

# Подключение индуктивной катушки к источнику постоянной ЭДС

В электротехнической практике часто приходится иметь дело с переходными процессами в цепях, состоящих из элементов, обладающих параметрами  $R$  и  $L$ . Эти процессы происходят, например, при подключении к источнику постоянной ЭДС обмоток электромагнитов, реле, электрических машин постоянного тока и других электромагнитных устройств.

Рассмотрим переходный процесс в индуктивной катушке, имеющей индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ , после подключения ее к источнику постоянной ЭДС  $E$  (рис. 4.9). После коммутации ток в цепи будет увеличиваться от нуля до предельного значения, равного установившемуся току  $i_y = E/R$ . Энергия магнитного поля катушки  $W_M$  при этом также возрастает и переходный процесс в рассматриваемой цепи связан с накоплением энергии  $W_M = \frac{Li^2}{2}$ .

Уравнение электрического состояния цепи рис. 4.9 после замыкания выключателя имеет вид

$$L \frac{di_{\text{пер}}}{dt} + Ri_{\text{пер}} = E. \quad (4.17)$$

Для свободного тока справедливо уравнение

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{R}{L} i_{\text{св}} = 0 \quad (4.18)$$

с общим решением

$$i_{\text{св}} = A e^{-\frac{R}{L} t} = A e^{-t/\tau}, \quad (4.19)$$

где  $\tau = L/R$  – постоянная времени.

Переходный ток в цепи определяется суммой установившегося и свободного токов:

$$i_{\text{пер}} = i_{\text{у}} + i_{\text{св}} = \frac{E}{R} + A e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (4.20)$$

Для определения коэффициента  $A$  воспользуемся первым законом коммутации. До замыкания выключателя ток в индуктивной катушке был равен нулю, следовательно, в первый момент после замыкания выключателя ток будет также равен нулю:

$$i(0+) = \frac{E}{R} + A = 0. \quad (4.21)$$

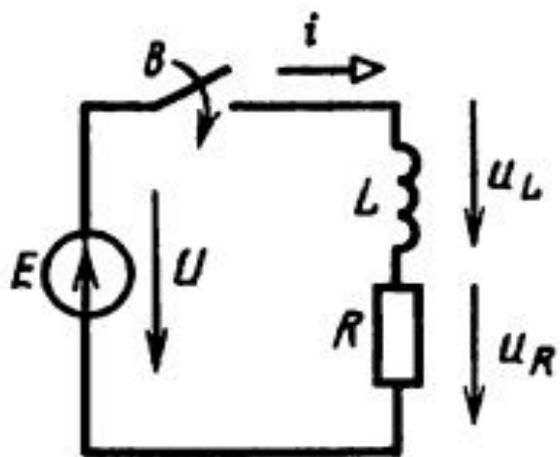


Рис. 4.9. Схема подключения индуктивной катушки к источнику ЭДС

Отсюда  $A = -E/R$ , поэтому выражение (4.20) можно представить в виде

$$i_{\text{пер}} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right), \quad (4.22)$$

т. е. ток в цепи нарастает до установившегося значения  $E/R$  по экспоненциальному закону с постоянной времени  $\tau = L/R$ . Чем меньше сопротивление  $R$ , тем больше предельное значение тока в цепи и тем больше энергия, которая должна быть накоплена в магнитном поле катушки.

Увеличению индуктивности соответствует также возрастание энергии магнитного поля катушки  $W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2}$ . При уменьшении  $R$  и увеличении  $L$  возрастает время накопления энергии в этом поле, т. е. постоянная времени  $\tau = L/R$ .

На рис. 4.10 изображены кривые изменения переходного тока в рассматриваемой цепи при различных значениях  $R$  и  $L$ .

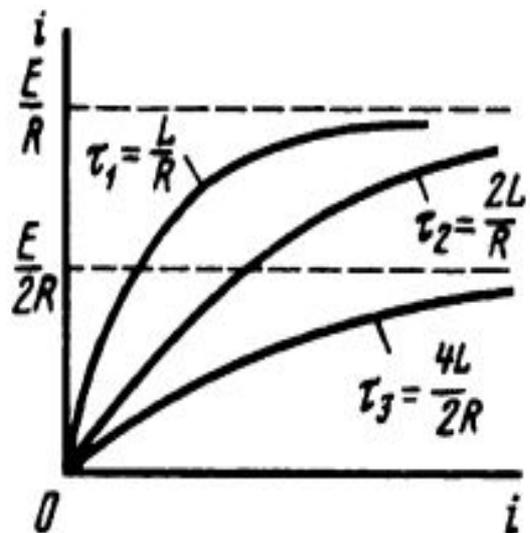


Рис. 4.10. Временные зависимости переходного тока при различных значениях  $R$  и  $L$

