирует с их несчётными подмножествами, а в работе 1867 года вводит понятие **мощности как характеристики множеств**, между которыми возможно установить проективное соответствие.

Кантор позднее заимствовал само понятие и термин у Штейнера, обобщив проективное соответствие до взаимно-однозначного.

В теории вещественного числа Вейерштрасса, Дедекинда и Мерзэ, созданные в конце 1850-х годов и опубликованные в начале 1860-х во многом перекликаются с идеями наивной теории множеств рассматривают **континуум** как множество, **образованное из рациональных и иррациональных точек**. на основе приема информации и ее обработки;



1781-1848

Наиболее близкие к наивной теории множеств Кантора представления содержатся в трудах **Больцано**, прежде всего, в работе «*Парадоксы бесконечного*», опубликованной после смерти автора в 1851 году, в которой рассматриваются произвольные числовые множества, и для их сравнения явно определено понятие **взаимно-однозначного соответствия**, и сам термин «множество» (нем. *menge*) также впервые систематически использован в этой работе. Работа Больцано носит в большей степени **философский** характер, нежели математический, в ней нет чёткого разграничения между мощностью множества и понятием величины или порядка бесконечности, и сколь-нибудь формальной и целостной математической теории в этих представлениях нет.

Бернард Больцано родился 5 октября 1781 года в Праге. В 1796 году поступил в Карлов университет в Праге, изучал математику, философию и физику на факультете философии, с 1800 - теологию на факультете теологии, в 1804 году принял сан католического священника. В 1805 году получил новообразованную кафедру истории и философии религии и защитил докторскую диссертацию. В 1818 году избран деканом философского факультета. Труды периода до 1819 года в основном относятся к теологии и философии, в них оппонировал Канту, выступал против психологизма в логике и чёткое разграничение логического и психологического. Религия, полагал Больцано, не выводится из морали; невозможно верить в Бога, свободу и бессмертие, если для этого нет объективных оснований. Больцано критически относился к традиционному богословию и разделял идеи католического просвещения, из-за чего имел репутацию вольнодумца. Свободомыслие Больцано вызвало раздражение церковных властей, Папа римский потребовал у австрийского императора сместить Больцано. В 1820 году решением императора Больцано был снят со всех постов в университете и взят под надзор полиции. Больцано уехал в деревню и посвятил себя математике и логике.

Наивная теория множеств

раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств.

Создателем теории множеств в наивном её варианте является немецкий математик Георг Кантор.



Георг Кантор Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 3 марта 1845, Санкт-Петербург — 6 января 1918, Галле

Кантор ввёл понятие **взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств**, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что **действительных чисел «больше», чем натуральных.**

Теорема Кантора, утверждает существование «бесконечности бесконечностей». Он определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику.

Теория Кантора о **трансфинитных числах** первоначально была воспринята настолько нелогичной, парадоксальной и даже шокирующей, что натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников, в частности, Леопольда Кронекера и Анри Пуанкаре. Некоторые христианские богословы видели в работе Кантора вызов уникальности абсолютной бесконечности природы Бога, приравняв однажды теорию трансфинитных чисел и пантеизм. Критика была очень агрессивна: Пуанкаре называл его идеи **«тяжёлой болезнью», поражающей математическую науку**; а в публичных заявлениях и личных выпадах Кронекера в адрес Кантора мелькали такие эпитеты, как «научный шарлатан», «отступник» и «развратитель молодёжи».

Теорема Кантора

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Доказательство

Предположим, что существует множество A , равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A , т.е., что существует такая биекция f , ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A .

Рассмотрим множество B , состоящее из всех элементов A , не принадлежащих своим образам при отображении f (оно существует по аксиоме выделения):

$$B = \{ x \in A : x \notin f(x) \}.$$

f биективно, а $B \subseteq A$, поэтому существует $y \in A$ такой, что $f(y) = B$.

Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B .

Если $y \in B$, то $y \in f(y)$, а тогда, по определению B , $y \notin B$.

И наоборот, если $y \notin B$, то $y \in f(y)$, а следовательно, $y \in B$.

В любом случае, получаем противоречие.

Следовательно, исходное предположение ложно и A не равномощно 2^A .

Заметим, 2^A содержит подмножество, равномощное A (например, множество всех одноэлементных подмножеств A), а тогда из только что доказанного следует |

$$2^A > |A|$$

О бесконечности

Кантор порвал с многовековой традицией уже тем, что рассматривал бесконечные множества как единые сущности, **притом сущности, доступные человеческому разуму.**

Начиная с Аристотеля математики проводили различие между актуальной бесконечностью объектов и потенциальной бесконечностью.

Чтобы пояснить эти понятия, рассмотрим возраст Вселенной. Если предположить, что Вселенная возникла в какой-то момент времени в далеком прошлом и будет существовать вечно, то ее возраст потенциально бесконечен: в любой момент времени возраст Вселенной конечен, но он продолжает возрастать и в конце концов превзойдет любое число лет. Множество (положительных) целых чисел также потенциально бесконечно: оборвав счет, например, на миллионе, мы всегда можем затем прибавить к нему 1, 2 и т.д. Но если Вселенная существовала в прошлом всегда, то ее возраст в любой момент времени актуально бесконечен. Аналогично множество целых чисел, рассматриваемое в «готовом виде» как существующая совокупность, актуально бесконечно.

Вопрос о том, следует ли считать бесконечные множества актуально или потенциально бесконечными, имеет длинную историю. Аристотель в своей «Физике» утверждал: **«Остается альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование... Актуально бесконечное не существует».** По мнению Аристотеля, актуальная бесконечность не нужна математике. Греки вообще считали бесконечность недопустимым понятием. **Бесконечность — это нечто безграничное и неопределенное.**

О бесконечности

Эйлер довольно легкомысленно утверждал в своей «Алгебре» (1770), что $1/0$ — бесконечность, хотя и не счел нужным определить, что такое бесконечность, а лишь ввел для нее обозначение ∞ .

Без тени сомнения Эйлер утверждал также, что $2/0$ вдвое больше, чем $1/0$. Еще больше недоразумений возникало в тех случаях, когда речь шла об использовании символа ∞ для записи пределов при n , стремящемся к бесконечности. В подобных случаях символ ∞ означает лишь, что n неограниченно возрастает и может принимать сколь угодно большие (но конечные!) значения, при которых разность между 0 и $1/n$ становится сколь угодно малой.

Большинство математиков (Галилей, Лейбниц, Коши, Гаусс и другие) отчетливо понимали различие между потенциально бесконечными и актуально бесконечными множествами и **исключали актуально бесконечные множества из рассмотрения**. Если им приходилось, например, говорить о множестве всех рациональных чисел, то они отказывались приписывать этому множеству число — его мощность.

Декарт утверждал: «**Бесконечность распознаваема, но не познаваема**».

Гаусс писал в 1831 г. Шумахеру: «**В математике бесконечную величину никогда нельзя использовать как нечто окончательное; бесконечность — не более чем *façon de parler* [манера выразиться], означающая предел, к которому стремятся одни величины, когда другие бесконечно убывают**».

Актуально бесконечные множества

Введя **актуально бесконечные множества**, Кантор выступил против традиционных представлений о бесконечности, разделяемых великими математиками прошлого.

Свою позицию Кантор пытался аргументировать ссылкой на то, что потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности. Кантор указывал также на то, что десятичные разложения иррациональных чисел, например числа $\sqrt{2}$, представляют собой актуально бесконечные множества, поскольку любой конечный отрезок такого разложения дает лишь конечное приближение к иррациональному числу.

Сознавая, сколь резко он расходится во взглядах со своими предшественниками, Кантор с горечью признался в 1883 г.: **«Я оказался в своего рода оппозиции к общепринятым взглядам на математическую бесконечность и к нередко отстаиваемым суждениям о природе числа».**

В 1873 г. Кантор не только занялся изучением бесконечных множеств как «готовых» (т.е. реально существующих) сущностей, но и поставил задачу классифицировать актуально бесконечные множества.

Введенные Кантором определения позволяли сравнивать два актуально бесконечных множества и устанавливать, содержат ли они одинаковое, «число элементов» или нет. Основная идея Кантора сводилась к установлению **взаимно-однозначного соответствия между множествами.**

Взаимно-однозначное соответствие

взаимно-однозначное соответствие между положительными целыми числами и четными числами можно установить, объединив те и другие в пары:

1 2 3 4 5 ...,

2 4 6 8 10 ...

Каждому целому числу при этом соответствует ровно одно четное число (равное удвоенному целому), а каждому четному числу соответствует ровно одно целое число (равное половине четного).

Следовательно, в каждом из двух бесконечных множеств — множестве целых чисел и множестве четных чисел — элементов столько же, сколько в другом множестве.

Установленное соответствие (то, что все множество целых чисел можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью этого множества) казалось неразумным предшественникам Кантора и заставляло их отвергать все попытки рассмотрения бесконечных множеств.

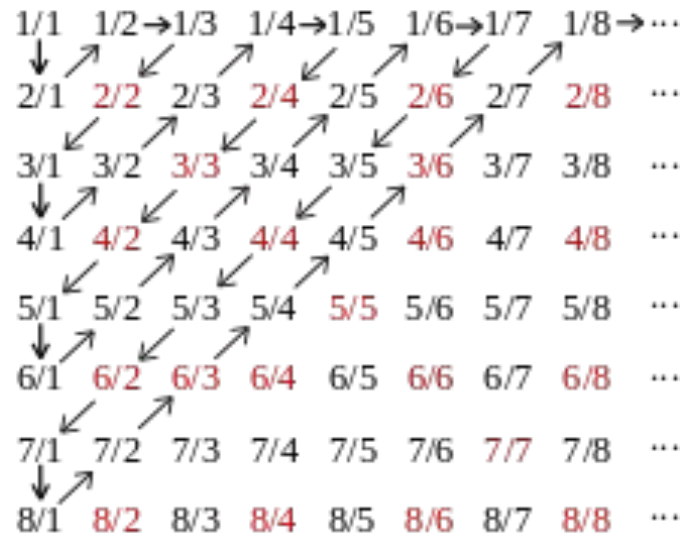
Но это не испугало Кантора. С присущей ему проницательностью он понял, что **бесконечные множества могут подчиняться новым законам, не применимым к конечным совокупностям или множествам**, подобно тому как, например, кватернионы подчиняются законам, не применимым к вещественным числам.

Кантор определил **бесконечное множество** как такое **множество, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со своим собственным** (т.е. отличным от всего множества) **подмножеством**.

Неожиданные результаты НТМ

К созданию абстракции точечного множества Кантора подтолкнули работы 1870-1872 годов по развитию теории тригонометрических рядов (продолжавшие труды Римана), в которых он вводит понятие предельной точки, близкое к современному и пытается с его помощью классифицировать «исключительные множества» (множества точек расходимости ряда, возможно бесконечные).

Заинтересовавшись вопросами равномощности множеств, в 1873 году Кантор обнаруживает **счётность множества рациональных чисел**



Доказывает, что мощность

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \infty$
натуральных чисел равна мощности рациональных чисел.

Еще более неожиданные результаты

Идея взаимно-однозначного соответствия привела Кантора к неожиданному результату: он показал, что можно установить **взаимно-однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости** (и даже точками n -мерного пространства).

По поводу этого результата он писал в 1877 г. своему другу Рихарду Дедекинду: **«Я вижу это, но не могу в это поверить»**. Тем не менее Кантор поверил в правильность полученного им результата и, следуя принципу взаимно-однозначного соответствия, установил для бесконечных множеств отношение эквивалентности, или равенства («равномощности» двух множеств).

В публикации 1878 года о равномощности континуумов разного числа измерений, Кантор использует теоретико-множественные операции, ссылаясь на работу Дедекинда.

В этой же работе впервые в явном виде введено понятие мощности множества, доказана счётность всякого бесконечного подмножества счётного множества, а конечные поля алгебраических чисел предложены как примеры счётных множеств. Результат Кантора о равномощности континуумов разного числа измерений привлёк широкое внимание математиков, и уже в том же году последовало несколько работ (Люрот, Томе, Нетто) с неудачными попытками доказать невозможность одновременной непрерывности и взаимной однозначности отображения континуумов различных размерностей (точное доказательство этого факта дал Брауэр в 1911 году).

В 1880 году Кантор формулирует две ключевых идеи теории множеств — понятие о **пустом множестве** и **метод трансфинитной индукции**.

Равны ли бесконечные множества?

Представьте бесконечную строку, содержащая последовательность нулей и единиц, случайно чередуемых.

1 1 0 1 0 1 0 1...

А теперь вопрос.

Если у нас имеется бесконечное число подобных, не равных друг другу строк, все ли варианты строк будут в такой бесконечной таблице?

Равны ли бесконечные множества?

Как не покажется странным, ответ – **нет**.

И это доказано диагональным методом Кантора.

Представьте бесконечную последовательность различных бесконечных строк, содержащая последовательность нулей и единиц, случайно чередуемых.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \dots \\ & & & & & & & \dots \end{array}$$

.....

Теперь проинвертируем элементы на главной диагонали бесконечной матрицы

И мы получаем строку, которая не может быть в бесконечной таблице.

0 1 0.....

Ведь от первой строки она отлична по крайней мере в первом элементе, от второй вторым, от третьей третьим и так далее...

Отсюда Кантор сделал поразительный вывод: **есть разные бесконечности**.

Шкала бесконечностей

Кантор выяснил также, в каком смысле следует понимать, **что одно бесконечное множество больше другого**: если множество A можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью или собственным подмножеством множества B , а множество B невозможно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством A или собственным подмножеством множества A , то множество B по определению больше множества A .

Это определение по существу обобщает на бесконечные множества то, что непосредственно очевидно в случае конечных множеств. Если у нас имеется 5 шаров и 7 книг, то между шарами и частью книг можно установить взаимно-однозначное соответствие, но невозможно установить взаимно-однозначное соответствие между всеми книгами и всеми шарами или частью шаров.

Используя свои определения равенства и неравенства бесконечных множеств, Кантор сумел получить поистине удивительный результат: **множество целых чисел равно («равномощно») множеству рациональных чисел** (всех положительных и отрицательных целых чисел и дробей), **но меньше множества всех вещественных (рациональных и иррациональных) чисел.**

Алгебра бесконечности

Кантор предложил ввести специальные символы \aleph для обозначения количеств элементов в бесконечных множествах.

