1. ЭНТРОПИЯ КАК МЕРА СТЕПЕНИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Сообщением является последовательность дискретных элементов (знаков, символов) или непрерывная функция. Следует отметить, что все реальные сообщения в виде непрерывных функций могут быть сведены к последовательностям дискретных элементов.

Устройство, явление или причину, порождающие сообщения, удобно толковать как *источники информации*, обладающие определенным алфавитом, который должен быть известен до начала проведения измерений или расчетов количества информации. Источники информации могут быть дискретными и непрерывными, в соответствии с видом порождаемых сообщений. Мы в дальнейшем будем в основном рассматривать *дискретные источники*.

Дискретный источник обладает конечным алфавитом из M элементов, обозначаемых $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_M$, каждый из которых характеризуется вероятностью $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_i), \ldots, P(x_M)$ появления в *сообщении*. То есть мы опять имеем дело со случайными событиями.

Совокупность элементов и их вероятностей удобно задавать в виде матрицы:

$$\begin{Vmatrix} X \\ P \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_M \\ P(x_1) & P(x_2) & \ldots & P(x_M) \end{Vmatrix}$$

В большинстве реальных случаев появление элемента x_i в сообщении зависит от того, какой элемент x_j был предшествующим. Взаимосвязь элементов в сообщении характеризуется матрицей условных вероятностей:

$$P_{x_j}(x_i) = P_j(i) = \begin{Vmatrix} P_1(1) & P_1(2) & \cdots & P_1(i) & \cdots & P_1(M) \\ P_2(1) & P_2(2) & \cdots & P_2(i) & \cdots & P_2(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_j(1) & P_j(2) & \cdots & P_j(i) & \cdots & P_j(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_M(1) & P_M(2) & \cdots & P_M(j) & \cdots & P_M(M) \end{Vmatrix}$$

При отсутствии взаимосвязи элементов: $P_{x_1}(x_i) = P_{x_2}(x_i) = \ldots = P_{x_M}(x_i) = P(x_i)$

Неопределенность выбора элементов x_i при создании сообщения удобно характеризовать энтропией источника $H(x)$.

При независимых элементах:
$$H(x) = -\sum_{i=1}^{M} P(i)\log(P(i))$$

При зависимых элементах с условными вероятностями сначала определяется частная условная энтропия, вычисленная по предыдущей формуле, но в предположении зафиксированного предыдущего элемента x_j:
$$H_{x_j}(x) = -\sum_{i=1}^{M} P_j(i)\log(P_j(i))$$

Величина $H(x)$ случайная, так как случайным является предшествующий элемент x_j. Поэтому для получения полной энтропии источника необходимо произвести усреднение по вероятностям появления предшествующих элементов:
$$H(x) = -\sum_{j=1}^{M}\left[\sum_{i=1}^{M} P_j(i)\log(P_j(i))\right]\cdot P(j)$$

Это формула средней условной энтропии или просто энтропии источника, которая учитывает взаимозависимость элементов в сообщении

Задача №1

Пусть из многолетних наблюдений за погодой известно, что для определенного пункта вероятность того, что 15 июня будет идти дождь, равна 0,4, а вероятность того, что в указанный день дождя не будет, равна 0,6. Пусть далее для этого же пункта вероятность того, что 15 ноября будет идти дождь равна 0,65, вероятность, что будет идти снег – 0,15 и вероятность того, что 15 ноября вовсе не будет осадков равна 0,2. В какой из двух перечисленных дней погоду в рассматриваемом пункте следует считать более неопределенной: 1) если из всех характеристик погоды интересоваться вопросом о характере осадков; 2) если интересоваться лишь вопросом о наличии осадков.

Решение:

Согласно тому, как понимается здесь слово «погода» имела место 15 июля и 15 ноября, характеризуется следующими таблицами вероятностей:

Опыт α_1

исходы опыта	дождь	отсутствие осадков
вероятность	0,4	0,6

Опыт α_2

исходы опыта	дождь	снег	отсутствие осадков
вероятность	0,65	0,15	0,2

1) Поэтому энтропии наших двух опытов равны

$$H(\alpha_1) = -0{,}4\log 0{,}4 - 0{,}6\log 0{,}6 = 0{,}4\cdot 1{,}33 + 0{,}6\cdot 0{,}74 \approx 0{,}98\ \textit{бита}$$

$$\log 0{,}4 = \frac{-0{,}4}{0{,}3} = -\frac{4}{3} = -1{,}33 \qquad \log 0{,}6 = \frac{-0{,}22}{0{,}3} = -0{,}74$$

$$H(\alpha_2) = -0{,}65\log 0{,}65 - 0{,}15\log 0{,}15 - 0{,}2\log 0{,}2 = 0{,}403 + 0{,}4125 + 0{,}48 \approx 1{,}28\ \textit{бита}$$

$$\log 0{,}65 = \frac{-0{,}19}{0{,}3} = -0{,}62 \qquad \log 0{,}15 = \frac{-0{,}82}{0{,}3} = -2{,}75 \qquad \log 0{,}2 = \frac{-0{,}7}{0{,}3} = -2{,}3$$

Поэтому погоду 15 ноября в рассматриваемом пункте следует считать более неопределенной, чем 15 июня.