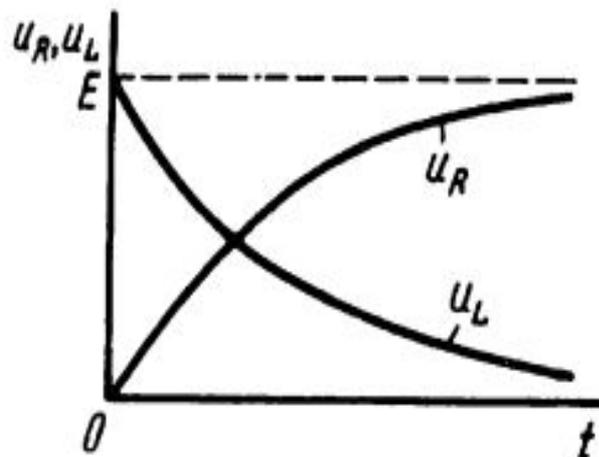


Рис. 4.11. Временные зависимости напряжений на резистивном и индуктивном элементах

Графики изменений во времени напряжений на резистивном и индуктивном элементах приведены на рис. 4.11.

При подключении к источнику постоянной ЭДС  $E$  индуктивной катушки, схема замещения которой состоит из последовательно соединенных резистивного и индуктивного элементов (см. рис. 4.9), напряжения на этих элементах изменяются следующим образом. Напряжение на резистивном элементе сопротивлением  $R$  пропорционально току:

$$u_R = Ri = E \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (4.23)$$

Напряжение на индуктивном элементе индуктивностью  $L$

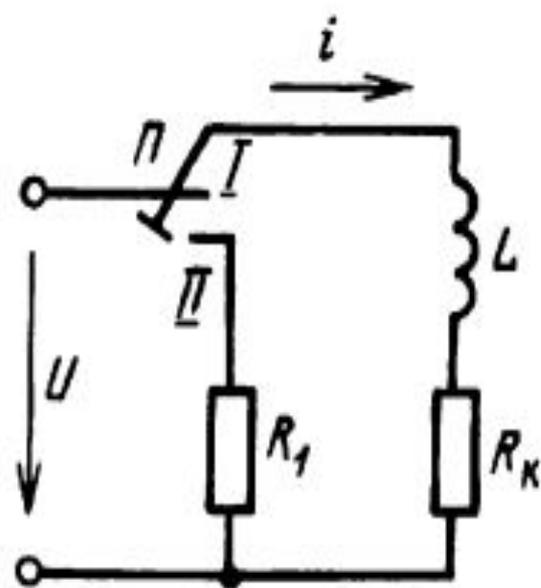
$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}. \quad (4.24)$$

# Отключение катушки индуктивности от источника постоянного напряжения и замыкание ее на резистор

Рассмотрим электрическую цепь, приведенную на рис. 4.13. До переключения переключателя  $\Pi$  ток в индуктивной катушке с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  определяется напряжением на зажимах цепи и сопротивлением индуктивной катушки. В случае источника постоянного напряжения  $U$  этот ток равен

$$I_0 = U/R_k. \quad (4.25)$$

Рис. 4.13. Схема отключения индуктивной катушки от источника постоянного напряжения и замыкания ее на резистор



После мгновенного переключения переключателя  $\Pi$  ток в индуктивной катушке в первый момент времени остается неизменным. Он замыкается через резистор  $R_1$ , поэтому ток в нем в момент коммутации изменяется скачком и становится равным  $I_0$ .

После коммутации электрическое состояние цепи, состоящей из индуктивной катушки и резистора  $R_1$ , описывается уравнением

$$L \frac{di_{\text{пер}}}{dt} + (R_{\text{к}} + R_1) i_{\text{пер}} = 0. \quad (4.26)$$

Отсутствие правой части в этом уравнении означает, что переходный ток равен свободному, а установившийся – нулю. Решением уравнения (4.26) является выражение

$$i_{\text{пер}} = i_{\text{св}} = A e^{-t/\tau} = A e^{-\frac{R_{\text{к}} + R_1}{L} t}. \quad (4.27)$$