Множество целых (или натуральных) чисел и множества, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с этим множеством, содержат одинаковое количество (или «число») элементов, которое Кантор обозначил символом \aleph_0 (алеф-нуль; алеф — первая буква алфавита на иврите).

Так как, по доказанному, множество всех вещественных чисел больше множества целых чисел, Кантор обозначил количество элементов в множестве всех вещественных чисел новым символом — c .

Кантору удалось доказать, что для любого заданного множества всегда найдется множество, большее исходного. Так, множество всех подмножеств данного множества всегда больше первого множества.

$$2^{\aleph_0} = c = \aleph_1$$

Гипотеза континуума

Множество всех множеств

Кантор установил, что существуют все большие бесконечные множества, т.е. все большие трансфинитные числа. Но в 1895 г. у Кантора возникла идея рассмотреть множество всех множеств. Мощность такого «сверхмножества» должна была бы быть самой большой из возможных.

Но еще ранее Кантор доказал, что множество всех подмножеств любого заданного множества должно обладать трансфинитным числом, которое превосходит трансфинитное число, отвечающее исходному множеству.

Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся; однако затем он решил, что все множества можно разбить на противоречивые и непротиворечивые, и в 1899 г. сообщил об этом Дедекинду.

Таким образом, множество всех множеств и соответствующее ему трансфинитное число попадали в разряд «противоречивых» — и тем самым исключались из рассмотрения.

Парадокс Кантора — парадокс теории множеств, который демонстрирует, что предположение о существовании множества всех множеств ведёт к противоречиям и, следовательно, противоречивой является теория, в которой построение такого множества возможно.

Предположим, что множество всех множеств $V = \{ x \mid x = x \}$ существует. В этом случае справедливо $\forall x \forall t (x \in t \rightarrow x \in V)$ т. е. всякое множество t является подмножеством V . Но из этого следует $\forall t \mid t \mid \leq \mid V \mid$ - мощность любого множества не превосходит мощности V .

В силу аксиомы множества всех подмножеств, для V , как и любого множества, существует множество всех подмножеств $P(V)$ и по теореме Кантора $\mid P(V) \mid = 2^{\mid V \mid} > \mid V \mid$, что противоречит предыдущему утверждению. Следовательно, V не может существовать, что вступает в противоречие с «наивной» гипотезой о том, что любое синтаксически корректное логическое условие определяет множество, то есть что $\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow A)$ для любой формулы A , не содержащей y .

Другая формулировка: **не существует максимального кардинального числа.**
В самом деле: пусть оно существует и равно μ . Тогда по теореме Кантора $2^\mu > \mu$.

Этот парадокс, открытый Кантором около 1899 года, обнаружил необходимость пересмотра «наивной теории множеств» и стимулировал разработку строгой аксиоматики теории множеств. Схема аксиом $\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow A)$ отвергнута как противоречивая, вместо этого была разработана система ограничений на вид условия, задаваемого формулой A .

Признание НТМ

первоначальный вариант теории множеств, умышленно названный Георгом Кантором **учением о множествах**, состоял из двух аксиом:

1. **аксиомы объёмности** $\forall a_1 \forall a_2 (\forall b (b \in a_1 \leftrightarrow b \in a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$, которая позволяет сформулировать критерий равенства множеств,
2. «**аксиомы математической свободы**» $\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow \Phi [a , c])$, которая позволяет создавать множества с помощью «суждения свободы» $\Phi [a , c]$

Даже десятилетия спустя после смерти Кантора, Витгенштейн с горечью отмечал, что математика «истоптана вдоль и поперёк разрушительными идиомами теории множеств», которое он отклоняет как «шутовство», «смехотворное» и «ошибочное».

Периодически повторяющиеся с 1884 года и до конца дней Кантора приступы депрессии некоторое время ставили в вину его современникам, занявшим чересчур агрессивную позицию, сейчас считается, что эти приступы, возможно, были проявлением биполярного расстройства.

Резкой критике противостояли всемирная известность и одобрение. В 1904 году Лондонское королевское общество наградило Кантора **Медалью Сильвестра**, высшей наградой, которую оно могло пожаловать.

Сам Кантор верил в то, что теория трансфинитных чисел была сообщена ему свыше.

В своё время, защищая её от критики, Давид Гильберт смело заявил: **«Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор»**

Парадокс Рассела

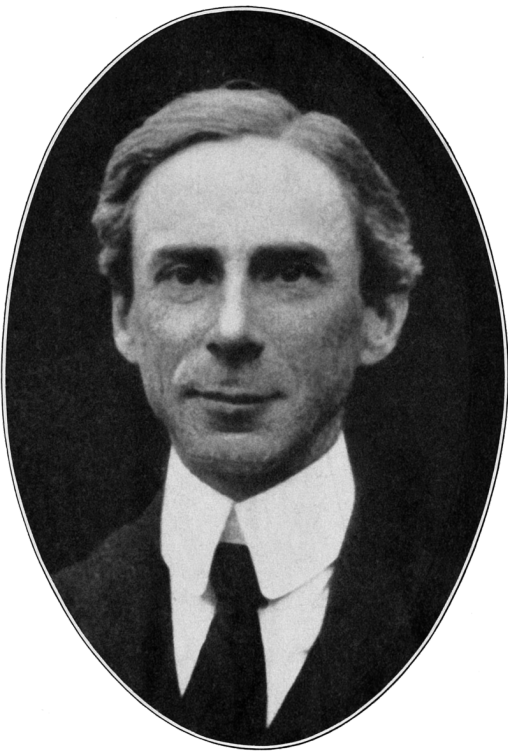
открытый в 1901 г. Бертраном Расселом теоретико-множественный парадокс (антиномия), демонстрирующий противоречивость логической системы Фреге, являвшейся ранней попыткой формализации наивной теории множеств Георга Кантора. Был открыт ранее, но не опубликован Эрнстом Цермело.

На неформальном языке парадокс можно описать следующим образом. Условимся называть множество «обычным», **если оно не является своим собственным элементом**. Например, множество всех людей является «обычным», так как само множество - не человек. Примером «необычного» множества является множество всех множеств, так как оно само является множеством, а следовательно, само является собственным элементом.

Можно рассмотреть множество, состоящее только из всех «обычных» множеств, такое множество называется расселовским множеством. Парадокс возникает при попытке определить, является ли это множество «обычным» или нет, то есть содержит ли оно себя в качестве элемента. Есть две возможности.

С одной стороны, если оно «обычное», то оно должно включать себя в качестве элемента, так как оно по определению состоит из всех «обычных» множеств. Но тогда оно не может быть «обычным», так как «обычные» множества — это те, которые себя не включают.

Остаётся предположить, что это множество «необычное». Однако оно не может включать себя в качестве элемента, так как оно по определению должно состоять только из «обычных» множеств. Но если оно не включает себя в качестве элемента, то это «обычное» множество. В любом случае получается противоречие.



Бертран Рассел
1872-1970

Противоречивый фрагмент наивной теории множеств, который можно определить как теорию первого порядка с бинарным отношением принадлежности \in и схемой выделения для каждой логической формулы $P(x)$ с одной свободной переменной в наивной теории множеств есть аксиома $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow P(x))$. Для всякого условия $P(x)$ существует множество y , состоящее из тех x , которые удовлетворяют условию $P(x)$.

Формулировка парадокса Рассела следующим образом. Пусть $P(x)$ есть формула $x \notin x \leftrightarrow P(x)$ (означает, что множество x не содержит себя в качестве элемента, является «обычным» множеством.) Тогда, по аксиоме выделения, найдётся расселовское множество y такое, что $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$. Так как это верно для любого x , то верно и для $x = y$. То есть $y \in y \leftrightarrow y \notin y$. Из этого следует, что в **наивной теории множеств выводится противоречие.**

Парадокс не возник бы, если предположить, что расселовского множества не существует. Однако само такое предположение парадоксально: в канторовской теории множеств считается, что **любое свойство определяет множество элементов, удовлетворяющих этому свойству**. Так как свойство множества быть «обычным» выглядит корректно определённым, то должно существовать множество всех «обычных» множеств.

Парадокс брадобрея

Рассел упоминает следующий вариант парадокса, сформулированный в виде загадки, которую ему кто-то подсказал.

Пусть в некой деревне живёт брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их. Бреет ли брадобрей сам себя? Любой ответ приводит к противоречию.

Рассел замечает, что **этот парадокс не эквивалентен его парадоксу и легко решается**. Действительно, точно так же, как парадокс Рассела показывает, что не существует расселовского множества, парадокс брадобрея показывает, что такого брадобрея просто не существует. Разница состоит в том, что в несуществовании такого брадобрея ничего удивительного нет: не для любого свойства найдётся брадобрей, который бреет людей, обладающих этим свойством. **Однако то, что не существует множества элементов, заданных некоторым вполне определённым свойством, противоречит наивному представлению о множествах и требует объяснения.**

Наиболее близким по формулировке к парадоксу Рассела является следующий вариант его изложения: Библиографические каталоги — это книги, которые описывают другие книги. Некоторые каталоги могут описывать другие каталоги. Некоторые каталоги могут описывать даже сами себя. Можно ли составить каталог всех каталогов, которые не описывают сами себя?

Парадокс возникает при попытке решить, **должен ли этот каталог описывать сам себя**. Несмотря на кажущуюся близость формулировок (это фактически парадокс Рассела, в котором вместо множеств используются каталоги), этот парадокс, так же, как и парадокс брадобрея, разрешается просто: такой каталог составить нельзя.

В парадоксе Рассела нет ошибки: **он действительно доказывает противоречивость наивной теории множеств.**

Руководствуясь «аксиомой математической свободы», невозможно отличить «свободу» от «вседозволенности»,

Чтобы избавиться от противоречия, нужно исправить теорию множеств, так, чтобы **она не допускала расселовское множество.**

Это можно сделать несколькими способами.

Наиболее естественным путём является **запрещение тем или иным способом множеств, которые могут содержать себя в качестве элемента.** Таким образом будет запрещено и множество всех множеств (по крайней мере, совокупность всех множеств не будет сама являться множеством).

Однако необходимо иметь в виду, что, с одной стороны, просто одного запрещения множеству иметь себя в качестве элемента недостаточно, чтобы избавиться от противоречия.

С другой стороны, само по себе разрешение множествам включать себя в качестве элемента не приводит к противоречиям. Например, ничто не мешает создать каталог, который будет включать в себя все каталоги, в том числе описывать самого себя. Многие языки программирования позволяют контейнерам включать себя в качестве элемента.

Рассел получил свой парадокс, анализируя доказательство Кантора о несуществовании наибольшего кардинального числа. Этот факт противоречит существованию множества всех множеств, так как его мощность должна быть максимальной. Тем не менее, по теореме Кантора, множество всех подмножеств данного множества имеет бóльшую мощность, чем само множество. Доказательство этого факта основано на следующем диагональном аргументе:

Пусть есть взаимнооднозначное соответствие, которое каждому элементу x множества X ставит в соответствие подмножество s_x множества X . Пусть d будет множеством, состоящим из элементов x таких, что $x \in s_x$ (диагональное множество). Тогда дополнение этого множества $s = d^c$ не может быть ни одним из s_x . Следовательно, соответствие было не взаимнооднозначным.

Кантор использовал диагональный аргумент при доказательстве несчётности действительных чисел в 1891 году. Парадокс Кантора получается, если применить этот аргумент к множеству всех множеств.

s_1	=	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
s_2	=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	
s_3	=	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...	
s_4	=	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...	
s_5	=	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	...	
s_6	=	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	...	
s_7	=	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	...	
s_8	=	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...	
s_9	=	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...	
s_{10}	=	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	...
s_{11}	=	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	...
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	

$$s = 10111010011\dots$$

Фактически расселовское множество есть диагональное множество Кантора s

Парадокс Тристрама Шенди

рассуждение Рассела в книге «Мистицизм и логика» в связи с понятием равномогности множеств), **демонстрирующее нарушение интуитивного принципа «часть меньше целого» для бесконечных множеств.**

В романе Стерна *«Жизнь и мнения Тристрама Шенди, джентльмена»* герой обнаруживает, что ему потребовался целый год, чтобы изложить события первого дня его жизни, и ещё один год понадобился, чтобы описать второй день. В связи с этим герой сетует, что материал его биографии будет накапливаться быстрее, чем он сможет его обработать, и он никогда не сможет её завершить. **«Теперь я утверждаю, — возражает на это Рассел, — что если бы он жил вечно и его работа не стала бы ему в тягость, даже если бы его жизнь продолжала быть столь же богатой событиями, как вначале, то ни одна из частей его биографии не осталась бы ненаписанной».**

Действительно, события n дня Шенди мог бы описать за n -й год и, таким образом, в его автобиографии каждый день оказался бы запечатлённым. Иначе говоря, **если бы жизнь длилась бесконечно, то она насчитывала бы столько же лет, сколько дней.**

Можно привести примеры рядов натуральных чисел (например факториалов) со всё более быстрым ростом, представителей которых, как бы редко они ни были расположены в натуральном ряду, будет столько же, сколько натуральных чисел.

Данное рассуждение демонстрирует нарушение принципа **«часть меньше целого»**, которое характерно для бесконечных множеств и даже может быть использовано для отличия их от конечных. Критерий бесконечности множества, предложенный Дедекиндом, формулируется следующим образом: **«множество является бесконечным, тогда и только тогда, когда оно равномогно некоторой своей части».**

Парадокс Бурали-Форти

демонстрирует, что предположение о существовании множества всех порядковых чисел ведёт к противоречиям и, следовательно, противоречивой является теория множеств, в которой построение такого множества возможно.

Можно доказать, что если x — произвольное множество порядковых чисел, то множество-сумма $\cup x$ есть порядковое число, большее или равное каждому из элементов x . Предположим теперь, что Ω - множество всех порядковых чисел. Тогда $\cup \Omega$ - порядковое число, большее или равное любому из чисел в Ω . Но тогда и $\cup \Omega \cup \{\cup \Omega\} = \cup \Omega + 1$ - порядковое число, причём уже строго большее, а значит, и не равное любому из чисел в Ω . Но это противоречит условию, по которому Ω - множество всех порядковых чисел.