2) Если интересоваться только тем, будут в рассматриваемый день осадки или нет, то исходы «снег» и «дождь» опыта α_2 следует объединить:

$$H(\alpha_1) \approx 0{,}98\ \textit{бита (без изменений)}$$

$$H(\alpha_2) = -0{,}8\log 0{,}8 - 2\log 0{,}2 = 0{,}264 + 0{,}48 \approx 0{,}72\ \textit{бита}$$

$$\log 0{,}8 = \frac{-0{,}1}{0{,}3} = -0{,}33$$

Тогда погоду 15 ноября в рассматриваемом пункте следует считать менее неопределенной, чем 15 июня.

Задача №2

На выходе двоичного источника информации элементы «0» и «1» появляются с вероятностями соответственно Р и (1-Р). При каком значении Р энтропия источника максимальна? Построить график зависимости для двоичного источника.

Решение:

1) Строим функциональную зависимость величины энтропии от вероятности Р:

$$H(P) = -P\log P - (1-P)\log(1-P)$$

Найдем значение P, при котором данная функция принимает максимальное значение. Для этого ищем экстремум функции:

$$\frac{dH(P)}{dP} = 0$$

$$-\log P - \frac{P}{P\cdot\ln 2} + \log(1-P) + \frac{1-P}{(1-P)\cdot\ln 2} = 0$$

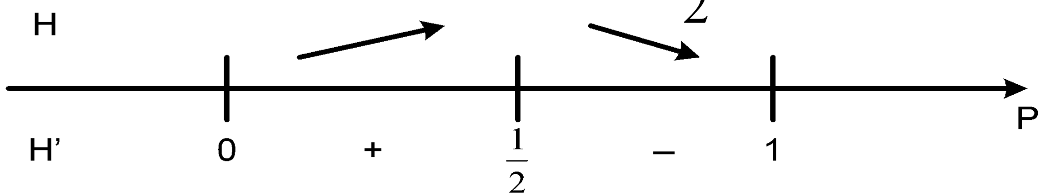
$$-\log P - \frac{1}{\ln 2} + \log(1-P) + \frac{1}{\ln 2} = 0$$

$$-\log P + \log(1-P) = 0$$

$$\log\frac{(1-P)}{P} = 0$$

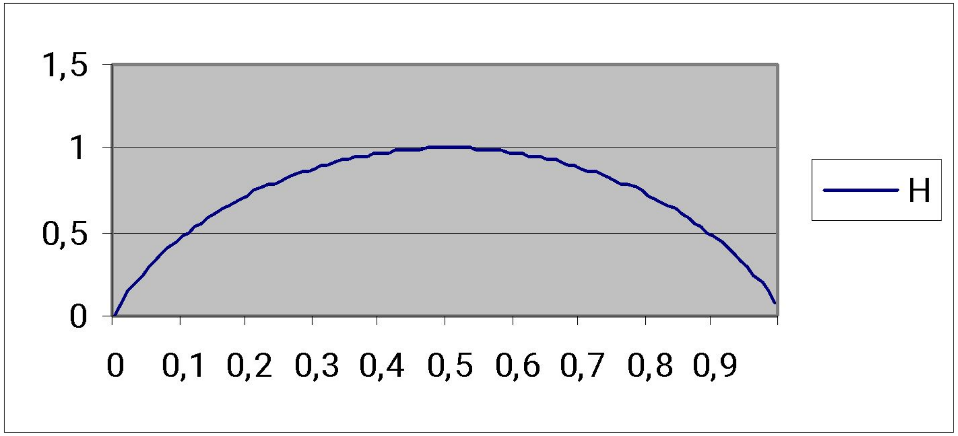
$$\frac{(1-P)}{P} = 1$$

$P = 1 - P$ т.о. $P = \dfrac{1}{2}$



Это подтверждает свойство энтропии, что она максимальна при равновероятных элементах, т.е. $P = 1/2$.

2) Зная функциональную зависимость получаем следующий график:



$$H\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = -\log\frac{1}{2} = \log 2 = 1$$

$$H(1) = 0 - 0 \cdot \log 0 \qquad\qquad H(0) = -0 \cdot \log 0 - 0$$

$$\lim_{x\to 0}(x \cdot \log x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3 \ln 2} = 0, \text{ т.к. нет неопределенности}$$

Задача №3

Имеются два дискретных троичных источника с независимыми элементами. На выходе каждого источника появляются сообщения одинаковой длины – по 15 элементов. Количество различных элементов в сообщении каждого источника постоянно. Сообщения каждого источника отличаются только порядком следования элементов, а состав сообщений постоянный. Зафиксированы два типичных сообщения: 021202120212021 – первого источника и 012101201101201 – второго. Для какого источника неопределенность появления элементов выше?