Поскольку до коммутации  $i(0-1) = I_0$ , то  $A = I_0$  и выражение для переходного тока имеет вид

$$i_{\text{пер}} = I_0 e^{-\frac{R_{\text{к}} + R_1}{L} t}. \quad (4.28)$$

Если резистор имеет большее сопротивление, чем индуктивная катушка, то напряжение на нем в начальный момент после коммутации будет больше приложенного напряжения. Так, если  $R_1 = nR_{\text{к}}$ , то напряжение на резисторе

$$U_{R_1}(0+) = R_1 I_0 = nU_0. \quad (4.29)$$

Это обстоятельство следует иметь в виду при размыкании цепей, содержащих элементы, обладающие индуктивностью, так как при этом могут возникнуть перенапряжения, которые могут вывести из строя аппаратуру, не рассчитанную на такие напряжения.

При отсутствии в цепи резистора  $R_1$ , включенного параллельно индуктивной катушке, отключение ее от источника напряжения может сопровождаться возникновением дуги между контактами, разрывающими цепь. Появление дуги в этом случае объясняется следующим образом. После образования изоляционного промежутка между контактами ток в катушке не может скачком снизиться до нуля в соответствии с первым законом коммутации. Однако уменьшение тока в катушке вызывает наведение ЭДС самоиндукции и повышение напряжения в ее витках. При этом энергия магнитного поля преобразуется в энергию электрического поля. Быстрый рост напряжения на катушке сопровождается соответствующим повышением напряжения на контактах, пока не произойдет электрический пробой изоляционного промежутка и не возникнет дуга, замыкающая катушку на источник напряжения. Если не принять специальных мер, то наличие дуги может привести к расплавлению контактов. Для устранения дуги контакты коммутирующего аппарата дополняют дугогасящим устройством, которое обеспечивает повышение давления в дуге и усиление ее охлаждения. При росте давления ухудшаются условия ионизации изоляционного промежутка из-за уменьшения скорости образования ионов, а при охлаждении дуги увеличивается скорость рекомбинации ионов. Обычно дуга гасится за десятые доли секунды.

# Подключение индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения

Пусть индуктивная катушка с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  (рис. 4.15) подключается к источнику синусоидального напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (4.30)$$

Дифференциальное уравнение для рассматриваемой цепи имеет вид

$$L \frac{di_{\text{пер}}}{dt} + Ri_{\text{пер}} = u. \quad (4.31)$$

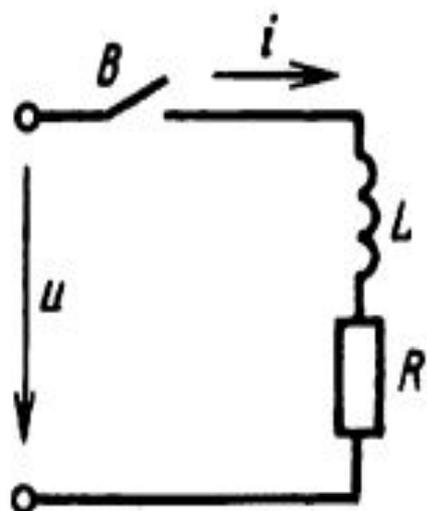


Рис. 4.15. Схема подключения индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения

Установившийся ток

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi), \quad (4.32)$$

$$\text{где } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}.$$

Уравнение для свободного тока

$$L \frac{di_{\text{св}}}{dt} + Ri_{\text{св}} = 0 \quad (4.31a)$$

и его общее решение

$$i_{\text{св}} = A e^{-\frac{R}{L} t} \quad (4.32a)$$

сохраняют тот же вид, что и для цепи с источником постоянного напряжения (4.18 и 4.19).

## Переходный ток в цепи

$$i_{\text{пер}} = i_y + i_{\text{св}} = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (4.33)$$

Постоянную интегрирования определяют из условия

$$i_{\text{пер}}(0+) = i_y(0+) + i_{\text{св}}(0+) = 0,$$

т. е.

$$I_m \sin(\psi_u - \varphi) + A = 0.$$

(отсюда

$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi),$$

$$i_{\text{св}} = -I_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t} \quad (4.34)$$

и

$$i_{\text{пер}} = i_y + i_{\text{св}} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (4.35)$$