Парадокс был обнаружен Чезаре Бурали-Форти в 1897 году и оказался одним из первых парадоксов, показавших, что наивная теория множеств противоречива, а следовательно, непригодна для нужд математики. Несуществование множества всех порядковых чисел противоречит концепции наивной теории множеств, разрешающей построение множеств с произвольным свойством элементов, то есть термов вида «множество всех x таких, что $P(x)$ ».

Современная аксиоматическая теория множеств накладывает строгие ограничения на вид условия P , с помощью которого можно образовывать множества. В аксиоматических системах типа Гёделя — Бернайса допускается образование терма $\{x | P\}$ для произвольных P с оговоркой, что он может оказаться не множеством, а классом. А не все классы являются множествами.

Система аксиом Цермело — Френкеля (ZF)

является стандартной системой аксиом для теории множеств. Названа в честь **Эрнста Цермело** и **Адольфа (Авраама) Френкеля**. Для ликвидации противоречий наивной теории множеств.

Современная теория множеств строится на системе аксиом — утверждений, принимаемых без доказательства, — из которых выводятся все теоремы и утверждения теории множеств.

К этой системе аксиом часто добавляют аксиому выбора, и называют системой Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (ZFC).

Эта система аксиом записана на языке логики первого порядка. Существуют и другие, конечные системы. Например, система NBG (von Neumann- Bernays- Gödel) наряду с множествами рассматривает так называемые классы объектов. NBG равносильна ZF в том смысле, что любая теорема о множествах (то есть не упоминающая о классах), доказуемая в одной системе, также доказуема и в другой.



Эрнст Фридрих
Фердинанд Цермело
1871-1953



Абрахам Галеви
(Адольф) Френкель
1891-1965

0. Аксиома экстенциональности (Аксиома объёмности)

$$\forall a_1 \forall a_2 (\forall b (b \in a_1 \leftrightarrow b \in a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$$

Если каждый элемент первого множества принадлежит второму множеству, а каждый элемент второго множества принадлежит первому множеству, тогда оба множества идентичны

1. Аксиомы ZFC о существовании множеств

«Аксиома объёмности» была бы бесполезным высказыванием, если бы не существовало ни одного множества или существовало только одно множество. Следующие два высказывания гарантируют существование по меньшей мере двух разных множеств, а именно: а) множества, в котором нет ничего, и б) множества, содержащего бесконечное количество элементов.

1.0 Аксиома пустого множества

$\exists a \forall b (b \notin a)$ Существует по меньшей мере одно множество без единого элемента

Аксиома пустого множества» равносильна высказыванию $\exists ! a \forall b (b \notin a)$. Поэтому единственному множеству a можно присвоить имя. Употребительны два имени: \emptyset $\{\}$. Используя указанные имена, «аксиому пустого множества» записывают так:

$$\forall b (b \notin \emptyset) \text{ и } \forall b (b \notin \{\})$$

1.1 Аксиома бесконечности

$\exists a (\emptyset \in a \wedge \forall b (b \in a \rightarrow b \cup \{b\} \in a))$, где $b \cup \{b\} = \{c : c \in b \vee c = b\}$

Существует [по меньшей мере одно] „бесконечное множество“, которое состоит из \emptyset , $\emptyset \cup \{\emptyset\}$, $\emptyset \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$

Высказывание о существовании бесконечного множества отличается от (ложного в данной аксиоматике) высказывания о существовании «множества всех множеств»

$$(\exists a \forall b (b \in a))$$

2. Аксиомы ZFC об образовании множеств

Постулаты об образовании множеств путём перечисления их элементов

Простейший способ образовать новое множество [из уже имеющихсЯ множеств] состоит том, чтобы «ткнуть пальцем» в каждое множество, которое должно стать элементом [образуемого множества]. В ZFC указанный способ образования множеств представлен одной аксиомой, в которой «тыканье пальцем» моделируется с помощью предиката =

2.0 Аксиома пары

$\forall a_1 \forall a_2 \exists c \forall b (b \in c \leftrightarrow b = a_1 \vee b = a_2)$, что есть $\forall a_1 \forall a_2 \exists c (c = \{b : b = a_1 \vee b = a_2\})$

Из любых двух множеств можно образовать „неупорядоченную пару“, то есть такое множество c , каждый элемент b которого идентичен данному множеству a_1 или данному множеству a_2 .

2.1. Декларации об учреждении и об упразднении семейств множеств

Следующие две аксиомы, именуемые «аксиомой множества подмножеств» и «аксиомой объединения», можно рассматривать как естественное дополнение к «аксиоме пары».

Известно, что каждое множество z имеет подмножества, включая \emptyset и самого множества z . $\forall z \exists x \exists y (x \subseteq z \wedge y \subseteq z) \wedge \forall z (\emptyset \subseteq z \wedge z \subseteq z)$

Руководствуясь «аксиомой пары», из названных подмножеств можно образовать неупорядоченную пару $\{\emptyset, z\}$. Назовём эту пару семейством $Fam_2(z)$. Если можно образовать семейство $Fam_2(z)$ из двух подмножеств множества z , тогда можно объявить об образовании семейства $Fam_a(z)$ из всех подмножеств множества z .

Чтобы объявить об образовании семейства $Fam_a(z)$ достаточно потребовать, чтобы каждый элемент b названного семейства был подмножеством множества z , а каждое подмножество b названного множества было элементом семейства $Fam_a(z)$, т.е. $\forall b (b \in Fam_a(z) \rightarrow b \subseteq z) \wedge \forall b (b \subseteq z \rightarrow b \in Fam_a(z))$, что равносильно предложению $\forall b (b \in Fam_a(z) \leftrightarrow b \subseteq z)$, которое подразумевает предложение $\exists d \forall b (b \in d \leftrightarrow b \subseteq z)$, которое является частным случаем высказывания $\forall a \exists d \forall b (b \in d \leftrightarrow b \subseteq a)$

Аксиомы упразднения

Если можно объявить об учреждении семейства $Fam_a(z)$, тогда можно объявить об упразднении названного семейства.

Допустимы различные способы упразднения семейства $Fam_a(z)$,

- 1) полное упразднение (уничтожение) $Del(Fam_a(z)) = \emptyset$,
что равносильно $\forall c (c \in Del(Fam_a(z)) \leftrightarrow c \in \emptyset)$
- 2) фиктивное упразднение (резервирование) $Fic(Fam_a(z)) = Fam_a(z)$,
что равносильно $\forall c (c \in Fic(Fam_a(z)) \leftrightarrow c \in Fam_a(z))$
- 3) реверсивное упразднение (расформирование) $Rev(Fam_a(z)) = z$,
что равносильно $\forall c (c \in Rev(Fam_a(z)) \leftrightarrow c \in z)$.

2.1.0 Аксиома множества подмножеств (Аксиома булеана)

$\forall a \exists d \forall b (b \in d \leftrightarrow b \subseteq a)$, что есть $\forall a \exists d (d = \{ b : b \subseteq a \})$, где $b \subseteq a \Leftrightarrow \forall c (c \in b \rightarrow c \in a)$

Из любого множества можно образовать такое множество d , каждый элемент c которого является [собственным либо несобственным] подмножеством b данного множества a , d - «суперкуча»

Эта аксиома равносильна высказыванию $\forall a \exists ! d \forall b (b \in d \leftrightarrow b \subseteq a)$. Поэтому единственному множеству d можно присвоить имя $P(a)$, которое произносится: «**множество всех подмножеств** [множества] a или «**булеан** [множества] a . Используя указанное имя, «аксиому множества подмножеств» записывают так: $\forall a \forall b (b \in P(a) \leftrightarrow b \subseteq a)$ или $\forall a (P(a) = \{ b : b \subseteq a \})$

2.1.1 Аксиома объединения

$$\forall a \exists d \forall c (c \in d \leftrightarrow \exists b (b \in a \wedge c \in b))$$

Из любого семейства множеств можно образовать такое множество d , каждый элемент c которого принадлежит по меньшей мере одному множеству b данного семейства a . Такое множество d иногда называют «кучей-малой»

Аксиома объединения равносильна высказыванию

$$\forall a \exists ! d \forall c (c \in d \leftrightarrow \exists b (b \in a \wedge c \in b)).$$

Поэтому единственному множеству d можно присвоить имя $\cup a$, которое произносится: **объединение множеств семейства a** .

Используя указанное имя, аксиому объединения записывают так:

$$\forall a \forall c (c \in \cup a \leftrightarrow \exists b (b \in a \wedge c \in b))$$

Объединение множеств семейства a $\cup a$ не следует путать с пересечением множеств семейства a $\cap a$, о котором известно:

$$\forall a \forall c (c \in \cap a \leftrightarrow \forall b (b \in a \rightarrow c \in b)),$$
$$\forall a (\cap a = \{c : \forall b (b \in a \rightarrow c \in b)\})$$

то есть

2.2. Схемы образования множеств с помощью математически корректных суждений

Среди математических высказываний встречаются аксиомы связи, включая:

а) аксиому связи между алгебраической операцией + (сложить) и алгебраической операцией · (умножить)

$$\forall x \forall y \forall z (x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R \rightarrow (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z),$$

б) аксиому связи между отношением порядка \leq (меньше или равно) и алгебраической операцией + (сложить)

$$\forall x \forall y \forall z (x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R \rightarrow (x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z))$$

«Схема выделения» и «схема преобразования» выражают следующую простую мысль: «Каждое математически корректное суждение об элементах любого множества приводит к образованию [того же самого или другого] множества.»

2.2.0 Схема выделения

$\forall a \exists c \forall b (b \in c \leftrightarrow b \in a \wedge \Phi[b])$, что есть $\forall a \exists c (c = \{b : b \in a \wedge \Phi[b]\})$ - любое математически корректное суждение о b , но не о множестве a и не о множестве c .
схема выделения равносильна высказыванию $\forall a \exists ! c \forall b (b \in c \leftrightarrow b \in a \wedge \Phi[b])$.

Поэтому единственному подмножеству c можно присвоить имя $\{x : x \in a \wedge \Phi[x]\}$

Используя указанное имя, схему выделения записывают так:

$$\forall a \forall b (b \in \{x : x \in a \wedge \Phi[x]\} \leftrightarrow b \in a \wedge \Phi[b])$$

Математически корректные суждения, фигурирующие в «схеме выделения», позволяют «довести [до товарного вида]» множества, которые образованы, например, с помощью аксиомы булеана.

2.2.1 Схема преобразования

В 1922 году немецкий математик Абрахам Френкель и норвежский математик Туральф Скулем дополнили теорию ZC схемой преобразования

$$\forall x \exists !y(\phi[x,y]) \rightarrow \forall a \exists d \forall c(c \in d \leftrightarrow \exists b(b \in a \wedge \phi[b,c])),$$

что есть $\forall x \exists !y(\phi[x,y]) \rightarrow \forall a \exists d (d = \{c: \exists b(b \in a \wedge \phi[b,c])\})$

Любое множество можно преобразовать в [то же самое или другое] множество d , высказав любое истинное математически корректное функциональное суждение ϕ обо всех элементах b данного множества a

В схеме преобразования множество d единственно. Поэтому указанному множеству можно присвоить имя $\{y: \exists x(x \in a \wedge \phi[x,y])\}$.

Используя указанное имя, схему преобразования записывают так:

$$\forall x \exists !y(\phi[x,y]) \rightarrow \forall a \forall c(c \in \{y: \exists x(x \in a \wedge \phi[x,y])\} \leftrightarrow \exists b(b \in a \wedge \phi[b,c]))$$

Схема преобразования равносильна счётному множеству аксиом.

Математически корректные суждения, фигурирующие в «схеме преобразования», позволяют создавать «[математические] изделия» из ["неотёсанных"] множеств, образованных, например, с помощью аксиомы булеана.

3. Аксиомы ZFC об упорядоченности множеств

Следующие два высказывания определяют упорядоченность множеств, которые образованы из \emptyset и каждой ∞ с помощью аксиом образования множеств.

3.0 Аксиома регулярности

В 1925 году венгерский математик Джон фон Нейман (тот самый) дополнил теорию ZFC аксиомой регулярности.

$$\forall a (a \neq \emptyset \rightarrow \exists b (b \in a \wedge \forall c (c \in b \rightarrow c \notin a)))$$

В любом семействе множеств есть [по меньшей мере одно] множество b , каждый элемент c с которого не принадлежит данному семейству a .

Одно из следствий этой аксиомы ($\forall a(a \notin a)$) «похоронило» и «множество всех множеств», и «парадокс Рассела».

3.1 Аксиома выбора

$$\forall a (a \neq \emptyset \wedge \forall b (b \in a \rightarrow b \neq \emptyset)) \wedge \forall b_1 \forall b_2 (b_1 \neq b_2 \wedge \{b_1, b_2\} \subseteq a \rightarrow b_1 \cap b_2 = \emptyset) \rightarrow \\ \rightarrow \exists d \forall b (b \in a \rightarrow \exists c (b \cap d = \{c\}))$$

Из любого семейства непустых попарно непересекающихся множеств можно выбрать „делегацию“, то есть такое множество d , в котором есть по одному элементу c от каждого множества b данного семейства a .

Пример. Предположим, что семейство образовано из множества неотрицательных чётных чисел и множества неотрицательных нечётных чисел. В таком случае, выполнены все условия «аксиомы выбора», а именно:

$$1. \{0, 2, 4, \dots\}, \{1, 3, 5, \dots\} \neq \emptyset \quad 2. \{0, 2, 4, \dots\} \neq \emptyset \wedge \{1, 3, 5, \dots\} \neq \emptyset \quad 3. \{0, 2, 4, \dots\} \cap \{1, 3, 5, \dots\} = \emptyset.$$

Следовательно, можно образовать по меньшей мере одну «делегацию» в составе одного «делегата» (например, 0) от множества $\{0, 2, 4, \dots\}$ и одного «делегата» (например, 1) от множества $\{1, 3, 5, \dots\}$.

$$\text{Действительно: } \{0, 2, 4, \dots\} \cap \{0, 1\} = \{0\}; \quad \{1, 3, 5, \dots\} \cap \{0, 1\} = \{1\}.$$

Парадокс Банаха- Тарского

парадокс удвоения шара, парадокс Хаусдорфа- Банаха- Тарского

Теорема в теории множеств, утверждающая, что трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.