Решение:

$$p_0^1 = \frac{4}{15} \qquad p_1^1 = \frac{4}{15} \qquad p_2^1 = \frac{7}{15} \qquad\qquad p_0^2 = \frac{1}{3} \qquad p_1^2 = \frac{7}{15} \qquad p_2^2 = \frac{1}{5}$$

Для первого источника:

$$H_1 = -\sum_{i=0}^{2} p_i^1 \cdot \log p_i^1 = -\frac{4}{15}\log\frac{4}{15} - \frac{4}{15}\log\frac{4}{15} - \frac{7}{15}\log\frac{7}{15} = 1{,}53 \ \textit{бит}$$

Для второго источника:

$$H_2 = -\sum_{i=0}^{2} p_i^2 \cdot \log p_i^2 = -\frac{5}{15}\log\frac{5}{15} - \frac{7}{15}\log\frac{7}{15} - \frac{3}{15}\log\frac{3}{15} = 1{,}506 \ \textit{бит}$$

Напомним, что *средняя условная энтропия* опыта β при условии выполнения опыта α находится по формуле (см. лекции):

$$H_\alpha(\beta) = p(A_1)H_{A1}(\beta) + p(A_2)H_{A2}(\beta) + \ldots + p(A_k)H_{Ak}(\beta)$$

Задача №4

Пусть опыты α и β состоят в последовательном извлечении двух шаров из урны, содержащей m черных и $(n\text{-}m)$ белых шаров (α - извлечение первого шара и β - извлечение второго шара). Чему равна энтропия $H(\alpha)$, $H(\beta)$ и условная энтропия $H_\alpha(\beta)$?

Решение:

$$H(\alpha) = -\frac{m}{n}\log\frac{m}{n} - \frac{n-m}{n}\log\frac{n-m}{n}.$$

Обозначим:

A_1 – первый раз извлекли черный шар, A_2 – первый раз извлекли белый шар;

B_1 – второй раз извлекли черный шар, B_2 – второй раз извлекли белый шар;

Если нам известен исход опыта α, то:

$$p(A_1) = \frac{m}{n}, \quad p(A_2) = \frac{n-m}{n}.$$

$$H(\alpha) = -\frac{m}{n}\log\frac{m}{n} - \frac{n-m}{n}\log\frac{n-m}{n} = -\frac{m}{n}\log m + \frac{m}{n}\log n - \frac{n-m}{n}\log(n-m) +$$

$$+\frac{n-m}{n}\log n = -\frac{m}{n}\log m + \frac{m}{n}\log n - \log(n-m) + \frac{m}{n}\log(n-m) + \log n - \frac{m}{n}\log n$$

$$p_{A1}(B_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad p_{A1}(B_2) = \frac{n-m}{n-1};$$

$$p_{A2}(B_1) = \frac{m}{n-1}, \quad p_{A2}(B_2) = \frac{n-m-1}{n-1}.$$

Теперь, по формуле полной вероятности

$$p(B_i) = \sum_{j=1}^{2} p(A_j) p_{A_j}(B_i)$$

можно определить безусловные вероятности опыта β:

$$p(B_1) = \frac{m}{n}, \quad p(B_2) = \frac{n-m}{n}.$$

Таким образом, безусловная энтропия опыта β равна безусловной энтропии опыта α.

Найдем частные условные энтропии опыта β, что:

$$H_{A1}(\beta) = -\frac{m-1}{n-1}\log\frac{m-1}{n-1} - \frac{n-m}{n-1}\log\frac{n-m}{n-1},$$

$$H_{A2}(\beta) = -\frac{m}{n-1}\log\frac{m}{n-1} - \frac{n-m-1}{n-1}\log\frac{n-m-1}{n-1}.$$

$$H_{\alpha}(\beta) = \frac{m}{n} H_{A1}(\beta) + \frac{n-m}{n} H_{A2}(\beta)$$

И, наконец, находим:

$$H_{\alpha}(\beta) = p(A_1)H_{A1}(\beta) + p(A_2)H_{A2}(\beta) = \frac{m}{n}\left[-\frac{m-1}{n-1}\log\frac{m-1}{n-1} - -\frac{n-m}{n-1}\log\frac{n-m}{n-1}\right] -$$

$$-\frac{n-m}{n}\left[-\frac{m}{n-1}\log\frac{m}{n-1} - -\frac{n-m-1}{n-1}\log\frac{n-m-1}{n-1}\right] = \frac{nm - m^2 + n^2 - 2nm + m^2 - n + m}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{-nm + n^2 - n + m}{n(n-1)} = \frac{m(1-n) + n(n-1)}{n(n-1)} = \frac{n-m}{n}$$

Задача №5

Ракеты двух пусковых установок используются для поражения двух целей. Ракета, пущенная с первой установки, поражает цель номер один с вероятностью 0,5, цель номер два – с вероятностью 0,3, и дает промах с вероятностью 0,2. Ракета второй установки поражает первую цель вероятностью 0,3, а вторую – с вероятностью 0,5 и вероятность промаха 0,2. Вероятность выбора первой установки 0,4. Чему равна неопределенность выбора установки: 1) если известно, что поражена вторая цель; 2) если произошел промах? Какова неопределенность исхода, если пущена любая ракета?

