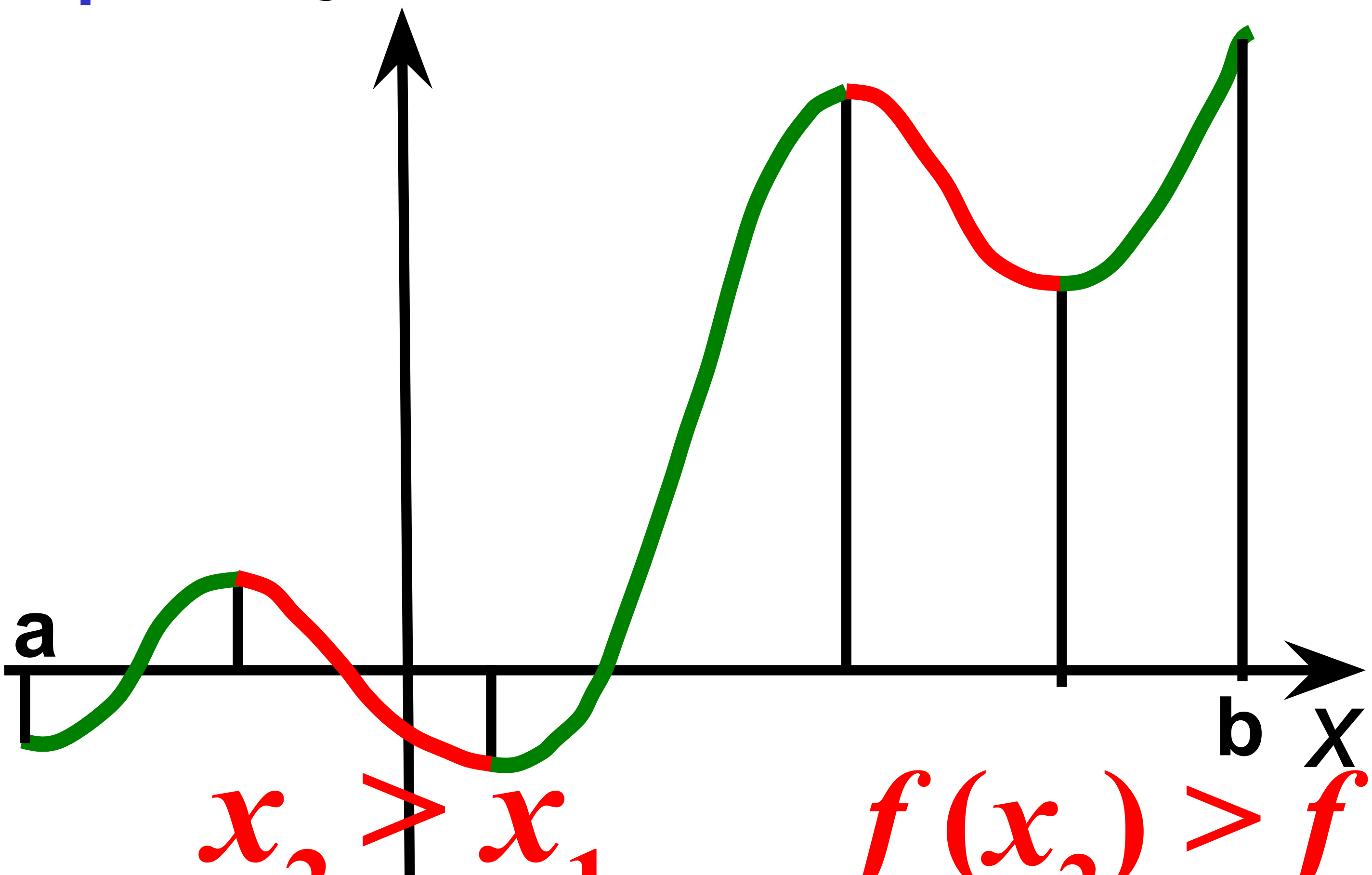
Тема 3/1. Монотонность и экстремумы функции.

1. Возрастание и убывание функций. Признаки монотонности.

2. Точки экстремума. Необходимое условие экстремумов.

3. Достаточное условие экстремума.

1. **Возрастание и убывание функций. Признаки монотонности.**



$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Признак возрастания функции.

