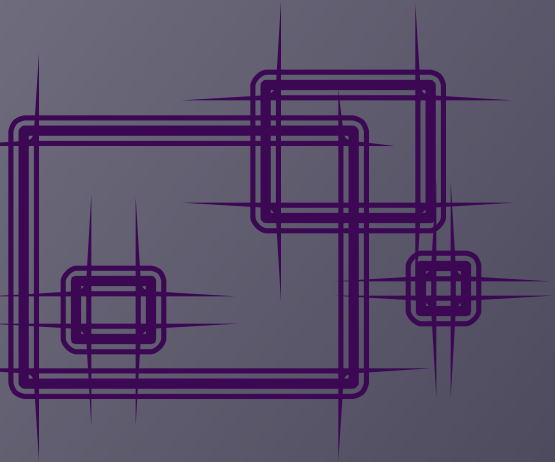


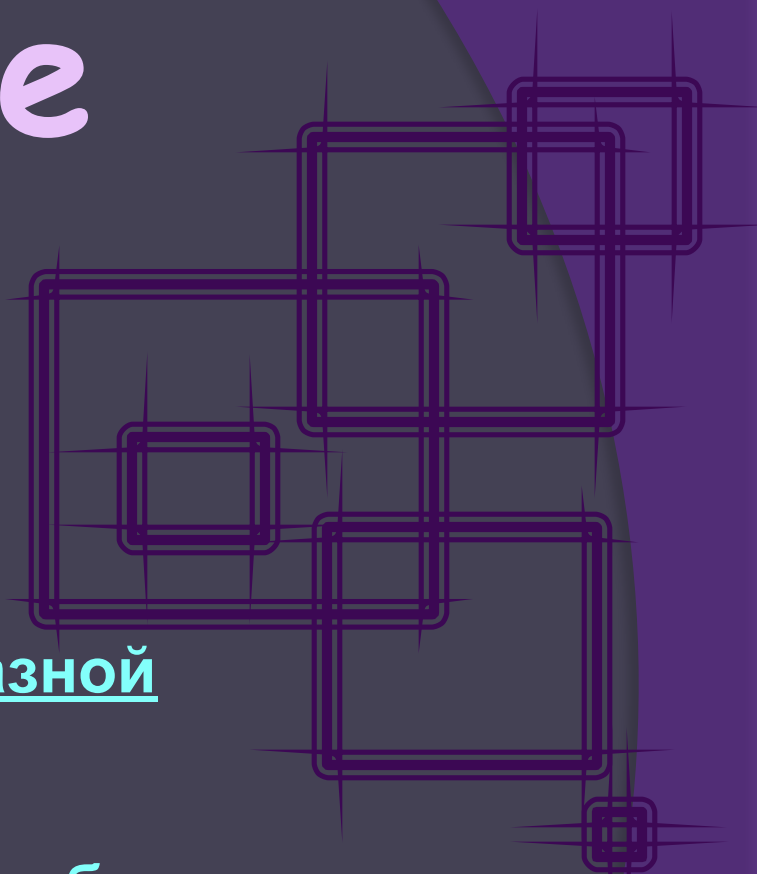
# Первообразная



$$F'(x) = f(x)$$

# Содержание

1. Определение первообразной
2. Основное свойство первообразной
3. Три правила нахождения первообразных



# Определение первообразной

Функция  $F$  называется *первообразной* для функции  $f$  на заданном промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

---

**Пример:**

$F(x) = x^3/3$  есть первообразная для функции  $f(x)=x^2$  на интервале  $(-\infty; \infty)$ , так как

$$F'(x) = (x^3/3)' = 1/3(x^3)' = 1/3 * 3x^2 = x^2 = f(x)$$

для всех  $x \in (-\infty; \infty)$ .



# Основное свойство первообразной

Любая первообразная для функции  $f$  на промежутке  $I$  может быть записана в виде

$$F(x) + C,$$

Где  $F(x)$  – одна из первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $I$ , а  $C$  – произвольная постоянная.

---

## Признак постоянства функции

Если  $F'(x) = 0$  на некотором промежутке  $I$ , то функция  $F$  – постоянная на этом промежутке.