Решение:

Полагаем, что варианты поражения целей соответствуют случайному опыту B, а выбор ракетной установки – опыту A. Вероятности поражения целей ракетами различных установок представляют собой условные вероятности:

$$P_A(B) = \begin{Vmatrix} p_{A1}(B_1) & p_{A1}(B_2) & p_{A1}(B_3) \\ p_{A2}(B_1) & p_{A2}(B_2) & p_{A2}(B_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{Vmatrix}$$

$$P(A) = \begin{Vmatrix} p(A_1) & p(A_2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,6 \end{Vmatrix}$$

Неопределенность выбора установки при условии, что поражена вторая цель представляет собой энтропию:

$$H_{B2}(A) = -\sum_{i=1}^{2} p_{B2}(A_i) \cdot \log(p_{B2}(A_i)) = -0,29\log 0,29 - 0,69\log 0,69 = 0,89$$

Неопределенность выбора установки в случае промаха есть энтропия:

$$H_{B3}(A) = -\sum_{i=1}^{2} p_{B3}(A_i) \cdot \log(p_{B3}(A_i)) = -0,19\log 0,19 - 0,28\log 0,28 = 0,97$$

Поэтому нам необходимо найти условные вероятности $p_{B2}(A_i)$ и $p_{B3}(A_i)$. Для этого определяем элементы матрицы $P(B)$ по формуле полной вероятности:

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{2} p(A_i) \cdot p_{Ai}(B_j)$$

$$P(B) = \begin{Vmatrix} p(B_1) & p(B_2) & p(B_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}38 & 0{,}42 & 0{,}2 \end{Vmatrix}$$

Теперь мы можем найти условные вероятности (см. тему «условные вероятности»):

$$P_{Bj}(A_i) = \frac{P_{Ai}(B_j)}{P(B_j)} \cdot P(A_i)$$

$$P_B(A) = \begin{Vmatrix} P_{B1}(A_1) & P_{B1}(A_2) \\ P_{B2}(A_1) & P_{B2}(A_2) \\ P_{B3}(A_1) & P_{B3}(A_2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}526 & 0{,}474 \\ 0{,}286 & 0{,}714 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{Vmatrix}$$

В результате находим:

$$H_{B2}(A) = 0{,}863 \quad бит$$

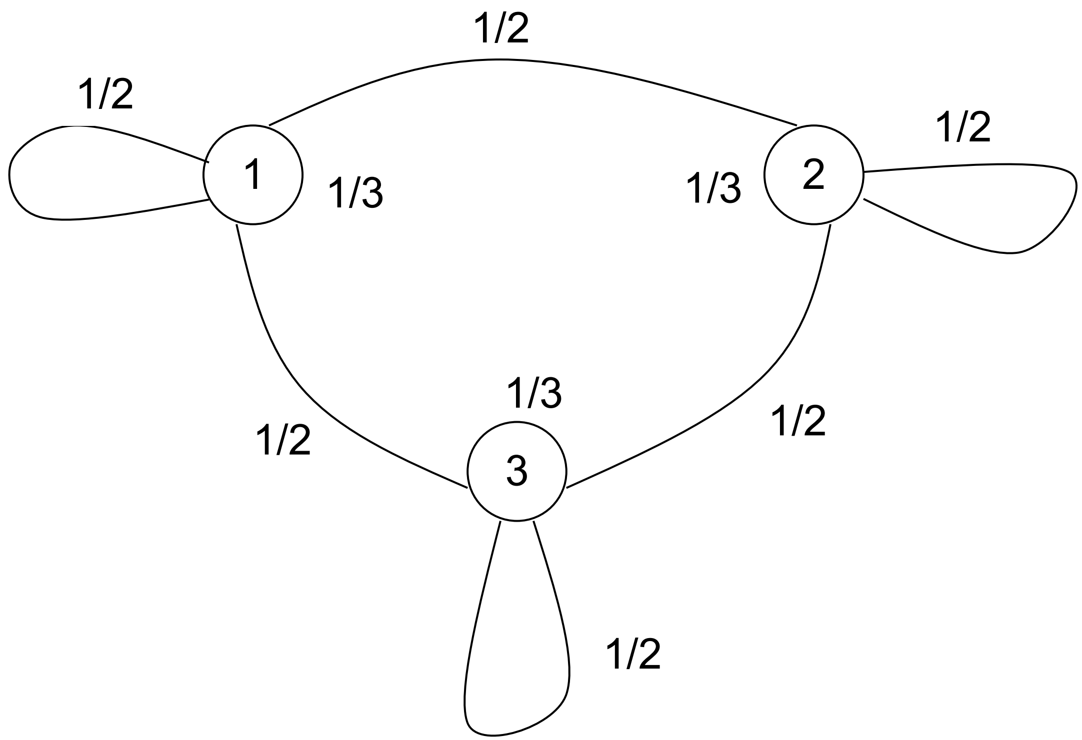
$$H_{B3}(A) = 0{,}971 \quad бит$$

Неопределенность ситуации, если запущена любая ракета, характеризуется средней условной энтропией:

$$H_A(B) = -\sum_{i=1}^{2} p(A_i) \sum_{j=1}^{3} p_{Ai}(B_j) \cdot \log(p_{Ai}(B_j)) = 1{,}485 \quad бит$$

Задача №6

Найти энтропию источника, описываемого графом вероятностей перехода.