Для того, чтобы функция *y=f(x)* возрастала на промежутке, необходимо и достаточно, чтобы производная функции была положительной на этом промежутке.

$$f(x) \nearrow \iff f'(x) > 0$$

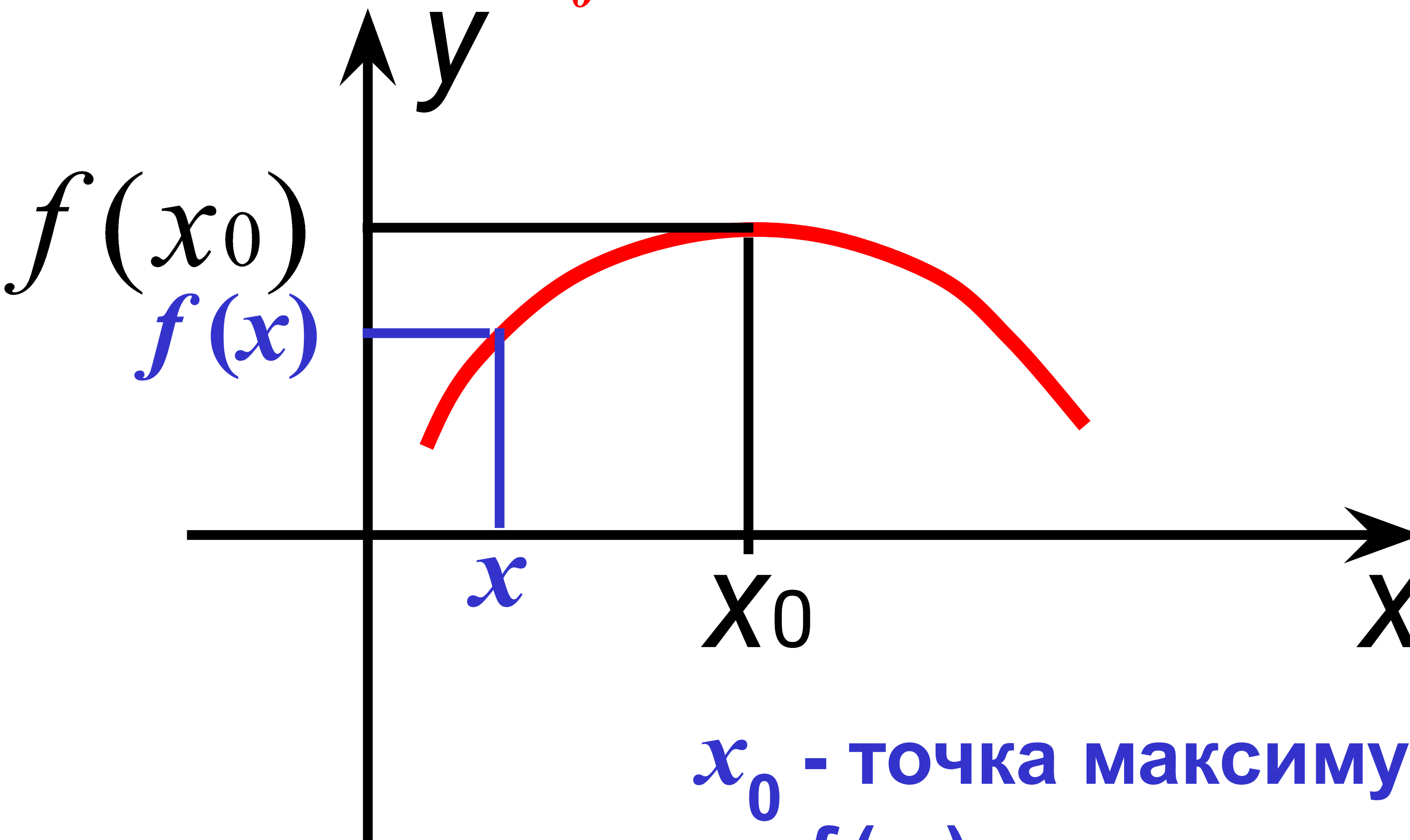
Признак убывания функции.