Два подмножества евклидова пространства называются равносоставленными, если одно можно разбить на конечное число (не обязательно связных) попарно непересекающихся частей, передвинуть их (при этом частям не запрещается «проходить друг сквозь друга», то есть не требуется оставаться попарно непересекающимися во всех промежуточных положениях), и составить из них второе.

Два множества A и B являются равносоставленными, если их можно представить как конечное объединение непересекающихся подмножеств $A = \bigcup_i^n A_i$ $B = \bigcup_i^n B_i$ каждого i подмножество A_i конгруэнтно B_i .

Доказано, что для удвоения шара достаточно пяти частей, но четырёх недостаточно.



Верен также более сильный вариант парадокса: **Любые два ограниченных подмножества трёхмерного евклидова пространства с непустой внутренностью являются равносоставленными.**

Ввиду того, что вывод этой теоремы может показаться неправдоподобным, она иногда используется как довод **против принятия аксиомы выбора**, которая существенно используется при построении такого разбиения. Принятие подходящей альтернативной аксиомы позволяет доказать невозможность указанного разбиения, не оставляя места для этого парадокса.

Удвоение шара, хотя и кажется весьма подозрительным с точки зрения повседневной интуиции (в самом деле, нельзя же из одного апельсина сделать два при помощи одного только ножа), тем не менее не является парадоксом в логическом смысле этого слова, поскольку не приводит к логическому противоречию наподобие того, как к логическому противоречию как парадокс Рассела.

Разделяя шар на конечное число частей, мы интуитивно ожидаем, что, складывая эти части вместе, можно получить только сплошные фигуры, объём которых равен объёму исходного шара. Однако это справедливо только в случае, когда шар делится на части, имеющие объём. Суть парадокса заключается в том, что в **трёхмерном пространстве существуют неизмеримые множества, которые не имеют объёма**, если под объёмом мы понимаем то, что обладает свойством аддитивности, и предполагаем, что объёмы двух конгруэнтных множеств совпадают. Очевидно, что «куски» в таком разбиении не могут быть измеримыми (и невозможно осуществить такое разбиение какими-либо средствами на практике).

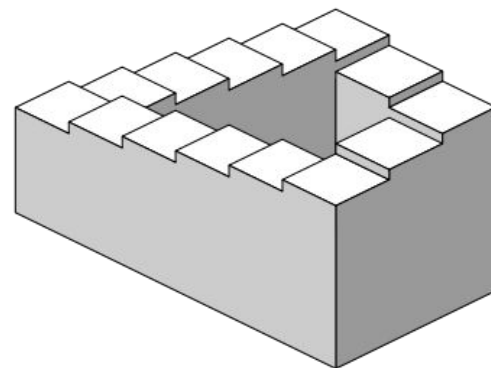
Для плоского круга аналогичное свойство неверно. Более того, Банах показал, что на плоскости понятие площади может быть продолжено на все ограниченные множества как конечно-аддитивная мера, инвариантная относительно движений; в частности, любое множество, равносоставленное кругу, имеет ту же площадь. Хаусдорф показал, что подобное сделать нельзя на двумерной сфере, и, следовательно, в трёхмерном пространстве, и парадокс Банаха — Тарского даёт этому наглядную иллюстрацию.

Тем не менее, некоторые парадоксальные разбиения возможны и на плоскости: **круг можно разбить на конечное число частей и составить из них квадрат равной площади** ([квадратура круга Тарского](#)).

Лестница бесконечностей

Лестница Пенроуза (бесконечная лестница, невозможная лестница) — это одна из основных невозможных фигур, открытая Оскаром Рутерсвардом. Модель её была разработана Лайонелом и Роджером Пенроузами, в 19558 году.

После публикации в 1960 году литографии «Восхождение и нисхождение» художника Маурица Эшера данная невозможная фигура стала одной из самых популярных. Впоследствии лестница Пенроуза часто встречалась в книгах, играх, головоломках, учебниках психологии.



В теории множеств **порядковым числом**, или **ординалом** (ordinalis) называется порядковый тип вполне упорядоченного множества. Как правило, порядковые числа отождествляются с наследственно транзитивными множествами. Ординалы представляют собой одно из расширений натуральных чисел, отличающееся как от целых, так и от кардинальных чисел. Как и другие разновидности чисел, их можно складывать, перемножать и возводить в степень. Бесконечные порядковые числа называют **трансфинитными** (лат. trans - за, через + finitio - край, предел). Ординалы играют ключевую роль в доказательстве многих теорем теории множеств — в частности, благодаря связанному с ними принципу трансфинитной индукции.

Порядковые числа были введены Георгом Кантором в 1883 году как способ описания бесконечных последовательностей, а также классификации множеств, обладающих определенной упорядоченной структурой. Он случайно открыл порядковые числа, работая над задачей, связанной с тригонометрическими рядами.

Множества S и S' обладают одинаковой мощностью, если между ними можно установить биективное соответствие (то есть указать такую функцию f , которая одновременно является инъективной и сюръективной: каждому x из S соответствует единственное $y = f(x)$ из S' , а каждое y из S' является образом единственного x).

Предположим, что на множествах S и S' заданы частичные порядки $<$ и $<'$ соответственно. Тогда частично упорядоченные множества $(S, <)$ и $(S', <')$ называются **изоморфными с сохранением порядка**, если существует биективное отображение f , при которой заданный порядок сохраняется. Иначе говоря, $f(a) <' f(b)$ тогда и только тогда, когда $a < b$. Любое вполне упорядоченное множество $(S, <)$ изоморфно с сохранением порядка по отношению к естественно упорядоченному множеству порядковых чисел, меньших некоторого определенного ординала (равного порядковому типу $(S, <)$).

Конечные порядковые (и кардинальные) числа представляют собой числа натурального ряда: $0, 1, 2, \dots$, поскольку два любых полных упорядочения конечного множества изоморфны с сохранением порядка. **Наименьшее бесконечно большое порядковое число ω отождествляется с кардинальным числом \aleph_0 .**

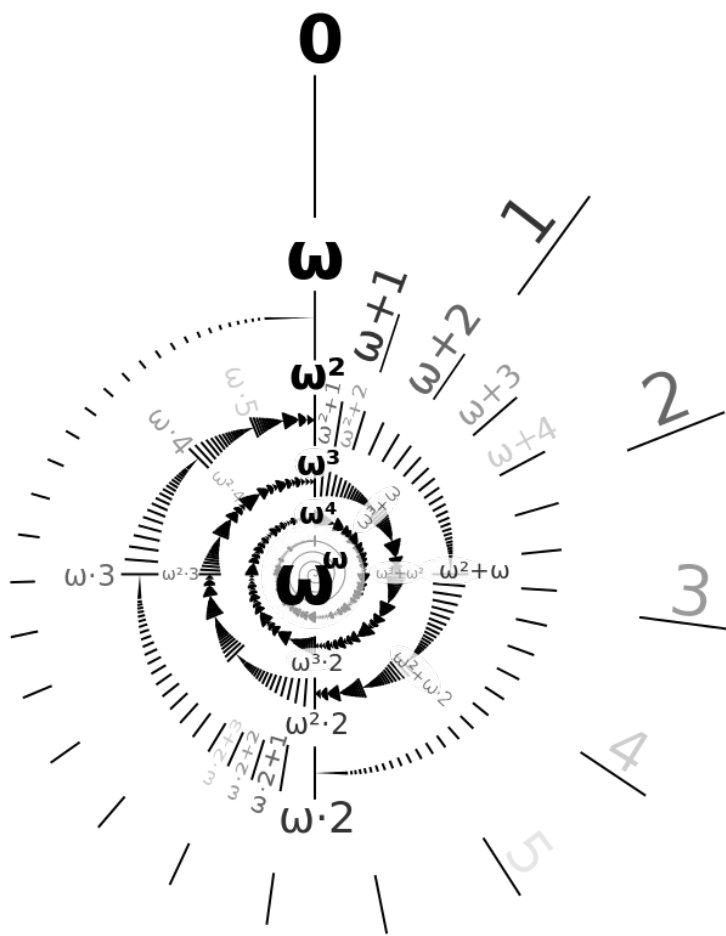
Однако в случае трансфинитных чисел, больших ω ординалы - по сравнению с кардинальными числами - позволяют выразить более тонкую классификацию множеств, основанную на информации об их упорядоченности. В то время как все счетные множества описываются одним кардинальным числом, равным \aleph_0 , число счетных ординалов бесконечно велико и притом несчетно:

$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \varepsilon_0, \dots$ 42

В данном случае сложение и умножение не обладают свойством коммутативности: так, $1 + \omega$ совпадает с ω , но отличается от $\omega + 1$ аналогично $2 \cdot \omega = \omega$, но не равно $\omega \cdot 2$

Множество всех счетных ординалов образует первое несчетное порядковое число ω_1 соответствующее кардинальному числу \aleph_1 число после \aleph_0 .

Вполне упорядоченные кардинальные числа отождествляются с их начальными ординалами, то есть минимальными ординалами соответствующей мощности.



Изображение порядковых чисел от 0 до ω^ω .
Каждый оборот спирали соответствует одной степени ω

Мощность порядкового числа задает между классами порядковых и кардинальных чисел соответствие по типу «многие к одному».

Иерархия бесконечности Кантора (путь вверх)

Кантору удалось доказать, что для любого заданного множества всегда найдется множество, большее исходного. Так, **множество всех подмножеств данного множества всегда больше исходного множества.**

Множество всех подмножеств множества натуральных чисел – множество более высокого порядка

$$2_{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Аналогично множество всех подмножеств множества \aleph_1 – множество более высокого порядка

$$2_{\aleph_1} = \aleph_2.$$

И так далее до бесконечности. Поскольку не существует множества всех подмножеств.

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}.$$

Говорят, что ω – это **наименьшее бесконечное число**, а все числа, меньшие ω , являются конечными числами.

Иерархия бесконечности Станишевского (путь вниз)

Олег Борисович Станишевский предположил, что натуральный ряд – не есть минимальное бесконечное множество, и **что среди чисел стандартного счетного множества можно найти и бесконечные числа.**

Доказательство.

Запишем все числа n счетного множества N в обычной двоичной системе счисления: "0"=...000, "1"=...001, "2"=...010, ..., "n"=... r_1 ... r_2 r_1 r_0 (r_i – номера двоичных разрядов).

Очевидно, для записи всех чисел требуется некоторое количество L двоичных разрядов. Заведомо известно, что оно меньше бесконечного количества ω самих чисел n счетного множества N . Это легко доказывается с использованием теоремы Кантора $2^\omega > \omega$.

Надо заметить то, что двоичные разряды r_i представляют собой множество L , а все его подмножества – это не что иное как все конечные числа N . Количество же подмножеств множества L равно 2^L , которое есть также бесконечное число ω , то есть $2^L = \omega$, откуда непосредственно следует, что L должно быть бесконечным.

По теореме же Кантора $\omega = 2^L > L$, то есть $L < \omega$, что по определению счетного множества значит, что L является конечным и принадлежит счетному множеству, то есть. Таким образом, получаем противоречие: из $2^L = \omega$ следует, что L является бесконечным, а из $L < \omega$ – что L является конечным.

Подобно тому, как начальная бесконечность ω есть предел, так и количество разрядов L можно определить как предел, который равен бесконечности, поскольку функция $L(n)$ является монотонно возрастающей. Обозначив этот предел некоторым бесконечным числом w и утя, что $w < \omega$, придем к выводу, что счетное множество содержит и бесконечное число $w < \omega$, что естественно находится в противоречии с определением счетного множества как множества, состоящего только из конечных чисел.

Иерархия бесконечности Станишевского (путь вниз)

Следовательно, счетное множество является либо конечным и тогда никаких связанных с ним противоречий не существует, либо оно является бесконечным множеством, содержащим как конечные числа, так и бесконечные, например, число w .

Станишевский делает парадоксальный вывод: **наименьшего бесконечного множества не существует и не существует его в том смысле, что для любого бесконечного множества ω существует субстрат-множество w (множество двоичных разрядов), мощность которого w является строго меньшей мощности ω исходного множества.**

Для любого множества существует как известное теоретико-множественное отношение "множество всех подмножеств 2^M ", так и обратное ему информационно-субстратное отношение " $\log_2 M$ ";

Другими словами, наряду с известным утверждением теории множеств о том, что **"не существует наибольшего бесконечного множества"**, имеет место и утверждение о том, что **"не существует и наименьшего бесконечного множества"**. Все эти проблемы детально изучены в книге О.Б. Станишевского. Бесконечность и первопринципы познания и устройства мира.

Из сказанного возможен и другой вывод. Счетное множество $N=0,1,2,\dots,n,\dots$ современной стандартной математики является конечным множеством, мощность которого равна предельному числу N , не являющимся бесконечным и которое можно называть наибольшим конечным числом по аналогии с тем, как называли его наименьшим бесконечным числом.

Проблемы аксиоматики

В 1940 г. Гедель в работе «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств» доказал, что если система аксиом Цермело-Френкеля без аксиомы выбора непротиворечива, то добавление аксиомы выбора не нарушает непротиворечивости, то есть аксиома выбора в рамках этой аксиоматики не может быть доказана.

Аналогично он установил, что предположение Кантора – гипотеза континуума о том, что не существует кардинальных чисел, заключенных между \aleph_0 и 2^{\aleph_0} , то есть не существует несчетного множества действительных чисел с кардинальным числом, меньшим 2^{\aleph_0} , и обобщенная гипотеза континуума не противоречит системе аксиом Цермело-Френкеля, даже если последнюю дополнить аксиомой выбора. Другими словами, гипотезу континуума, как в обычном, так и в обобщенном варианте нельзя опровергнуть.

В 1963 г. Пол Козэн доказал, что и аксиома выбора, и гипотеза континуума независимы от остальных аксиом Цермело-Френкеля, то есть не противоречивы. Более того, гипотеза континуума и тем более обобщенная гипотеза континуума не могут быть доказаны в системе Цермело-Френкеля, даже дополненные аксиомой выбора.

Сказанное означает, что существует не одна, а много математик.

Теория множеств может рассматриваться, как одна из них.

После коэновских доказательств независимости математика оказалась еще в более затруднительном положении, чем это было при создании неевклидовой геометрии.

Что делать?