Решение:

Составляем матрицы вероятностей состояний и условных вероятностей:

$$P(1) - P \text{ } \textit{появление } 1\textit{го}$$

$$\begin{cases} P(1) = P(1)\cdot P(1|1) + P(2)\cdot P(1|2) + P(3)\cdot P(1|3) \\ P(2) = P(1)\cdot P(2|1) + P(2)\cdot P(2|2) + P(3)\cdot P(2|3) \\ P(3) = P(1)\cdot P(3|1) + P(2)\cdot P(3|2) + P(3)\cdot P(3|3) \\ P(1) + P(2) + P(3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(1) = P(1)\cdot\frac{1}{2} + P(3)\cdot\frac{1}{2} \\ P(2) = P(1)\cdot\frac{1}{2} + P(2)\cdot\frac{1}{2} \\ 1 = P(1) + P(2) + P(3) \end{cases}$$

$$P(3) = 2P(1) - P(1) = P(1)$$

$$2P(2) - P(2) = P(1)$$

$$\begin{matrix} P(3) = P(1) \\ P(2) = P(1) \end{matrix} \Rightarrow P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \begin{Vmatrix} p(A_1) & p(A_2) & p(A_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$$

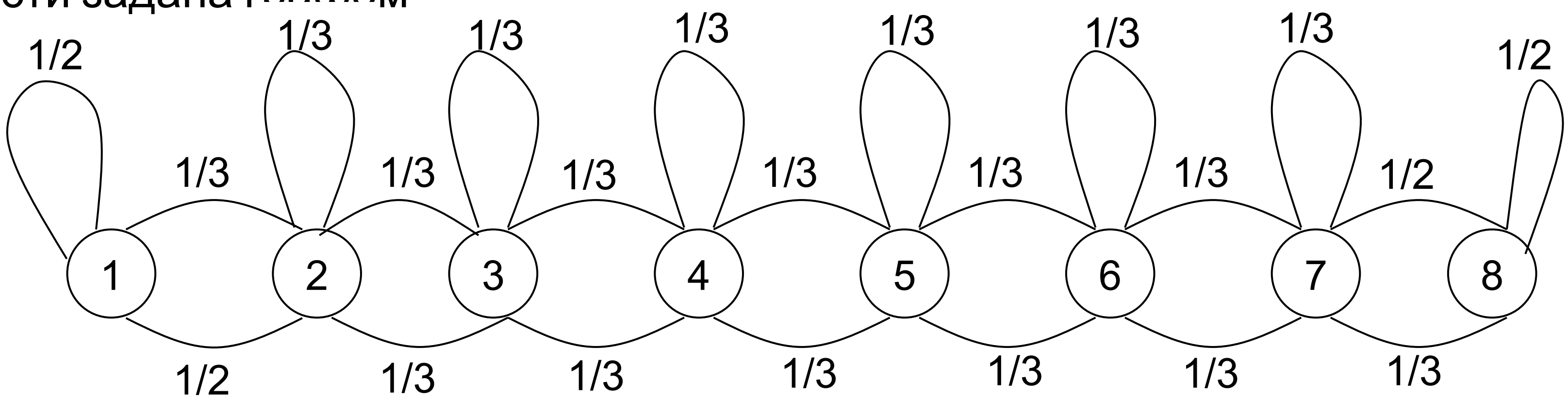
$$P_{Ai}(A_j) = \begin{Vmatrix} P_{A1}(A_1) & P_{A1}(A_2) & P_{A1}(A_3) \\ P_{A2}(A_1) & P_{A2}(A_2) & P_{A2}(A_3) \\ P_{A3}(A_1) & P_{A3}(A_2) & P_{A3}(A_3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{Vmatrix}$$

Теперь находим среднюю условную энтропию:

$$H_{Ai}(A_j) = \sum_{i=1}^{3} p(A_i) \sum_{j=1}^{3} p_{Ai}(A_j)\cdot\log(p_{Ai}(A_j)) = \frac{1}{3}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \textit{бит}$$

Задача №7

Определить максимальную энтропию телевизионного изображения, содержащего 500 строк по 650 элементов в строке, при условии, что яркость каждого элемента передается восьмью квантованными уровнями, если: а) уровни не коррелированы; б) статистическая связь между различными градациями яркости задана графом



Решение:

а) Максимальная энтропия одного элемента изображения, при условии, что уровни не коррелированы, составляет (энтропия максимальна в случае, если уровни являются равновероятными):

$$500 \cdot 650 = 3250000 \qquad p(i) = \frac{1}{8},\ i = 1 \ldots 8 \qquad H^1 = \log(8) = 3 \quad \textit{бита}$$

Так как, у нас элементов 500x650, *то возможное количество состояний* $8^{500 \cdot 650}$ *изображения , а максимальная энтропия телевизионного изображения равна:*

$$H^И = \log(8^{500 \cdot 650}) = 500 \cdot 650 \cdot \log(8) = 325000 \cdot H^1 = 975000 \quad \textit{бит}$$

б) Найдем максимальную среднюю условную энтропию одного элемента. Для этого, исходя из приведенного графа, составим матрицу условных переходных вероятностей:

$$P_{Ai}(A_j)=\begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{Vmatrix}$$

Уровни считаем равновероятными, так как ищем максимальную энтропию, значит:

$$P(A_i)=\begin{Vmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 & 0{,}125 \end{Vmatrix}$$