На рис. 4.16 приведены графики зависимости от времени напряжения источника  $u$ , установившегося  $i_y$ , свободного  $i_{св}$  и переходного  $i_{пер}$  токов, построение согласно выражениям (4.30), (4.32), (4.34) и (4.35). Из анализа этих зависимостей видно, что начальное значение свободного тока зависит от момента включения, т. е. от начальной фазы напряжения источника  $\psi_u$ . Если  $\psi_u = \varphi = 0$ , то согласно (4.34)  $i_{св} = 0$ , следовательно, коммутация не повлечет за собой переходного процесса. Сразу же после включения переходный ток будет равен установившемуся току:

$$i_{пер} = i_y = I_m \sin \omega t.$$

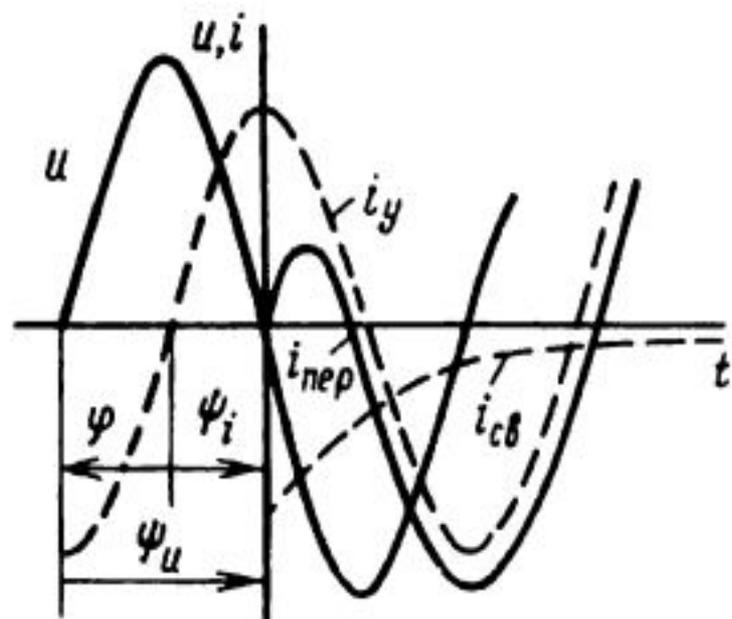


Рис. 4.16. Временные зависимости напряжения и тока в цепи при подключении индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения

При  $\psi_u - \varphi \neq 0$  возникает переходный режим, при котором в определенную часть периода установившийся и свободный токи имеют одинаковые знаки (см. рис. 4.16). В результате этого переходный ток в эту часть периода оказывается больше установившегося. Нетрудно видеть, что разница между  $i_{пер}$  и  $i_y$  зависит от начального значения и скорости затухания тока  $i_{св}$ . Начальное значение свободного тока будет максимально и равно  $I_m$  при условии  $\psi_i = \psi_u - \varphi = 90^\circ$ . Если постоянная времени  $\tau = L/R$  значительно больше периода напряжения источника, то свободный ток за половину периода установившегося тока не успеет существенно уменьшиться. Поэтому при неблагоприятных условиях коммутации ( $\psi_i = 90^\circ$ ) и большой постоянной времени максимальное значение переходного тока может почти в два раза превысить амплитуду установившегося тока  $I_m$ .

## Переходный процесс в цепи с последовательным соединением резистора, катушки индуктивности и конденсатора

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из трех последовательно соединенных элементов с параметрами  $L$ ,  $R$  и  $C$  при подключении источника постоянной ЭДС  $E$  (рис. 4.18). Электрическое состояние этой цепи в переходный режим описывается уравнением

$$L \frac{di_{\text{пер}}}{dt} + Ri_{\text{пер}} + \frac{1}{C} \int i_{\text{пер}} dt = E. \quad (4.36)$$

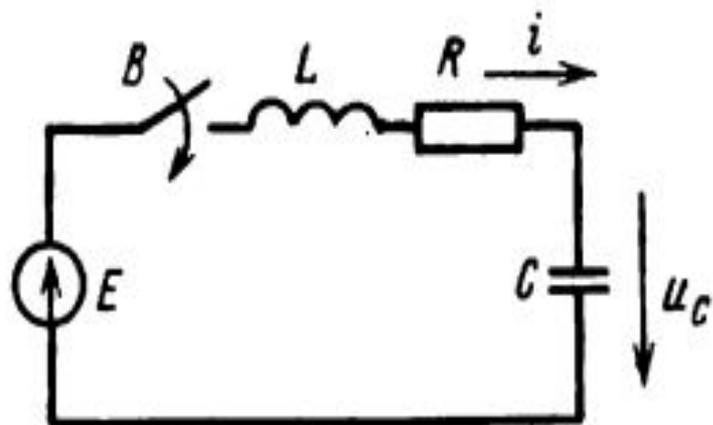


Рис. 4.18. Схема подключения цепи с последовательным соединением элементов к источнику постоянной ЭДС