Остановив свой выбор на одном из многих вариантов далеко непросто, так как в любом случае принятие определенной редакции аксиом имеет свои как положительные, так и отрицательные стороны. Отказ от любого использования аксиомы выбора и гипотезы континуума резко сужают круг утверждений, которые могут быть доказаны в рамках определенной формальной системы, и вынуждают отказаться от многих фундаментальных результатов современной математики.

С одной стороны, **принятие аксиомы выбора** позволяет доказывать теоремы, противоречащие интуиции. Одна из таких теорем известна под названием парадокса Банаха-Тарского.

Отказ от аксиомы выбора приводит к странным следствиям. Поскольку из нее следует существование неизмеримых множеств, аксиому выбора можно отрицать, предполагая, что каждое линейное множество измеримо.

Отказ от гипотезы континуума ведет к следствию, что каждое множество вещественных чисел является измеримым.

Одним из таких утверждений является гипотеза Суслина: Линейно упорядоченное множество без конечных элементов, плотное в себе, полное по Дедекинду, любое дизъюнктивное семейство непустых интервалов в котором счётно, порядково изоморфно множеству действительных чисел.

Одна из причин появления «побочных» интерпретаций состоит в том, что в каждой аксиоматической системе имеются неопределяемые понятия. Ранее считалось, что аксиомы неявно «определяют» эти понятия, действительно же одних аксиом недостаточно.

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ (ДТМ)

раздел теории множеств, изучающий внутреннее строение множеств в зависимости от тех операций, при помощи которых эти множества могут быть построены из множеств сравнительно простой природы (замкнутых или открытых подмножеств данного евклидова, метрических или топологических пространства).

К указанным операциям относятся объединение, пересечение, взятие дополнения, проектирование.

ДТМ зародилась в начале 20 в. в трудах Э. Бореля (E. Borel), Р. Бэра (R. Baire) и А. Лебега (H. Lebesgue) в связи с проблемой измеримости множеств. Множества, измеримые по Борсуго, получили название борелевских множеств, или В-множеств.

Р.Бэр дал классификацию функций, названных впоследствии бэровскими функциями, и доказал ряд теорем об этих функциях. А. Лебег доказал, что В-множества тождественны Лебега множествам бэровских функций, дал первую классификацию В-множеств и доказал непустоту каждого ее класса.

Изучение В-множеств стало важной задачей ДТМ. После введения Лебега меры оказалось, что класс измеримых множеств значительно шире класса В-множеств, и возник вопрос об отыскании средств установления измеримости того или иного множества. Решение этого вопроса в каждом конкретном случае связано, как правило, с выяснением процесса, при помощи которого это множество может быть построено, т. е. его дескриптивной структуры. Так определился еще один важный круг задач ДТМ - отыскание возможно более широкого класса (сохраняющих измеримость) операций над множествами и исследование свойств результатов этих операций. Решение этих вопросов, возникших в работах французских математиков, было дано преимущественно русскими математиками - Н.Н.Лузиным и его школой.

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ (ДТМ)

Один из наиболее важных вопросов - вопрос о мощности V -множеств - был решен П. С. Александровым в 1916, построившим для этого A -операцию. Им было показано, что посредством A -операции, отправляясь от интервалов, можно построить любое V -множество и что всякое несчетное множество, полученное путем A -операции (и называемое A -множеством), содержит совершенное множество и, значит, имеет мощность континуума. Этот результат был независимо получен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff)

М.Я.Суслин показал, что существует A -множество, не являющееся борелевским. Он же ввел и название A -множества, равно как и A -операции (в честь П. С. Александрова). A -множества наз. также суслинскими множествами или, реже, аналитическими множествами.

Для того чтобы A -множество было V -множеством, необходимо и достаточно, чтобы: 1) дополнение к нему снова было A -множеством (Суслина критерий); 2) оно являлось результатом A -операции с непересекающимися слагаемыми (Лузина критерий). Все L -множества измеримы и обладают Бэра свойством.

Были найдены следующие новые способы получения L -множеств. эквивалентные A -операции: A -множества суть проекции V -множеств; A -множества суть непрерывные образы пространства I иррациональных чисел; и, значит, A -множества суть непрерывные образы V -множеств. В Наконец то же время, непрерывный взаимно однозначный (и даже счетнократный) образ V -множества есть V -множество и всякое несчетное V -множество есть объединение не более чем счетного множества и непрерывного взаимно однозначного образа пространства.

Идеи и методы ДТМ оказали влияние на развитие целого ряда областей математики: анализа, теории функций, топологии, математической логики

Наличие таких утверждений приводит к так называемому **второму кризису теории множеств**: **становится непонятно, что есть истина**.

Всё это противоречит изначальной установке Гильберта: *актуальные множества суть чёткие и однозначные объекты этой реальности*. С этого момента возникают объективные предпосылки для переосмысления основных положений канторовской теории и развития альтернативных точек зрения.

Одна из таких точек зрения реализована чешским математиком **Петром Вепенкой** и получила название **альтернативной теории множеств (AST)**.

В канторовской теории множеств носителями актуальной бесконечности являются бесконечные множества. При этом элементы множества всегда чётко заданы. В канторовской теории **никаких других объектов, кроме множеств, не существует**. Таким образом, любой бесконечный объект, который нам встретится, заранее объявляется множеством.

Генцен: *«Бесконечную совокупность нельзя рассматривать как нечто законченное, данное само по себе (актуальная бесконечность), а можно рассматривать лишь как нечто становящееся, нечто такое, что можно всё дальше и дальше надстраивать над конечным (потенциальная бесконечность)»*

Противоположная точка зрения у Лейбница *«Я в такой мере стою за актуальную бесконечность, что не только не допускаю, что природа боится её, как обыкновенно выражаются, но и признаю, что природа всюду являет именно такую бесконечность, чтобы лучше отметить совершенство своего Творца»*,

И как сказал Адамар *«Только логическое противоречие может остановить нашу способность создавать идеальные понятия»*

Предпосылки к альтернативной теории множеств

Для выхода из первого кризиса канторовской теории множеств мы должны были ввести однозначное заключение, что **собрание всех множеств неактуализуемо**.

Данное собрание не естественно сузили. Мы по существу предполагаем, что все множества уже созданы, и, одновременно, запрещаем представлять совокупность всех этих множеств, как множество. Этот запрет носит совершенно произвольный характер и не является формальным запретом. Нам не позволено сделать нечто такое, что мы в состоянии сделать. Никто не может нам помешать рассматривать совокупность овеществленных объектов, как один объект (в данном контексте множества). Однако, как только мы это сделаем – представим совокупность всех множеств, как множество, то используя рассуждения из парадокса Рассела, мы придем к противоречию. Однако это противоречие не означает, что нельзя делать то, что мы не можем делать, это лишь означает, что предположение, из которого мы вывели противоречие, оказалось шатким.

Актуализуемость собрания всех множеств, если ведет к противоречию, то противоречит разуму. Следовательно, актуализировать это собрание не под силу даже богу. Законом противоречия, как описано у Фомы Аквинского, ограничено и божье могущество: **бог не может сделать так, чтобы не было того, что уже было**.

С другой стороны, ничем, кроме закона противоречия, божья сила не ограничена. Это значит, что какое угодно собрание объектов, актуализация которого не ведет к противоречию, бог может актуализировать. А коль бог смог актуализировать какое-то собрание, то создать множество этих объектов мы способны и сами.



**Петр Вopenко
1935-2015**

Новое понимание теории множеств.

Любое множество, существование которого не ведет к противоречию, можно осуществить, но все множества сразу мы осуществить не можем, так как существование множества всех множеств ведет к противоречию. Всегда мы создаем лишь некоторую совокупность множеств, к которой дополнительно мы можем создать множество, элементами которого являются все множества этой совокупности. Такое дополнительно созданное множество будем называть **универсальным**.

Универсальное множество – есть множество всех ранее созданных множеств, причем оно своим элементом быть не обязано, и, как правило, им не является. На следующем шаге можно осуществить более обширное универсальное множество, элементами которого будет и предыдущее универсальное множество, однако, оно уже универсальным множеством не является.

Универсальное множество может быть весьма богатым, его элементами могут быть не только все натуральные числа, но и множество всех натуральных чисел и ряд других множеств. Его элементы могут так же удовлетворять системе аксиом Цермело-Френкеля или Геделя-Бернайса, а так же дополнительных аксиом, касающихся недостижимости кардиналов, при условии, что они не ведут к противоречию.

Альтернативная теория множеств не ограничивается множествами из какого-то универсального множества. В данном случае универсальное множество становится лишь исходным объектом для построения новых более обширных универсальных множеств, а отнюдь не целью, с достижением которой построение универсальных множеств заканчивается.

Кризис канторовской теории множеств

состоит не в том, что возможности теории ограничены, а, напротив, в том, что их слишком много.

Канторовская теория множеств развила больцановское представление бесконечного, не затрудняя себя вопросами актуализации бесконечных собраний объектов. Подразумевалось, что если можно осуществить все натуральные числа, то можно осуществить и все вещественные числа, а также множеств всех точек на прямой и множество всех подмножеств произвольного множества.

При этом подразумевалось, что все множества можно осуществить сразу.

Преимуществом такого подхода заключается в избавлении от обязанности исследовать актуализуемость собрания объектов.

Основные понятия альтернативной теории множеств

В отличие от канторовской теории множеств, которая исходит из предпосылки, что все множества универсума множеств уже построены, а их совокупность четко выделены и, следовательно, собрание объектов рассматривается как множество, в **AST** рассматривают множество, которые **осуществлены и образуют класс**.

Подобная эвристика определяет актуализацию потенциального собрания. Здесь мы имеем дело с индуктивным определением класса. Описание постепенного порождения объектов не следует путать с определяющим свойством объектов, которое требует конечного числа порождающих шагов.

Выделим тот класс сущностей, которые мы считаем объективно существующими и назовём их объектами.

При этом несмотря на то, что совокупность элементов класса может быть выделена нечётко, принадлежность элементов классу понимается классически. Это значит, что если X - класс, а Y - объект, то $Y \in X$ или $Y \notin X$, оба случая одновременно не могут иметь места. Но это не означает, что всегда можно решить, который из двух случаев осуществляется.

В **AST** множества — это объекты особого рода. Пусть дана какая-либо чётко выделенная совокупность объектов. **Если мы признаем за этой совокупностью индивидуальность, представляем её как целостную и самостоятельную единичность, т. е. объект, то мы порождаем множество; его элементами будут объекты, находящиеся в этой совокупности.**

Это значит, что для каждого объекта ответ на вопрос, является ли он элементом множества (то есть, лежит ли он в данной совокупности) должен быть интуитивно ясен.

Базовые понятия AST. Множество, класс, собрание.

В отличие от множеств существуют объекты специального вида, которые принято называть классами - **совокупность объектов, при которой не требуется, чтобы данная совокупность была четко выделена.** В тоже время для элемента любого класса существует понятие принадлежности, причем никакой объект не может одновременно принадлежать и не принадлежать определенному классу.

По аналогии с подмножествами существуют понятие подкласс. Говорят, что класс X есть подкласс класса Y , если каждый элемент класса X является элементом класса Y . Для записи отношения включения будем использовать обозначение $X \subseteq Y : \Leftrightarrow \text{Cls}(X) \& \text{Cls}(Y) \& (\forall Z)(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$

ногие естественно возникающие совокупности не являются множествами. Например, совокупность всех ныне живущих людей не выделена чётко. Ведь если бы мы должны были решить, принадлежит ли к ней тот или иной человек, то у нас могли бы иной раз возникнуть немалые сомнения.

Аналогично, не являются чётко выделенными совокупности всех существующих в данный момент столов, белых платьев, вкусных (или просто съедобных) блюд и прочие. Короче говоря, почти всегда, когда мы выделяем совокупность каким-либо естественным свойством (т. е. помещаем в эту совокупность все объекты с этим свойством), то данная совокупность выделяется нечётко. Для того, чтобы можно было работать и с совокупностями такого вида, вводится понятие класса. Если в определении множества не требовать чёткости, то полученный объект будет классом.

Полумножеством называется некоторое множество X , если существует такое множество Y для которого справедливо $X \subseteq Y$. Несложно заметить, что каждое множество есть полумножество, так как оно является подклассом самого себя.

Одним из известных примеров является класс натуральных чисел, задаваемый следующим свойством: **«если удалить какое-то число песчинок из кучи песка, то останется куча песка».**

Более неожиданный пример приведен Петром Вапенкой: *«Чарльз Дарвин учит нас, что существует конечная и не очень длинная последовательность живых существ, первый член которой есть обезьяна Чарли, каждый ее последующий член является сыном предыдущего члена, а последний член последовательности – сам профессор Дарвин. Совокупность всех членов последовательности, очевидно, образует множество. В нем есть подкласс членов данной последовательности являющихся обезьянами. Это есть собственный класс, то есть собственное полумножество. Данный класс не пуст, так как обезьяна Чарли ему принадлежит. Но если бы это было множество, то есть, если бы подкласс был из данной последовательности четко выделен, то можно было указать его последний элемент. Господин Дарвин им быть не может, так как он не обезьяна. Значит, это должен быть кто-то из его предков. Но это должна быть такая обезьяна, сын которой уже не обезьяна. Однако всем известно, что дети обезьян являются обезьянами.»*

Вапенка отмечал, что этим примером не хотел опровергнуть учения Дарвина, не доказать его.

На практике примеры собственных полумножеств встречаются постоянно: например, класс интересных книг какой-то обширной библиотеки, класс великих людей.

Собрание

Поскольку требуется, чтобы класс существовал как объект, в момент его рассмотрения все элементы класса должны быть уже осуществлены. В частности, бесконечные (в классическом понимании) классы в альтернативной теории множеств оказываются носителями актуальной бесконечности.

Бесконечность потенциальная предстаёт перед нами в виде собраний объектов. **Собрание мы представляем себе как некое «вместилище», наподобие ямы, куда «падают» объекты по мере их осуществления. Чаще всего собрание объектов задаётся некоторым свойством.** В такое собрание попадают в точности те объекты, которые обладают этим свойством. Это понятие наиболее близко к классическому множеству.

Если $\phi(X)$ некоторое свойство, то собрание объектов, имеющее данное свойство будет обозначено $\{X, \phi(X)\}$. Для собрания объектов справедливо правило пересечения, объединения и разности

$$A \cap B = \{X; X \in A \ \& \ X \in B\}$$

$$A \cup B = \{X; X \in A \ \vee \ X \in B\}$$

$$A - B = \{X; X \in A \ \& \ X \notin B\}$$

Не каждое собрание объектов можно считать объектом. В противном случае возникает парадокс типа парадокса Рассела.