Теперь находим максимальную среднюю условную энтропию одного элемента изображения:

$$H^1_{Ai}(A_j)=-\sum_{i=1}^{8} p(A_i)\sum_{j=1}^{8} p_{Ai}(A_j)\cdot\log(p_{Ai}(A_j))=1{,}439 \quad \textit{бит}$$

Отсюда максимальная энтропия телевизионного изображения равна:

$$H^{И}=500\cdot 650\cdot H^1_{Ai}(A_j)=467600 \quad \textit{бит}$$

Задача №8

Дана матрица вероятностей совместных событий:

$$P(X,Y) = \begin{array}{cc} & X \\ Y & \begin{Vmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Определить энтропии:

$H(x)$, $H(y)$, $H_{y1}(x)$, $H_{x2}(y)$, $H_x(y)$, $H_y(x)$, $H(x, y)$.

Решение:

$$P(X,Y) = \begin{array}{cc} & X \\ Y & \begin{Vmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{Vmatrix} \end{array} = \begin{Vmatrix} p(x_1y_1) & p(x_1y_2) & p(x_1y_3) \\ p(x_2y_1) & p(x_2y_2) & p(x_2y_3) \\ p(x_3y_1) & p(x_3y_2) & p(x_3y_3) \end{Vmatrix}$$

1) $x_i = y_1x_i + y_2x_i + y_3x_i - \textit{несовместны}$

$$p(x_i) = p(y_1x_i) + p(y_2x_i) + p(y_3x_i),\ i = 1\ldots3; \quad p(y_j) = p(y_jx_1) + p(y_jx_2) + p(y_jx_3),\ j = 1\ldots3$$

$$p(x_i) = \frac{3}{8},\ i = 1\ldots3; \quad p(x_2) = \frac{2}{8}; \quad p(y_1) = \frac{3}{8}, \quad p(y_2) = \frac{2}{8}, \quad p(y_3) = \frac{3}{8};$$

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log p(x_i) = -\left(2\cdot\frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\log\frac{2}{8}\right) = \frac{6}{8}\cdot 1{,}4 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1{,}05 + 0{,}5 = 1{,}55\ \textit{бит}$$

$$H(y) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i)\log p(y_i) = -\left(2\cdot\frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\log\frac{2}{8}\right) = \frac{6}{8}\cdot 1{,}4 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1{,}05 + 0{,}5 = 1{,}55\ \textit{бит}$$

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{3} p(y_j, x_i), \ \ p(y_i) = \sum_{j=1}^{3} p(x_j, y_i), \quad H(x) = H(y) = 1{,}55 \quad \textit{бита}.$$

2) $H_y(x) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i)\cdot\sum_{j=1}^{3} p_{yi}(x_j)\cdot\log(p_{yi}(x_j)), \quad H_x(y) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\cdot\sum_{j=1}^{3} p_{xi}(y_j)\cdot\log(p_{xi}(y_j)),$

$$p_{yi}(x_j) = p(y_i, x_j)/p(y_i), \ \ p_{xi}(y_j) = p(x_i, y_j)/p(x_i), \ \ H_y(x) = H_x(y) = 1{,}43 \quad \textit{бита}.$$

3) $H_{y1}(x) = -\sum_{j=1}^{3} p_{y1}(x_j)\cdot\log(p_{y1}(x_j)),\quad H_{x2}(y) = -\sum_{j=1}^{3} p_{x2}(y_j)\cdot\log(p_{x2}(y_j)),$

$$H_{y1}(x) = -\log\frac{1}{3} = 1{,}58 \quad \text{бита}.$$

$$p_{y1}(x_1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{1}{3},\quad p_{y1}(x_2) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{1}{3},\quad p_{y1}(x_3) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{1}{3},\quad p_{y2}(x_1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{2} = \frac{1}{2},$$

$$H_{x2}(y) = -2\cdot\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1 \quad \text{бит}.$$

$$p_{x2}(y_1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{2} = \frac{1}{2},\quad p_{x2}(y_2) = 0,\quad p_{x2}(y_3) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{2} = \frac{1}{2}.$$

4) $H(x,y) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i,y_j)\cdot\log p(x_i,y_j)$ *или* $H(x,y) = H(x) + H_x(y);$

$$p_{yi}(x_i) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix} \qquad p_{xi}(y_j) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$$

$$H_{y2}(x) = 1,\quad H_{y3}(x) = 1{,}59$$

$$H_y(x) = \sum_{i=1}^{3} p(y_i)\cdot H_{yi}(x) = 2\cdot\frac{3}{8}\cdot 1{,}59 + \frac{2}{8} = 1{,}44 \qquad H_y(x) = H_x(y) = 1{,}44$$

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i,y_j)\cdot\log p(x_i,y_j) = -8\cdot\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} = 3 \quad \text{бита}.$$

Задача №9

Информация передается при помощи частотно-модулированных сигналов, рабочая частота F которых изменяется с равной вероятностью в пределах от *F_1=10МГц* до *F_2=50МГц*. Определить энтропию значения частоты, если точность измерения частоты *ΔF=2кГц*.