Для удобства анализа преобразуем полученное уравнение для тока в дифференциальное уравнение второго порядка для напряжения конденсатора  $u_C$ , используя выражение  $i = C \frac{du_C}{dt}$ :

$$LC \frac{d^2 u_{C\text{пер}}}{dt^2} + RC \frac{du_{C\text{пер}}}{dt} + u_{C\text{пер}} = E. \quad (4.36a)$$

Переходное напряжение  $u_{C\text{пер}}$  может быть получено как сумма установившегося напряжения  $u_{C\text{уст}}$ , являющегося частным решением уравнения (4.36a) при  $t \rightarrow \infty$ , и свободного напряжения  $u_{C\text{св}}$ , являющегося общим решением однородного уравнения

$$LC \frac{d^2 u_{C\text{св}}}{dt^2} + RC \frac{du_{C\text{св}}}{dt} + u_{C\text{св}} = 0. \quad (4.37)$$

Частное решение уравнения (4.36а) при  $\frac{du_C}{dt} = 0$  (теоретически при  $t \rightarrow \infty$ ) равно ЭДС  $E$ , поэтому установившееся напряжение  $u_{C_y} = E$ , а установившийся ток  $i_y = 0$ .

Для нахождения свободного напряжения на конденсаторе  $u_{C_{св}}$  однородное уравнение (4.37) перепишем таким образом:

$$\frac{d^2 u_{C_{св}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{C_{св}}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{C_{св}} = 0. \quad (4.38)$$

Решение этого уравнения имеет вид

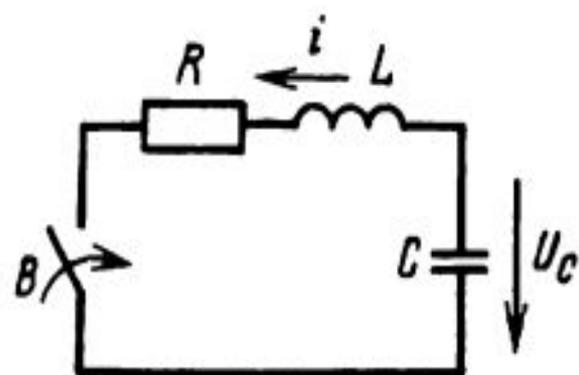
$$u_{C_{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (4.39)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные коэффициенты;  $p_1$  и  $p_2$  – корни характеристического уравнения, соответствующие уравнению (4.38):

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (4.40)$$

Однородные уравнения (4.37) и (4.38) описывают электрическое состояние цепи разрядки конденсатора, заряженного предварительно

Рис. 4.19. Схема цепи разрядки конденсатора на индуктивную катушку



до напряжения  $U_0$  на индуктивную катушку (рис. 4.19), так как в этом случае установившееся напряжение на конденсаторе  $u_{Cy} = 0$ , а переходное напряжение равному свободному напряжению:  $u_{Cпер} = u_{Cсв}$ . Рассмотрим переходный процесс разрядки конденсатора (см. рис. 4.19) и найдем для него переходные ток и напряжение. Постоянные коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  в уравнении (4.39) определяют, исходя из значений напряжений  $u_C$  и тока  $i$  в момент коммутации ( $t = 0$ ). Поскольку в соответствии со вторым законом коммутации напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, для цепи рис. 4.19 в первый момент после коммутации ( $t = 0+$ )

$$u_C(0+) = A_1 + A_2 = U_0. \quad (4.41)$$

Переходный ток при разрядке конденсатора на индуктивную катушку получим из уравнения (4.39), так как  $i_y = 0$ :

$$i_{пер} = i_{св} = C \frac{du_{Cсв}}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (4.42)$$

В соответствии с первым законом коммутации

$$i(0+) = C(A_1 p_1 + A_2 p_2) = 0. \quad (4.43)$$

Решая совместно уравнения (4.41) и (4.43), находим постоянные интегрирования:

$$A_1 = - \frac{U_0 p_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = \frac{U_0 p_1}{p_1 - p_2}. \quad (4.44)$$

Корни характеристического уравнения определяются выражениями

$$p_{1,2} = - \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (4.45)$$

В зависимости от соотношения параметров  $R$ ,  $L$  и  $C$  возможны три типа переходных процессов.