Допустим, что каждое собрание объектов представлено как объект.

Пусть M есть собрание объектов, являющихся собраниями, не попадающими сами в себя. Тогда M — тоже объект. Этот объект не принадлежит собранию M , поскольку туда попадают те собрания объектов, которые не попадают сами в себя. Но коль скоро собрание M не попадает в M , оно должно попасть в M , поскольку там находятся как раз те собрания объектов, которые не попадают сами в себя.

Горизонт

Ключевым понятием альтернативной теории множеств является понятие горизонта. Каждый наш взгляд, куда бы он ни был направлен, всегда чем-то ограничен. Либо на его пути оказывается твёрдая граница, чётко его пресекающая, либо он ограничен горизонтом, в направлении к которому утрачивается ясность нашего видения.

Например, наш взгляд на окружающее пространство, сосредоточенный на его размерности, чётко ограничен тремя измерениями. Горизонтом ограничено наше видение вдаль, а также вглубь, т.е. при взгляде на всё более мелкие предметы. Однако взгляд не есть только видение глазами, но понимание реальности в самом широком и многостороннем смысле. С этой оговоркой нужный смысл можно выразить так: взгляд — это высматривание того, что возможно усмотреть, и рассматривание того, что мы усмотрели.

Твёрдые границы, чётко преграждающие взгляд, нам представляются как что-то непреложное, как необходимые рамки, в которые заключен сам мир. Напротив, в направлении к горизонту мир для нас остается открытым.

Часть мира, лежащая перед горизонтом, выделена нечётко. Чем ближе к горизонту находится нечто, тем хуже мы его видим. Именно в направлении к горизонту мы встречаемся с феноменом нечёткости. Чем ближе к горизонту, тем более ощутимо этот феномен проявляется. Но все нечёткое указывает за себя, продолжается дальше или плавно переходит во что-то иное.

Поэтому мир, лежащий перед горизонтом, должен продолжаться за горизонт, что, собственно, и означает, что мир открыт в направлении к горизонту. Иначе говоря, **мы воспринимаем мир таким образом, что он продолжается и за горизонтом, но там остается ещё не познанным.**

Горизонт не занимает определенного положения в мире, он может перемещаться.

Существующий горизонт можно нередко отдалить или «преодолеть», и это укрепляет нашу уверенность, что мир продолжается за горизонтом. Но, строго говоря, за горизонт попасть мы не можем.

Преодоление существующего горизонта означает всего лишь, что перед горизонтом оказалось нечто, бывшее прежде за горизонтом; вернее, мы представляем его себе так, что оно прежде было за горизонтом, пока мы горизонт не подвинули.

Сам по себе горизонт, пожалуй, является самой непреложной границей, в которой мы заключены и которую не можем пересечь. Но поскольку мы понимаем мир так, что он продолжается и за горизонтом, то **горизонт является для нас не границей мира, а лишь границей нашего взгляда на мир.**

Итак, горизонт тоже является по-своему чёткой и прочной границей, но в отличие от границ, которые чётко прерывают наш взгляд на мир и которые мы воспринимаем как границы самого мира (например, упомянутая выше трёхмерность пространства), **горизонт ограничивает лишь наше видение мира, но мы не представляем его так, что он ограничивает мир.**

Выполнимость полной индукции для всех натуральных чисел **никак не доказана**, и доказать её мы не можем.

В случае ее выполнимости мы могли бы доказать, что все натуральные числа конечны, но это означало бы, что горизонт ограничивающий ясные сведения является четко определенной границей за которую натуральные числа не распространяются. Такая позиция не согласуется с приведенным выше понятием горизонта.

Чтобы показать всю проблематичность классических представлений о натуральных числах, мы должны предъявить какое-либо иное возможное представление натуральных чисел, лежащих за горизонтом, а именно, такое, которое не согласовано с полной индукцией. Дадим волю фантазии и вообразим, что после долгого прибавления единицы мы попадём где-то далеко за горизонтом в «чёрную дыру». Это значит, что мы обнаружим, что число, до которого мы дошли, не увеличивается от прибавления единицы. Когда точно это произошло, нам, конечно, неизвестно, подобно тому, как нельзя точно определить, в какой момент посаженное семечко превращается в развесистое дерево. В этой «чёрной дыре» мы можем остаться навсегда или же, при дальнейшем неустанном прибавлении единицы, выйдем из неё и попадем в другую «чёрную дыру». Нам могут возразить, что никакой «чёрной дыры» в последовательности натуральных чисел быть не может, так как если бы для какого-то числа n имело место $n=n+1$, то было бы также $0=1$. Это, однако, нельзя доказать простым вычитанием числа n из обеих частей равенства, поскольку такое правило основывается как раз на том, что в собрании натуральных чисел «чёрной дыры» нет. Тогда мы могли бы последовательно вычитать по единице из обеих частей. О том, что мы в конце концов придем к результату $0=1$, мы заключаем лишь на основании принципа полной индукции, который при наличии «чёрной дыры» за горизонтом не выполняется.

Невыполнимость полной индукции

И если бы даже путем такого долгого вычитания мы и пришли к равенству $0=1$, это вовсе не значило бы, что мы действительно доказали, что $0 = 1$, и тем самым пришли к противоречию. **Это означало бы лишь, что такие длинные доказательства неприемлемы.** Доказательство тоже ведь имеет свою длину, и если эта длина достигает «чёрной дыры», то рассуждение утрачивает свою доказательную силу.

Вопенка отмечает, что обычное классическое представление о натуральных числах основано на том, что ***есть кто-то видящий все натуральные числа, как мы видим конечные натуральные числа***, в тоже время для такого наблюдателя все натуральные числа конечны. Получается ***«что мы хотим видеть натуральные числа, как видит их бог, а от бога требуем, чтобы он видел их так, как их видим мы»***.

Классическая аргументация в пользу выполнимости полной индукции для всех натуральных чисел на первый взгляд кажется гораздо убедительнее: все натуральные числа конечны, а то, что они не конечны для нас – наша частная проблема. Существенно лишь то, что они конечны для упомянутого всевидящего наблюдателя, который становится для нас мерилom объективности. **Можно сказать, что богу не доступно наше несовершенство.**

Моделью «чёрной дыры» может послужить машинная арифметика с конечной разрядной сеткой. Как только порядок числа n превысит количество разрядов сетки, прибавление 1 не изменит содержимое числа n . Поскольку наблюдаемый нами мир обладает квантовыми свойствами можно утверждать, что и число разрядов в форме представления числа должно быть конечным.

Еще один парадокс бесконечности

Известен один из парадоксов бесконечности, когда в гостиницу, имеющую бесконечно много комнат занумерованными всеми натуральными числами, и в которой все комнаты заняты требуется поселить еще одного гостя, в этом случае задача может быть решена посредством исполнения следующего алгоритма: новый гость поселяется в комнату с номером 1, а каждый гость из комнаты с номером n поселяется в комнату с номером $n+1$, поскольку число номеров бесконечно данная операция может быть исполнена.

Вопенка отмечает: «Странно не то, что некоторые математики считают данное преобразование некорректным, а то, что они не замечают возможности выполнения вышеприведенного алгоритма для гостиницы имеющих конечное число комнат, которые все заняты. Из рассмотрения выпадает тот факт, что переселение гостей происходит последовательно и может продолжаться несколько дней при этом каждый гость может быть устроен в течение дня».

В определенном смысле множество из конечного, но достаточно большого числа элементов содержит собственный подкласс, составленный из объектов (комнат), который ведет себя аналогично четному множеству канторовской теории множеств.

Разумеется, в этом случае переселение нельзя осуществлять мгновенно⁶³

Аксиомы альтернативной теории множеств.

Альтернативная теория множеств не является формальной системой, описанной набором аксиом, и причиной этого во многом является отсутствие строгого определения, что значит чёткость. Но тем не менее, некоторые шаги по формализации теории предпринимаются.

В AST под **универсумом множеств** понимается собрание объектов в котором содержится пустое множество, а так же справедливо высказывание, что если в универсуме содержится множество X и Y то в нем содержится $X \cup \{Y\}$, кроме того каждый объект универсума множества есть множество. Таким образом в универсум попадают все натуральные числа в модели фон-Неймана.

Будем обозначать класс таких чисел через FN. Собрание конечных натуральных чисел представляет собой прямой путь, по которому можно шаг за шагом идти к горизонту (и ни шагу дальше).

В AST объект X **транзитивен**, если X есть класс и каждый элемент класса X есть его подкласс $\text{Trans}(X)$: $\Leftrightarrow \text{Cls}(X) \ \& \ (\forall Y \in X)(Y \subseteq X)$.

Если мы построили множество X из универсума наследственно конечных множеств и T -множество элементами которого являются все множества построенные раньше множества X , а также само X , а R есть линейное упорядочение на множестве T , в котором зафиксирован порядок последовательного порождения элементов множества T , то любое множество из T можно построить, когда построены все его элементы. В этом случае множество T транзитивно. Из $Y \in Z \in T$ следует YRZ и $Y \neq Z$. Так как множество X можно построить за конечное число шагов, то каждое непустое подмножество T содержит элемент, который мы построили первым и элемент, который мы построили последним, поэтому для множества X справедлива $\text{H Fin}(X)$. Обобщая вышеизложенное можно заметить, что если A собрание объектов, а X – наследственно конечное множество, которое не принадлежит собранию A , то существует множество X_0 , такое что $\text{H Fin}(X_0)$ причем X_0 , такое что не принадлежит A , а каждый элемент X_0 , принадлежит A .

Различия между классической теорией множеств и альтернативной теорией множеств.

Гипотезу континуума для ZF-универсального множества M можно выразить следующим образом: для каждого бесконечного множества $X \in M$ и каждого множества $Z \in M$ такого, что $X \subseteq Z \subseteq X \cup PM(X)$, где $Y = PM(X)$ существует взаимно однозначное отображение $F \in M$ такое, что $\text{dom}(F) = Z$ и имеет место либо $\text{rng}(F) = X$, либо $\text{rng}(F) = PM(X)$.

На произвольной безатомной булевой алгебре, которая является элементом множества M и которая внутри ZF-универсального множества полна, можно построить генерический ультрафильтр, который не будет элементом множества M .

Отсюда следует, что если внутри ZF-универсального множества M выполняется континуум-гипотеза, то легко построить более обширное универсальное множество M_1 внутри которого гипотеза континуума не выполняется. Для множества M_1 из аналогичных соображений можно построить еще более обширное ZF-универсальное множество M_2 , в котором континуум-гипотеза опять выполняется и т. д. Аналогично можно строить другие утверждения подобного рода.

В канторовской теории множеств невозможно решить вопрос об истинности некоторых утверждений: эти утверждения в некоторых ZF-универсальных множествах выполняются, а в других не выполняются.

Т.о. AST не связана с системой аксиом Цермело-Френкеля и, следовательно, **альтернативная теория множеств не обязана идти по пути, по которому повел математику Кантор**. Главным преимуществом нового понимания теории множеств является генеральный коллапс. Это свойство можно использовать при решении так называемых экзистенциальных задач, то есть задач, в которых требуется доказать существование объекта (множества) с предписанными свойствами.

С точки зрения альтернативной теории множеств, все, что реализовано в мире является маленькими островками в море того, что могло бы быть.

Когда мы смотрим на какое-то актуально бесконечное множество A , то на самом деле мы видим бесконечно перечислимый класс в смысле альтернативной теории множеств. При этом мы предполагаем, что множество A превосходит указанный класс, но определенно мы это не знаем. Мы можем высказывать об этом лишь разные домыслы. Согласно одному из домыслов, множество A плавно продолжается за горизонтом вплоть до некоторого абсолютного горизонта.

Абсолютизация естественной бесконечной перечислимости позволяет нам представлять естественно бесконечные классы как множество.

Класс FN является множеством всех классических натуральных чисел, а класс FV – множеством всех наследственно конечных множеств. Эти классы представляют собой абсолютный горизонт, то есть горизонт непреодолимый и неотдаляемый.

За этим горизонтом мир уже не продолжается. На нем натуральные числа кончаются, а построение множеств тоже не может за ним плавно продолжаться. В тоже время из множеств (подклассов FV) мы можем начать создавать новые множества, то есть перечислимые классы этих классов. Если при таких построениях мы достигнем горизонта, то мы не останавливаемся на нем и будем создавать множества, элементами которых являются уже ранее созданные множества.

Универсум классических множеств охватывается в расширенном универсуме одним весьма специальным классом, таким образом, классическая теория множеств становится частью альтернативной теории множества. Классическая актуальная супербесконечность является неперечислимой бесконечностью в альтернативной теории множеств. Данные утверждения не должны казаться странными, поскольку в альтернативной теории множеств актуализируется много больше, чем в классической теории множеств. В альтернативной теории множеств мы умеем **актуализировать и за горизонтом**, тогда как **классическая теория множеств горизонт не преодолевает, а лишь его достигает**. С топологической точки зрения вопрос отдаленности горизонта является второстепенным.

При этом **канторовская теория множеств** «легкомысленно» **предполагает, что за горизонтом объекты расположены точно также, как они расположены перед горизонтом**. Бесконечно ординальные числа представляются как единственно возможное продолжение конечных натуральных чисел. В канторовской теории множеств мы занимаемся неким подсобранием объектов, в которое попадают все подклассы класса FV , все ординальные числа и которое замкнуто относительно некоторых простых операций над классами. От этого собрания мы требуем, чтобы собрание всех ординальных чисел, которые нельзя взаимно однозначно отобразить на какое-то меньшее ординальное число посредством отображения, попадающее в собрание было неактуализуемо. Это подсобрание собрания всех ординальных чисел будет тогда собранием всех кардинальных чисел в собрании. Дальнейшие условия должны выполняться в собрании арифметики кардинальных чисел. Это означает, что мы требуем для каждого класса X , попадающего в собрание, собрание всех подклассов класса X , попадающих в собрание было актуализуемо, и чтобы класс всех таких подклассов класса X сам попадал в собрание. **Канторовская теория множеств верит не только в существование такого собрания, но даже в однозначную определенность такого собрания.**

Различия между классической теорией множеств и альтернативной теорией множеств

В тоже время существование некоторого собрания удовлетворяющего некоторым условиям не является достоверным. Однако, если существует одно такое собрание, то существует и целый ряд, при том среди них нет максимального.