Решение:

Так как точность измерений составляет ΔF=2кГц, то мы имеем дело с

$$n = \frac{F_2 - F_1}{\Delta F} = 20 \cdot 10^3$$

числом равновероятных исходов.

$$p(F_i) = \frac{1}{20 \cdot 10^3}$$

Поэтому энтропия частоты будет определяться:

$$H(F) = \log n = 14{,}28 \quad \textit{бит}.$$

Задача №10

Дан сигнал с распределением $f(x)$, который затем был квантован с точностью $1B$.

Известно, что появление уровней сигнала имеет попарную зависимость, которая представлена матрицей условных вероятностей:

$$p_{x_j}(x_i) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 9/11 & 2/11 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 1/2 \\ 0 & 2/9 & 7/9 \end{array} \right\| \end{array} = \left\| \begin{array}{ccc} p_0(0) & p_0(1) & p_0(2) \\ p_1(0) & p_1(1) & p_1(2) \\ p_2(0) & p_2(1) & p_2(2) \end{array} \right\|$$

Найти среднюю условную энтропию сигнала $H_x(x)$.

Решение:

Вероятности уровней находим из графика $f_x(x)$. В нашем случае:

$$p(a \le x < b) = \int_a^b f(x)dx = S_{трапеции} = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot h,$$

где S_1, S_2 – основания трапеции, h – высота трапеции.

Так как говорится о точности $1B$, то вероятность нахождения в 0-ом состоянии будет равно площади фигуры ограниченной функцией $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=0$ и $x=1$, то есть:

$$p(x_0) = p(0) = 5/9 \cdot 1 = 5/9.$$

Так же находим:

$$p(x_1) = p(1) = 1/3, \quad p(x_2) = p(2) = 1/9.$$

Теперь мы можем найти энтропию данного сигнала $H_x(x)$ *:*

$$H_{x1}(x_i) = -\frac{9}{11}\log\frac{9}{11} - \frac{2}{11}\log\frac{2}{11} = 0,24 + 0,45 = 0,69,$$

$$H_{x2}(x_i) = -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 0,38 + 0,53 + 0,5 = 1,41,$$

$$H_{x3}(x_i) = -\frac{2}{9}\log\frac{2}{9} - \frac{7}{9}\log\frac{7}{9} = 0,48 + 0,28 = 0,76.$$

$$H_x(x) = -\sum_{i=0}^{2} p(x_i)\sum_{j=0}^{2} p_{xi}(x_j)\cdot\log(p_{xi}(x_j)) = \frac{5}{9}\cdot 1,4 + \frac{1}{3}\cdot 1,41 + \frac{1}{9}\cdot 0,76 = 1,33\ \textit{бит}.$$

Напомним некоторые свойства энтропии источников информации.

1) Условная энтропия источника всегда меньше безусловной:

$$0 \le H(X \mid Y) \le H(X)$$

2) Если составной источник состоит из источников информации X и Y, то для случая независимых источников:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y),$$

а для случая зависимых друг от друга источников:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y \mid X) \quad \textit{или} \quad H(X,Y) = H(Y) + H(X \mid Y).$$

Задача №11

Элементы алфавитов X и Y статистически связаны. Известно, что $H(X)$ = 8 бит, $H(Y)$ = 12 бит. В каких пределах меняется условная энтропия $H(Y \mid X)$ при изменении $H(X \mid Y)$ в максимально возможных пределах?

Решение:

Т.к.: $H(X, Y) = H(X) + H(Y \mid X)$ и $H(X, Y) = H(Y) + H(X \mid Y)$, *то можем записать:*

$H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y)$.

Условная энтропия может изменяться: $0 \le H(X \mid Y) \le H(X)$, *поэтому значения какие будет принимать* $H(Y \mid X)$ *при изменении* $H(X \mid Y)$ *можно определить:*

$H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y) - H(X)$.

При минимальном значении: $H(X \mid Y) = 0$: $H(Y \mid X) = 0 + 4 = 4$ *бит.*

При максимальном значении: $H(X \mid Y) = H(X) = 8$: $H(Y \mid X) = 8 + 4 = 12$ *бит.*

$$4 \le H(Y \mid X) \le 12.$$

Запишем, чему равна приведенная энтропия непрерывной случайной величины, сигнала или события, подчиняющихся нормальному закону распределения:

$$H^*_{норм}(X) = \log\sqrt{2\pi\sigma^2_X e}$$

Задача №12

В результате полной дезорганизации управления самолеты летят произвольными курсами. Управление восстановлено, и все самолеты взяли общий курс со среднеквадратической ошибкой отклонения от курса $\sigma = 3^0$. Найти изменение энтропии, считая, что в первом случае имело место равномерное распределение вероятностей углов, а во втором случае – нормальное.

