Линейное диофантово уравнение и 4 способа его решения

- Правило 1. Если с не делится на d, то уравнение ах + ву = с не имеет решений в целых числах. Н.О.Д.(а,в) = d.

- Правило 2. Чтобы найти решение уравнения ах + ву = с при взаимно-простых а и в, нужно сначала найти решение (X_o ; y_o) уравнения ах + ву = 1; числа CX_o , Cy_o составляют решение уравнения ах + ву = с.

- Решить в целых числах (x,y) уравнение

$$5x - 8y = 19 \ldots (1)$$

Первый способ. Нахождение частного решения методом подбора и запись общего решения.

Знаем, что если Н.О.Д.(а;в) =1, т.е. а и в взаимно-простые числа, то уравнение (1)

имеет решение в целых числах х и у. Н.О.Д.(5;8) =1. Методом подбора находим частное решение: $X_o = 7$; $y_o = 2$.

Итак, пара чисел (7;2) - частное решение уравнения (1).

Значит, выполняется равенство: 5 х 7 – 8 х 2 = 19 … (2)

Вопрос: Как имея одно решение записать все остальные решения?

Вычтем из уравнения (1) равенство (2) и получим: 5(х -7) – 8(у - 2) =0.

Отсюда $x - 7 = \frac{8(y-2)}{5}$. Из полученного равенства видно, что число (х – 7) будет целым тогда и только тогда, когда (у – 2) делится на 5, т.е. у – 2 = 5n, где n какое-нибудь целое число. Итак, у = 2 + 5n, х = 7 + 8n, где $n \in Z$.

Тем самым все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x = 7 + 8n, \\ y = 2 + 5n. \end{cases} n \in Z.$$

Второй способ. Решение уравнения относительно одного неизвестного.

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором наименьший (по модулю) коэффициент. $5x - 8y = 19$ $\Leftrightarrow 5x = 8y + 19 \Leftrightarrow x = \frac{8y+19}{5}$.

Остатки при делении на 5: 0,1,2,3,4. Подставим вместо y эти числа.

Если $y = 0$, то $x = \frac{8 \times 0+19}{5} = \frac{19}{5}$.

Если $y = 1$, то $x = \frac{8 \times 1+19}{5} = \frac{27}{5}$.

Если $y = 2$, то $x = \frac{8 \times 2+19}{5} = \frac{35}{5} = 7 \in Z$.

Если $y = 3$, то $x = \frac{8 \times 3+19}{5} = \frac{43}{5}$.

Если $y = 4$ то $x = \frac{8 \times 4+19}{5} = \frac{51}{5}$.

Итак, частным решением является пара (7;2).

Тогда общее решение: $\begin{cases} x = 7 + 8n, \\ y = 2 + 5n. \end{cases} n \in Z$.

Третий способ. Универсальный способ поиска частного решения.

Для решения применим алгоритм Евклида. Мы знаем, что для любых двух натуральных чисел а, в, таких, что Н.О.Д.(а,в) = 1 существуют целые числа х,у такие, что ах + ву = 1.

План решения:

1. Сначала решим уравнение 5m – 8n = 1 используя алгоритм Евклида.

2. Затем найдем частное решение уравнения (1)по правилу 2.

3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1. Найдем представление: $1 = 5m - 8n$. Для этого используем алгоритм Евклида.

$8 = 5 \times 1 + 3.$

$5 = 3 \times 1 + 2.$

$3 = 2 \times 1 + 1.$

Из этого равенства выразим 1. $1 = 3 - 2 \times 1 = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 =$

$= 3 - 5 \times 1 + 3 \times 1 = 3 \times 2 - 5 \times 1 = (8 - 5 \times 1) \times 2 - 5 \times 1 = 8 \times 2 - 5 \times 2$
$-5 \times 1 =$

$= 5 \times (-3) - 8 \times (-2)$. Итак, $m = -3$, $n = -2$.

2. Частное решение уравнения (1): $X_o = 19m$; $y_o = 19n$.

Отсюда получим: $X_o = 19 \times (-3) = -57$; $y_o = 19 \times (-2) = -38$.

Пара (-57; -38)- частное решение (1).

3. Общее решение уравнения (1): $\begin{cases} x = -57 + 8n, \\ y = -38 + 5n. \end{cases}$ $n \in Z$.

Четвертый способ. Геометрический.

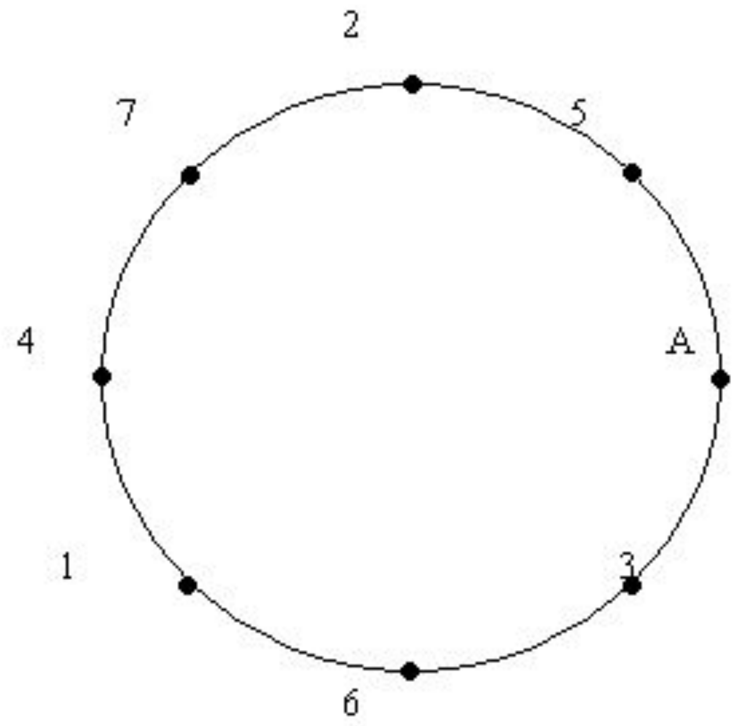
План решения.

1. Решим уравнение $5x - 8y = 1$ геометрически.

2. Запишем частное решение уравнения (1).

3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1



Отложим на окружности последовательно друг за другом равные дуги, составляющие

$\frac{5}{8}$ -ю часть полной окружности. За 8 шагов получим все вершины правильного вписанного в окружность 8-угольника. При этом сделаем 5 полных оборотов.

На 5 – ом шаге получили вершину, соседнюю с начальной, при этом сделали 3 полных оборота и еще прошли $\frac{1}{8}$ - ю часть окружности, так что $x \times \frac{5}{8} = y + \frac{1}{8}$.

Итак, $X_o = 5$, $y_o = 3$ является частным решением уравнения $5x – 8y = 1$.

2. Частное решение уравнения (1): $X_o = 19 \times 5 = 95$; $y_o = 19 \times 3 = 57$.

3. Общее решение уравнения (1): $\begin{cases} x = 95 + 8n, \\ y = 57 + 5n. \end{cases}$ $n \in Z$.