# СВОЙСТВА:

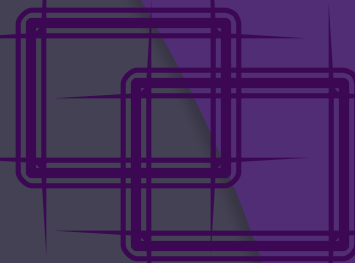
1. Какое бы число не подставить в формулу  $C$  получим первообразную для функции  $f$  на промежутке  $I$ .
2. Какую бы первообразную  $F$  для  $f$  на промежутке  $I$  не взять, можно подобрать такое число  $C$ , что для всех значений  $x$  из промежутка  $I$  выполняется равенство

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

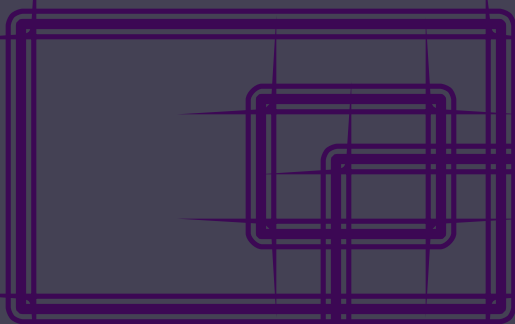
График двух любых первообразных для функции получается путем параллельного переноса вдоль оси  $OY$ .



# Таблица первообразных



| Функция $f$             | $k$<br>(постоянная) | $x^n$<br>( $n \in \mathbb{Z}$ ,<br>$n \neq 1$ ) | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$      | $\cos x$     | $\frac{1}{\cos^2 x}$      | $\frac{1}{\sin^2 x}$        |
|-------------------------|---------------------|---|----------------------|---------------|--------------|---------------------------|-----------------------------|
| Общий вид первообразных | $kx + C$            | $\frac{xn + 1}{n + 1} + C$                      | $2\sqrt{x} + C$      | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ | $\operatorname{tg} x + C$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ |



## Примеры:

### Пример 2

$f(x) = 1/x^2$ , найти  $F_0(x)$  на  $(0; \infty)$ ,  $F(1) = 1$

$$F(x) = -1/x + C$$

$$-1/1 + C = 1$$

$$-1 + C = 1$$

$$C = 2$$

$$F_0(x) = -1/x + 2$$

### Пример 1

$f(x) = -x^3$ , найти  $F(x)$

$F'(x) = -x^4/4$ , так как  $(-x^4/4)' = -x^3$

Общий вид первообразной:

$$F(x) = -x^4/4 + C$$



# Три правила нахождения первообразных

## Правило 1

Если  $F$  есть первообразная для  $f$ , а  $G$  – первообразная для  $g$ , то  $F + G$  есть первообразная для  $f + g$ :

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

## Пример

$f(x) = x^3 + 1/x^2$ , найти  $F(x)$

$$(x^3)' = x^4/4$$

$$(1/x^2)' = -1/x, \Rightarrow$$

$$F(x) = x^4/4 - 1/x + C$$





## Правило 2

Если  $F$  есть первообразная для  $f$ , а  $k$  - постоянная, то функция  $kF$  – первообразная для  $kf$ :

$$(kF)' = kF' = kf$$

## Пример

$f(x) = 5\cos x$ , найти  $F(x)$

$$(\cos x)' = \sin x, \Rightarrow$$

$$F(x) = 5\sin x + C$$



## Правило 3

Если  $F(x)$  есть первообразная для  $f(x)$ , а  $k$  и  $b$  – постоянные, причем  $k \neq 0$ , то  $1/k * F(kx + b)$  есть первообразная для  $f(kx + b)$ :

$$(1/k * F(kx + b))' = 1/k * F'(kx + b) * k = f(kx + b)$$

### Пример

$f(x) = 1/(7 - 3x)^5$ , найти  $F(x)$

$$(1/x^5)' = -1/4x^4$$

$$F(x) = -1/3 * (-1)/4(7 - 3x)^4 = 1/12(7 - 3x)^4$$

$$F(x) = 1/12(7 - 3x)^4 + C$$