1. Если  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , т. е. сопротивление  $R$  в цепи относительно мало, то корни характеристического уравнения  $p_1$  и  $p_2$  являются сопряженно-комплексными:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \quad (4.46)$$

где  $\alpha = \frac{R}{2L}$  и  $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$ .

Подставляя в (4.39) значения  $p_1$  и  $p_2$  и проводя преобразования, связанные с заменой полусумм и полуразностей экспонент от мнимого аргумента  $j\beta$  тригонометрическими функциями, получим

$$u_{\text{Спер}} = u_{\text{Ссв}} = (A_1 + A_2) \frac{1}{\beta \sqrt{LC}} \cos(\beta t - \gamma) e^{-\alpha t}. \quad (4.47)$$

Здесь  $\gamma = \text{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$ , а  $A_1 + A_2 = U_0$  как следует из (4.41).

Выражение (4.47) описывает затухающие колебания с угловой частотой  $\beta$  и коэффициентом затухания  $\alpha$ . Выражение для переходного тока может быть получено из (4.47) на основании соотношения  $i_{\text{пер}} = C \frac{du_{C\text{пер}}}{dt}$ :

$$i_{\text{пер}} = \frac{U_0}{\beta L} \sin \beta t e^{-\alpha t}. \quad (4.48)$$

На рис. 4.20, *a* приведен график изменения во времени напряжения и тока при колебательном переходном процессе. Пунктиром показаны экспоненты, характеризующие убывание амплитуд напряжения  $u_{C\text{пер}}$  и тока  $i_{\text{пер}}$  при разрядке конденсатора на индуктивную катушку.

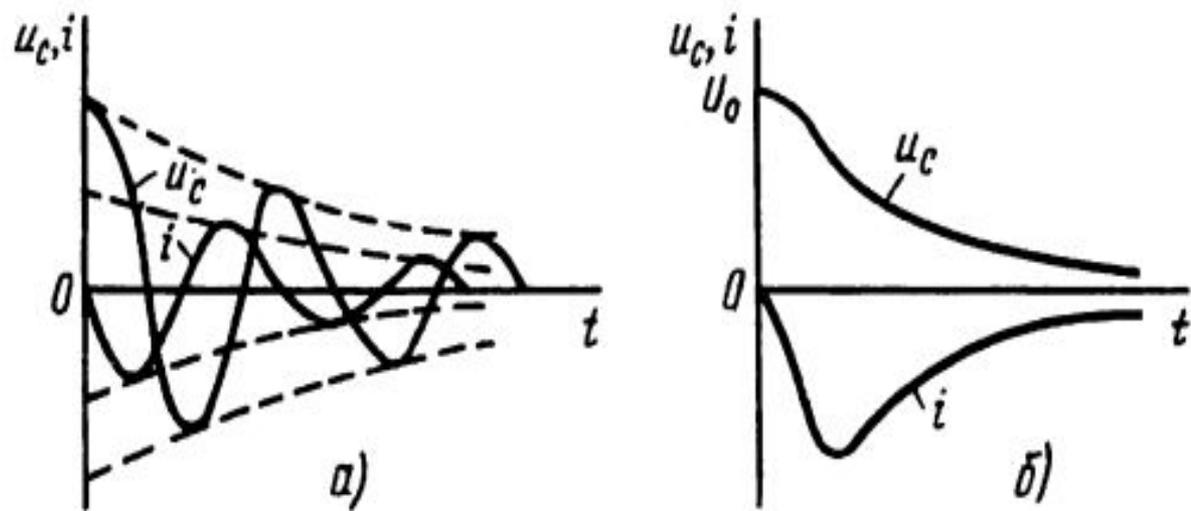


Рис. 4.20. Графики  $i(t)$  и  $u_C(t)$  при колебательном (а) и аperiodическом (б) процессах

2. Если  $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , т. е. сопротивление  $R$  в цепи относительно ве-

лико, то корни характеристического уравнения  $p_1$  и  $p_2$  являются вещественными, но разными по значению. Графики изменения  $u_{Cпер}$  и  $i_{пер}$  при разряде конденсатора на индуктивную катушку в этом случае (рис. 4.20, б) соответствуют экспоненциальному закону, т. е. переходный процесс имеет аperiodический характер.

3. Если  $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то корни характеристического уравнения (4.40)

одинаковы и вещественны ( $p_{1,2} = -\alpha$ ). Это соответствует предельному случаю аperiodического переходного процесса в рассматриваемой электрической цепи. Малейшее уменьшение значения  $R/L$  приводит к колебательному характеру переходного процесса.