В альтернативной теории множеств универсум множеств, то есть класс V есть прочный и неизменный стержень расширенного универсума, по которому горизонт скользит, но который сам остается на месте. При отдалении горизонта класс V не меняется и никакой его элемент не исчезает.

Вследствие этого

- a) $V = V^* \in U^*$;
- b) $V = V^* \subseteq U^*$;
- c) $U^* \subseteq U$;
- d) $(\exists \Gamma^* \in V^*)\phi^*(\Gamma^*, \dots) \Leftrightarrow (\exists \Gamma \in V)\phi^*(\Gamma, \dots)$;
- e) $(\forall \Gamma^* \in V^*)\phi^*(\Gamma^*, \dots) \Leftrightarrow (\forall \Gamma \in V)\phi^*(\Gamma, \dots)$.

Хотя при вполне репродуцирующем отдалении горизонта класс V остается на месте, это еще не значит, что при обоих взглядах на элементы класса V наше динамическое понимание тождественности феноменов сливается с пониманием статическим. Как раз наоборот, если мы смотрим первым взглядом на некоторое натуральное число $a \in F^*N - FN$, то это число является как бесконечное. При втором взгляде число a не исчезает, но теперь оно конечно, и поэтому мы не признаем его за ранее наблюдающееся число a , а признаем теперь число $a^* \in F^*N$. Иными словами, оператор полной репродукции на классе V не является тождественным.

Мир за горизонтом

Пока что всё сказанное относится к тому что, самое большее, уходит к горизонту или хотя бы допускает такое представление, что оно позволяет себя так разместить перед горизонтом. **Однако, главная цель лежит за горизонтом. Там тоже есть мир, и нас интересует, какой он там.** О том, что есть за горизонтом, ничего точно не известно, о том можно лишь фантазировать; **за горизонтом может быть всё, что угодно.**

Правда, мир за горизонтом не отделен резко от мира перед горизонтом. **Мир перед горизонтом плавно переходит в мир за горизонтом.** Значит, за горизонтом не может быть совсем уж что угодно, а только то, что «стыкуется» с миром перед горизонтом, дополняет его, скорее подтверждает, а не опровергает его. **За горизонтом может быть лишь то, что там возможно; но из того, что возможно, там может быть что угодно.**

За горизонтом может встретиться и нечто непредвиденное, но оно не может лежать на самом горизонте. **Горизонт не есть черта, проведенная в самом мире. Это не феномен мира, а лишь как феномен, сопровождающий наш взгляд на мир.** Если бы какое-то явление, принадлежащее миру, находилось прямо на горизонте или касалось его с невидимой стороны, то это явление и было бы вполне определённой границей, пресекающей наше видение и фиксирующей положение горизонта. **За горизонтом мир продолжается плавно, и притом столь далеко, пока на пути не встанет какая-то преграда, принадлежащая самому миру.**

О проблеме горизонта

Вопенка отмечает: *Так как горизонт не занимает определенного положения в мире, мы можем его отдалить, увеличивая нашу зоркость. Если при таком усилении зоркости, (удалении горизонта), мы натолкнёмся на неожиданное явление, то оно либо не позволит нам проникнуть дальше, либо само окажется перед горизонтом.*

Но если мы горизонт отдалим лишь немного, т. е. не настолько далеко, чтобы встретиться с таким явлением, то мир, лежащий перед горизонтом, хотя и расширится, но не изменится. Таким образом, с **увеличением зоркости при взгляде на множества из универсума множеств мы приходим к какому-то более обширному собранию наследственно-конечных множеств.**

При этом усиление зоркости само по себе является нечётким феноменом, поэтому возможно, что наша зоркость может быть каким-то образом усилена ещё раз, или даже несколько.

Пусть V — достаточно обширный класс наследственно-конечных множеств, который мог бы получиться в результате такого усиления, и для него всё ещё выполнены перечисленные выше аксиомы.

Собрание всех его подклассов мы назовём расширенным универсумом.

По сути от V хочется лишь, чтобы это был достаточно большой класс, который можно описать посредством разрабатываемой аксиоматической теории.

Феномен неразличимости.

Вторым после горизонта феноменом, которому не нашлось места в европейской науке, явилась неразличимость. Для миропонимания, свойственного классической науке, это было правомерно. Различимость и неразличимость суть нечёткие явления. Неразличимость воспринимается как проявление несовершенства, т.к. нередко то, что теперь неразлично, после усовершенствования наших способностей (при достаточном отдалении горизонта) становится различимым. **Задача науки не в том, чтобы исследовать неразличимость, а в том, чтобы её преодолеть.**

С другой стороны, хотя нам иногда удастся преодолеть тот или иной вид неразличимости, так же как нам иногда удастся отдалить в том или ином направлении горизонт, но преодолеть неразличимость как таковую мы вряд ли в состоянии. Более того, если мир - всего лишь структура на множестве элементарных частиц, то если бы мы полностью преодолели неразличимость (если бы ясно различали каждые два объекта), мир явился бы нам лишь как множество обособленных объектов, вследствие чего исчез бы феномен непрерывности в том виде, как мы его знаем. Точнее говоря, если мы исключим неразличимость из предмета нашего изучения, а вопреки этому будем настаивать на теоретико-множественном представлении непрерывности, то нам останется лишь представлять её так, как это делает классическая математика — посредством абсолютной бесконечности. Мы просто примем к сведению, что феномен неразличимости есть и устранить его мы не можем. Вместе с тем вышеупомянутая возможность преодоления неразличимости подсказывает, что как раз посредством неразличимости мы могли бы представить непрерывность и что вообще именно на этом феномене основана, пожалуй, сама познаваемость мира и его непрерывность в пространстве и во времени.

Каждая неразличимость есть отрицание различимости, то есть отрицание непосредственно распознаваемого феномена. Если X – полумножество, а R – реляция неразличимости на классе X , то R есть π -класс. Отсюда следует, что $\text{dom}(R)$ есть π -класс.

- Поскольку каждая неразличимость рефлексивна, то реляция R – рефлексивна и на классе $\text{dom}(R)$ и значит $X \subseteq \text{dom}(R)$. Это тривиальное замечание имеет интересное приложение: если X – какое-то полумножество реальных объектов, которое не является пересечением бесконечной последовательности множеств, то каждая неразличимость, проявляющаяся на классе X , распространяется и на некоторые объекты, которые не принадлежат X . Последнее условие вытекает из следующих соображений. Ни одно бесконечное множество не может целиком лежать перед горизонтом различимости таким образом, что каждые два его элемента различимы. **Мы не можем видеть все бесконечное множество и одновременно четко различать его отдельные элементы.** Различимость элементов такого множества должна уходить к горизонту.

Реляция неразличимости R есть такой класс, что $R = \bigcap \{r_n; n \in \mathbb{N}\}$, где $r_{n+1} \subseteq r_n$. Кроме того для каждого n должны существовать элементы x, y рассматриваемого бесконечного множества U и такие что $x \neq y$, $\langle x, y \rangle \in r_n$.

Из аксиомы пути горизонту вытекает существование последовательности $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, $\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$ таких, что $(\forall n)(x_n, y_n \in U \ \& \ x_n \neq y_n \ \& \ \langle x_n, y_n \rangle \in r_n)$. Из аксиомы продолжения получаем, что существует $x, y \in U$ такие, что $x \neq y$ и $(\forall n)(\langle x, y \rangle \in r_n)$, следовательно, $\langle x, y \rangle \in R$, иначе говоря, множество U содержит два разных неразличимых элемента. Реляция неразличимости должна быть компактна на классе $\text{dom}(R)$, что означает, что для каждого бесконечного множества $U \subseteq \text{dom}(R)$ существует $x, y \in U$ такие, что $x \neq y$ и $\langle x, y \rangle \in R$.

Континуум в AST

Когда мы представляем некоторый континуум как множество или класс точек лежащих на нем, мы этот континуум раздробляем на отдельные точки и тем самым уничтожаем его, отнимая у него самое существенное - непрерывность и топологическую форму. В тоже время множество или класс не могут быть непрерывными и не имеют топологической формы. Согласно привычным представлениям, непрерывность и форму передает множеству точек пространство, в котором они распложены. В тоже время теоретико-множественная математика не может идти этим путем, поскольку пространство – тоже континуум, требующий теоретико-множественного представления. Образно выражаясь, континуум, разбитый на отдельные точки надо опять «склеить».

Там, где в классической топологии говорится о множествах, в альтернативной теории множеств говорится о классах, а бесконечность понимается, как естественная бесконечность. Точки, на которые мы разделяем континуум были бы тогда в естественном смысле бесконечно малыми.

Альтернативная теория множеств позволяет разработать другое представление континуума. Исходным моментом будет появление континуума вместо класса, скрывшегося за горизонтом. Элементы такого класса вступают в отношения неразличимости, на котором и основано наше представление континуума. Структура, которую классическая топология передает множествам чтобы «уловить» топологические формы и непрерывность из которой топология исходит, являются вторичными по отношению к неразличимости.



Связь континуума и неразличимости

Если мы смотрим с расстояния **10см** на некоторую кучу песка, то мы видим и различаем отдельные песчинки, ей принадлежащие, но всю кучу мы не видим, так как песок заполняет наше поле зрения и выходит за его пределы.

Если мы смотрим на эту кучу песка с расстояния **10м**, то отдельные песчинки мы уже не видим. Они, и сам класс песчинок, составляющих рассматриваемую кучу, ушли за горизонт. Мы видим другое: непрерывное тело определенной пространственной формы, т.е **континуум**, который мы представляем, как возникший путем слияния отдельных песчинок непрерывной протяженности.



Если мы направим взгляд в сторону этой кучи с расстояния **10км**, то мы уже вообще ее не увидим, «от нее не останется следа». Если бы мы о куче песка не знали, то не догадались бы, что за горизонтом есть нечто подобное.

Медиальным взглядом на некоторый класс будем называть такой взгляд на него направленный, **при котором вместо этого класса мы видим континуум**. При таком взгляде элементы рассматриваемого класса уже находятся перед горизонтом. Континуум, который мы видим, является лишь следом, который этот класс за собой оставил на горизонте. Этот континуум позволяет нам заключить, что рассматриваемый класс и все его элементы, все еще имеются хотя бы где-то за горизонтом. Более того сохранилось также направление, в котором на него надо смотреть. Одновременно такой континуум является границей нашего взгляда в направлении к этому классу, которую нельзя преодолеть. Поэтому мы можем представлять континуум, как феномен, находящийся на самом горизонте.

Классическая математика считает, что континуум находится на горизонте, но ее горизонт лежит в абсолютной бесконечности и является четкой и прочной границей, концом мира. Поэтому классическая математика и не пыталась уходить за горизонт, подобные попытки рассматривались, как нечто мистическое чего следовало остерегаться.

При медиальном взгляде на некоторый класс мы не видим его отдельных элементов: они ушли за горизонт, поэтому нет смысла говорить о их различимости и неразличимости. Мы говорим о листах бумаги, лежащих на столе одни из которых исписанные и хорошо различимы, а другие чистые и различимы хуже или вовсе неразличимы. Однако мы можем скрывшиеся за горизонт элементы различать непрямо, то есть без того чтобы их непосредственно видеть, а посредством следа, оставленного ими на горизонте.

Например, если мы смотрим на стол, стоящий перед нами, то мы не видим молекул, из которых он состоит, однако, две молекулы одна из которых находится по середине стола, а другая в углу стола пусть непрямо, но различимы, поскольку середину стола мы хорошо отличаем от его угла. Наоборот, молекулы, которые находятся рядом, сливаются в одну точку и неразличимы даже непрямо.

Каждому взгляду присуща некоторая неразличимость – та, в которую вступают два ушедших за горизонт объекта, когда они оставляют за собой на горизонте один и тот же след. **Эту неразличимость можно даже представить как эквивалентность.**

Каждому взгляду присуща некоторая неразличимость, которую мы можем представлять себе как эквиваленцию, и по сути задание этой эквиваленции описывает топологическое устройство класса. Если мы скажем, какие из молекул стола неразличимы (ибо находятся «близко» друг к другу), мы зададим на нём структуру, аналогичную классическому понятию топологии. При этом топологический образ континуума зависит и от взгляда. Ведь если мы посмотрим на тот же стол в микроскоп, вполне вероятно, что мы заметим на нём всевозможные бугорки и сквозные отверстия. Это значит, что континуум меняет свою форму при изменении взгляда на него.

Соответственно возникает вопрос об объективности понятия формы. Если бы действительно существовало объективное пространство, в котором размещены все частицы, из которых этот стол состоит, то иначе не могло бы быть; но тогда объективной формой этого стола вряд ли была бы та форма, которую мы видим теперь, или даже та, которую бы мы видели, глядя на него через сильный микроскоп. И не ясно, добрались бы мы до этой формы, усиливая зоркость.

Если же принять позицию, **что объективного пространства не существует, а есть лишь разные формы континуумов, соответствующие всегда определённому взгляду**, то **мы ни в чём не ограничим наше представление мира**. То, что мы воспринимаем как пространство, есть не что иное, как абстрагированные формы континуумов, явленные нам при определенном взгляде (или при некоторой совокупности таких взглядов). Вopenка показывает, что в рамках этого подхода можно развить топологию по сути аналогичную классической.

Для формализации натуральных чисел Вopenкой введена аксиома пути горизонту: пусть $\phi(X,Y)$ есть отношение, для которого имеет место $(\forall n)(\exists X) \phi(X,n)$, тогда существует функция класс G , такая, что $\text{dom}(G)$ есть собрание всех конечных натуральных чисел и справедлива $(\forall n)\phi(G(n),n)$

Аксиома пути горизонта существует функция G^* такая, что $\text{dom}(G^*) = \text{FN}(\forall n) \Psi(n)$

откуда $\text{rnd}(G^*) = \{G, \exists n \Psi(G,n)\}$.

Пусть $G: \text{FN} \rightarrow V$ есть произвольная функция, будем считать, что последовательность $G(0), G(1), G(2)$ задает определенное направление горизонту.