Решение:

Рассмотрим каждый самолет, как случайную величину. Так, как в первом случае имеет место равномерное распределение вероятностей углов, а у нас углы изменяются от 0 *до* 360^o, *то функция распределения вероятности для одного самолета равна* $f(x) = 1/360$. *Для равновероятных случайных величин:*

Для первого случая:

$$H^*_{равн}(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log f(x)dx = -\int_0^{360}\frac{1}{360}\log\frac{1}{360}dx = -\frac{1}{360}\log\frac{1}{360}\cdot x\,\Big|_0^{360} = \log(360) = 8{,}49\ бит$$

Для второго случая считаем по приведенной выше формуле:

$$H^*_{норм}(X) = \log\sqrt{2\pi\sigma^2_X e} = \log\sqrt{2\pi\cdot 9\cdot e} = 3{,}63\ бит$$

Таким образом изменение энтропии составит:

$$\Delta H(X) = H_{равн\,\Delta x}(X) - H_{норм\,\Delta x}(X) = (т.к. \log\Delta x = const) = H^*_{равн}(X) - H^*_{норм}(X) = 4{,}86\ бит.$$

Добавочные задачи

Задача №13

Имеются два дискретных источника информации, заданных следующими таблицами вероятностей:

X	x_1	x_2
вероятность	p_1	p_2

Y	y_1	y_2	y_3
вероятность	q_1	q_2	q_3

Определить, какой источник обладает большей неопределенностью в случае, если: а) $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2 = q_3$; б) $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2 + q_3$.

Решение:

1) В случае равновероятных элементов большей неопределенностью обладает троичный источник. При этом неопределенность может быть подсчитана, как $\log M$, *где* M *– число равновероятных состояний.*

2) Запишем:

$$H(X) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 = -q_1 \log q_1 - (q_2 + q_3) \log(q_2 + q_3) =$$

$$= -q_1 \log q_1 - q_2 \log(q_2 + q_3) - q_3 \log(q_2 + q_3) =$$

$$= q_1 \log \frac{1}{q_1} + q_2 \log \frac{1}{(q_2 + q_3)} + q_3 \log \frac{1}{(q_2 + q_3)}$$

$$H(Y) = -q_1 \log q_1 - q_2 \log q_2 - q_3 \log q_2 = q_1 \log \frac{1}{q_1} + q_2 \log \frac{1}{q_2} + q_3 \log \frac{1}{q_3}$$

Отсюда следует, что $H(X) < H(Y)$.

Задача №14

Определить среднюю неопределенность появления одного символа сообщения 01001000101001, при условии, что вероятность появления элементов на выходе источника информации с течением времени не изменяется, а приведенная последовательность символов – типичная.

Решение:

$$H(x) = -\frac{5}{14}\log\frac{5}{14} - \frac{9}{14}\log\frac{9}{14} = 0{,}94.$$

Задача №15

Измерительное устройство регистрирует временные интервалы, распределенные случайным образом в пределах от 100 до 500мс. Как изменится энтропия случайной величины при изменении точности измерения с 1мс до 1мкс?

Решение:

При точности измерения 1мс случайная величина принимает (500-100)/1=400 *равновероятных значений, а значит ее энтропия:*

$$H^{1}(x) = \log(400) = 8{,}64 \quad \text{áèò}$$

А при точности измерения 1мкс случайная величина принимает (500-100)/0.001=400000 *равновероятных значений, а значит ее энтропия:*

$$H^{1}(x) = \log(400000) = 18{,}61 \ \text{бит}.$$

Значит, энтропия случайной величины увеличится примерно на 10 бит.

Задача №16

Опыт X – случайный выбор целого числа от 1 до 1050. Опыт Y – определение величин остатков от деления этого числа на 35. Определить энтропии $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$.

Решение:

Чтобы найти энтропии $H(X)$, $H(Y)$, *строим вероятностные схемы для* X *и* Y.

Т.к. X *может принимать равновероятные значения от 1 до 1050, то получаем:*

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_{1050} \\ 1/1050 & 1/1050 & \dots & 1/1050 & \dots & 1/1050 \end{Vmatrix},$$

т.к. при делении на 35, остаток от деления может принимать 35 равновероятных значений от 0 до 34, а значит:

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_{35} \\ 1/35 & 1/35 & \dots & 1/35 & \dots & 1/35 \end{Vmatrix}.$$

Находим: $H(X) = \log 1050 = 10{,}02$ *бит*, $H(Y) = \log 35 = 5{,}12$ *бит*.

Для определения $H(X \mid Y)$ *построим матрицу* $P(X \mid Y)$. *При построении данной матрицы будем исходить из следующих соображений, если мы имеем остаток от деления на 35* $y_1 = 0$, *то этому должны отвечать числа* x_{35} $=35$, x_{70} $=70, \ldots,$ x_{1050} $=1050$, *которые отстоят друг от друга на 35 и количество этих чисел равно 1050/35=30. Так как числа равновероятные, то вероятности их появления при условии, что остаток от деления равен 0, составляет 1/30. Тоже самое относится к значениям X при условии других остатков от деления. Т.о. получаем:*

$$P(X \mid Y) = \begin{array}{c|ccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{35} & x_{36} & x_{37} & \dots & x_{1050} \\ \hline y_1 & 1/30 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/30 & 0 & \dots & 0 \\ y_2 & 0 & 1/30 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/30 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & 0 & 1/30 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/30 & 0 & 0 & 0 & 1/30 \end{array}$$

Находим:

$$H(X \mid Y) = -\sum_{i=1}^{35} p(y_i) \sum_{j=1}^{1050} p(x_j \mid y_i) \cdot \log(p(x_j \mid y_i)) = \log 30 = 4{,}9 \ \textit{бита}.$$