Если бы классом наследственно конечных множеств стал класс F^*V , то эта последовательность как целое исчезла бы, но ее отдельные члены и заданное ее направление не исчезнут.

Мы видим сейчас в указанном направлении, мы будем видеть и тогда, но мы будем не в состоянии увидеть в точности то, что увидим сейчас. Это значит, что мы увидим больше, но мы не сможем восстановить то, что видели прежде.

Иными словами данная последовательность хотя бы на некотором продолжении за горизонтом будет плавно продолжаться. В тоже время либо где-то за теперешним горизонтом она четко прервется, либо будет уходить к новому горизонту.

Если мы займем позицию, что объективного пространства не существует, а есть лишь различные формы континуумов, соответствующие определенному взгляду, то мы **не только не ограничим наше представление мира, но наоборот избавимся от не безобидного предрассудка.**

Будем считать, что R означает некоторую произвольную, но фиксированную эквиваленцию неразличимости. Классы расширенного универсума будут представлять классы любой природы, которые ушли за горизонт и обзрываются медиальным взглядом, причем эквиваленция неразличимости соответствующая этому взгляду есть эквиваленция R .

Множества из универсума множеств будут выступать в двойном качестве: как объекты, которые являются элементами классов, наблюдаемых соответствующим медиальным взглядом и как множество этих объектов.

Монаду точки x определим как $\text{Mon}(x) := \{y; \langle x, y \rangle \in R\} = \{y; yRx\} = R''\{x\}$.

Так как R есть эквиваленция то для каждой x, y имеет место $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \text{Mon}(x) = \text{Mon}(y) \Leftrightarrow \text{Mon}(x) \cap \text{Mon}(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \text{Mon}(y) \Leftrightarrow y \in \text{Mon}(x)$.

Две точки x, y имеют на горизонте один и тот же след тогда и только тогда, когда $\text{Mon}(x) = \text{Mon}(y)$. **Этим следом является наименьшая частица, на которые мы разбиваем каждый континуум, то есть то, что следовало бы назвать точкой.** То, что в математике обычно называют точкой существенно меньше объект, который вообще не видно и который мы будем называть геометрической точкой. Название «точка» будет использовано для обозначения множеств из универсума множеств выступающих в роле объектов, скрывшихся за горизонт.

Монада точки не является геометрической точкой, так как она есть некоторый класс. **Однако она однозначно определяет каждую геометрическую точность**, являясь ее носителем, поскольку отдельные элементы монады сливаются в геометрическую точку. **Монады суть естественные канонические модели геометрических точек в расширенном универсуме.**

След, который оставляет за собой на горизонте класс X , составлен из слоев отдельных его элементов, стало быть из геометрических точек.

Фигуру класса X определяем как $\text{Fig}(X) := \{y; (\exists x \in X)(yRx)\} = R \backslash X$.

Для каждого класса X имеет место $\text{Fig}(X) = \cup \{\text{Mon}(x); x \in X\}$.

Для каждой точки x имеет место $\text{Mon}(x) = \text{Fig}(\{x\})$.

Тогда два классов X, Y оставляют на горизонте один и тот же след, если $\text{Fig}(X) = \text{Fig}(Y)$ тогда и только тогда, когда они индуцировано неразличимы.

След, который оставляет на горизонте класс X однозначно определяется классом $\text{Fig}(X)$. За канонические модели таких следов в расширенном универсуме можно взять те классы, которые являются фигурами неких классов, аналогично, как монады являются каноническими моделями геометрических точек.

Будем говорить, что классы X, Y отделимы и обозначаются $\text{Sep}(X, Y)$ если имеют место $(\exists Z)(\text{Sd}(Z) \& \text{Fig}(X) \subseteq Z \& \text{Fig}(Y) \cap Z = \emptyset)$.

Очевидно для любых двух классов X, Y верно $\text{Sep}(X, Y) \Leftrightarrow \text{Sep}(\text{Fig}(X), \text{Fig}(Y))$.

Классы X, Y отделимы тогда и только тогда, когда класс V можно разбить на две множество определимые четкие части $Z, V-Z$ так, что следы на которые классы X, Y оставляют на горизонте находятся в разных частях.

Множество расширенного универсума, то есть элементы класса V трактуются как уже осуществленные, и, следовательно, не смотря на значительную неопределенность данного класса, мы представляем собрание этих множеств, как совместное. Аналогично, собрание всех перечислимых классов, принадлежащих расширенному универсуму, есть класс классов, вследствие чего мы это собрание тоже представляем как совместное, хотя и это собрание весьма неопределенно, поскольку классы и собрания имеют вид $f''FN$, где f – функция из универсума множеств, так что эти классы зависят, с одной стороны, от наблюдаемого класса FN , а с другой стороны – от запаса множеств из универсума множеств, то есть класса V .

Признание несовместности расширенного универсума приводит к необходимости иметь дело с собранием математических объектов, для работы с которым мы не имеем никакого опыта. Здесь не поможет даже изменение смысла кванторов, Если мы понимаем квантор существования, как «можно осуществить», то в несовместном собрании объектов не имеет места $(\exists X)\phi(X) \& (\exists Y)\psi(Y) \Rightarrow (\exists X, Y)(\phi(X) \& \psi(Y))$.

Вопенка введено понятие ветвь расширенного универсума – подсобрание A , для которого имеет место:

- 1) собрание A совместно;
- 2) $V \subseteq A, V \in A, FN \in A$;
- 3) если $\delta(X_1, \dots, X_n)$ – нормальная операция, то для любых $Y_1, \dots, Y_n \in A$ имеет место $\delta(Y_1, \dots, Y_n)$;
- 4) все принятые выше принципы альтернативной теории множеств применимы для порождения классов, попадающих в A и не нарушают его совместности.

Будем говорить, что если некоторые утверждения доказаны для произвольной ветви расширенного универсума, то данное утверждение соответствует стволу расширенного универсума.

Мы можем удовлетвориться тем, что существование некой ветви нам удалось бы понять в некотором подходящем образе. **Достаточно, если мы будем его понимать, как возможность, которая необязательно осуществима, но лишь осуществляется.** Вopenка предлагает для этой цели использовать принцип перенесения будущего в настоящее, который можно выразить тезисом: «**все будущее существует уже теперь**». Под этим подразумевается та ветвь в несовместном собрании всех его возможностей, которая постепенно осуществляется и которую в продолжении всей своей жизни объект целиком не осуществит. То что он уже осуществил, принадлежит прошлому и оно совместно. То, что он еще переживает, будет совместно с тем, что он уже пережил.

Аналогично представляется и **эволюция мира**. Под этим понимаем ту ветвь в несовместном собрании всех возможностей его развития, часть которой уже осуществилась, а остальное будет осуществляться.

При этом принцип переноса будущего в настоящее оказывается столь действенным, что часто побуждает к замене всех возможностей развития мира на ту ветвь, осуществление которой происходит. **Поскольку осуществляется лишь одна ветвь, то возникает впечатление, что в каждый миг есть лишь одна возможность.** Ведь осуществляется только она, из-за чего остальные ветви перестают быть осуществимыми, что ведет нас к представлению, что они не были осуществимы и перед тем. Таким образом, в наиболее завершенной форме принцип переноса будущего в настоящее ведет к строгому детерминизму.

Согласно принципу в альтернативной теории множеств **порождение неперечислимых классов расширенного универсума до некоторого момента совместно, и то, что мы породим в последствии, тоже будет совместно.** Принцип переноса будущего в настоящее делает возможным представление, согласно которому мы, таким образом, осуществляем некоторую ветвь расширенного универсума.

Эта ветвь существует как неизвестная нам цель, к которой мы движемся, но никогда не достигнем. Даже если на каждом шаге мы порождаем не один, а много классов расширенного универсума, у нас всегда будет порожден лишь некоторый класс классов, и значит, нам надо будет осуществлять кодирующую пару, которая этот класс кодирует.

Каждый неперечислимый собственный класс, который можно без нарушения совместности присоединить к собранию A в это собрание попадает. Иными словами, ветвь A максимальна в том смысле, что не существует, то есть не является осуществляемой никакая ветвь B расширенного универсума такая, что $A \subseteq B, A \neq B$.

Вопенка указывает, что целесообразно потребовать дополнительные условия максимальности: если B – подсобрание расширенного универсума, выполняющее ранее определенные условия и $A \subseteq B$, то $A = B$.

Вопенка указывает, что ветви расширенного универсума сильно переплетены и разобраться в этом является существенной математической проблемой.

Если V – подсоборание универсума U и $\phi(X_1, \dots, X_n)$ – классовая формула языка FL , то запись $\phi_R(X_1, \dots, X_n)$ означает формулу, которая возникает из формулы $\phi(X_1, \dots, X_n)$ ограничением всех классовых кванторов собрания V . Будем говорить, что собрание V отражает расширенный универсум U (точнее его ветвь), если имеет место:

1) $V \subseteq B \subseteq U$;

2) если $\phi(X_1, \dots, X_n)$ – классовая формула языка FL , не содержащая ни одной константы, то для любых $Y_1, \dots, Y_n \in V$ имеет место $\phi_R(Y_1, \dots, Y_n) \Leftrightarrow \phi(Y_1, \dots, Y_n)$.

Если собрание V отражает расширенный универсум U и $\phi(x)$ есть классовая формула языка FL , в которой все константы означают некоторые классы из собрания V , то верно $\{x; \phi(x)\} = \{x; \phi_R(x)\} \in V$. В частности, все S_d -классы, а также классы FN , FV и им подобные принадлежат собранию V .

Развивая альтернативную теорию множеств, Вопенка предлагает отдельные взгляды на универсум множеств для простоты представлять, как объекты.

Пусть P - собрание всех взглядов, а p, q, r - элементы собрания P . Вопенка утверждает, что при некотором взгляде p мы видим не только универсум множеств, но этому взгляду предстает расширенный универсум. И посредством этого взгляда мы постепенно проникаем в некоторую его ветвь.

Взгляды, которым соответствуют разные ветви расширенного универсума U , мы представляем как разные. Ветвь расширенного универсума, в которую мы попадаем при взгляде p , будем обозначать $U(p)$, тогда $V(p)$ означает соответствующий универсум множеств, $N(p)$ – соответствующий класс натуральных чисел, $FV(p)$ – соответствующий универсум наследственно конечных множеств, $FN(p)$ – соответствующий класс конечных натуральных чисел.

Вопенка утверждает, что **каждому взгляду p соответствует некоторая статическая альтернативная теория множеств**, в которой мы не обязаны заботиться о совместности расширенного универсума.

Строго говоря, из объективности множеств, принадлежащих универсуму множеств, следует $V \subseteq V^*$. Поскольку при выборе классов V мы не были ничем ограничены, поэтому без особого риска можно положить $V = V^*$. Этим мы даем знать, что класс V в альтернативной теории множеств является представителем какой-то максимальной, но все еще разумно себя ведущей части объективного мира.

На основании сделанного умозаключения Вопенка высказывает гипотезу **объективности универсума множеств**.

Для всех $p, q \in P$ имеет место $V(p) = V(q) = V$, и притом для любых $x, y \in V$, если $x \in y$ при взгляде p , то $x \in y$ при взгляде q .

Согласно этой гипотезе, **универсум множеств не зависит от взглядов, которыми мы на него смотрим**.

При разных взглядах мы получаем перед горизонтом его большую или меньшую часть, то есть ту часть, которую мы можем наблюдать непосредственно; однако все множества из универсума множеств существуют объективно, то есть **независимо от того видим мы их или нет**.

В высказанной гипотезе содержится скрытое предположение, что в **динамической теории множеств универсум множеств представляет постоянный и неизменный стержень мира**. Это не значит, что с точки зрения тождества явлений мы признаем класс X , увиденный при взгляде p , тождественным классу Y , увиденного при взгляде q .

Если A какое-то явление, наблюдаемое в расширенном универсуме $U(p)$ при взгляде p , то соответствующий феномен $\Delta pq(A)$, наблюдаемый при взгляде q в расширенном универсуме $U(q)$ вместо A сильно от него отличается. Тем более нельзя ожидать, что оператор Δpq будет взаимно однозначным. Для некоторых двух разных феноменов A, B $\Delta pq(A), \Delta pq(B)$ могут быть одним и тем же феноменом, а могут распасться на два разных образа. Таким образом, оператор репродукции Δpq имеет меньше инвариантов, чем оператор полной репродукции $*$.

При этом явление, лежащие в основе понимания расширенного универсума, такие, как отношение принадлежности, свойство «быть классом» и т. д. будут инвариантами оператора Δpq .

Для каждого взгляда p имеет место $AN(p) = N$ или $AN(p)$ есть собственное полумножество. В противном случае существовало бы $a \in N$ такое, что $AN(p) = a$, поскольку $AN(p)$ есть сечение на N . Для некоторого взгляда q такого, что $p \alpha q$, тогда бы $a^{-1} \in FN(q)$, из чего следует $a \in FN(q)$, следовательно, $a \in AN(p)$, что приводит к противоречию.

Если предположить, что для каждого $p \in P$ имеет место $AN(p) \neq N$, то наш подход будет более ответственным и, более того, мы оставляем возможность для изучения взглядов, которые не попадают в собрание P , то есть тех, при которых могло произойти крушение нашей уверенности. Такие возможные катастрофы скрываются за горизонтом, представленным классом $AN(p)$.

Другое применение концепции неразличимости - **это конструкция вещественных чисел.**

В начале необходимо ввести рациональные числа (как отношения натуральных чисел). На их множестве есть естественное отношение неразличимости: x и y неразличимы, если для всех конечных натуральных чисел n имеем $|x-y| < 1/n$. Это значит, что слишком близкие рациональные числа сливаются для нас в одно, расстояние между ними находится за горизонтом.

Аналогично слишком большие рациональные числа (превосходящие все конечные рациональные числа) тоже лежат за горизонтом. Вещественными числами будем называть классы эквивалентности (по вышеописанному отношению неразличимости) ограниченных (не «слишком больших» в вышеуказанном смысле) рациональных чисел.

Показывается, что для так определённых вещественных чисел выполнена аксиома о существовании точной верхней грани. И вообще, такие вещественные числа удовлетворяют всему тому, что от них ожидается.

Техника работы с самими вещественными числами в альтернативной теории множеств ничем существенным не отличается от того, как с вещественными числами работают в классической математике.

Благодарю за внимание!