Для того , чтобы функция *y=f(x)* убывала на промежутке, необходимо и достаточно, чтобы производная функции была отрицательной на этом промежутке.

$$f(x) \searrow \iff f'(x) < 0$$

2. Точки экстремума. Необходимое условие экстремумов

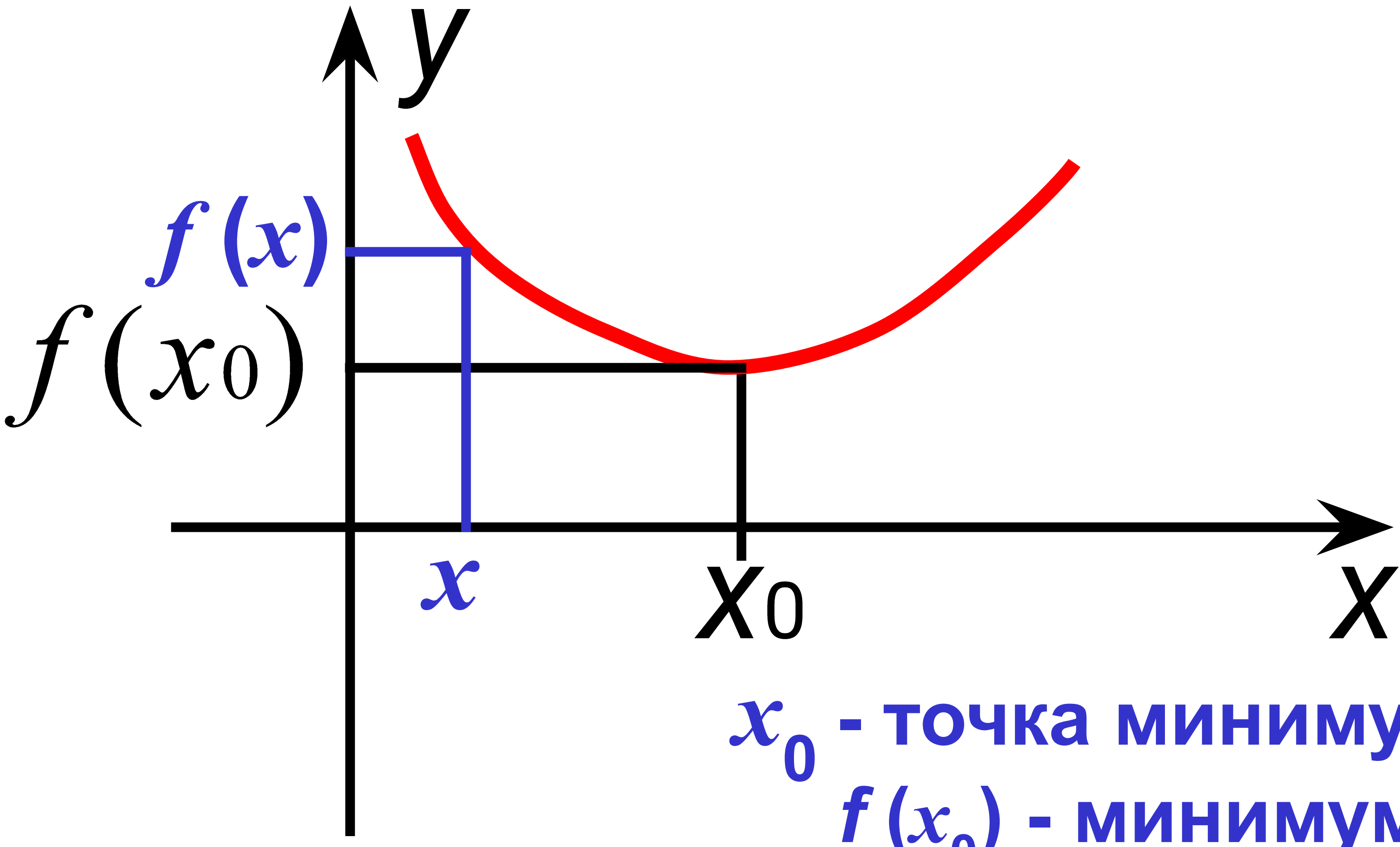
Определение. Точка x_0 называется точкой максимума(*max*), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$.



x_0 - точка максимума,
$f(x_0)$ - максимум

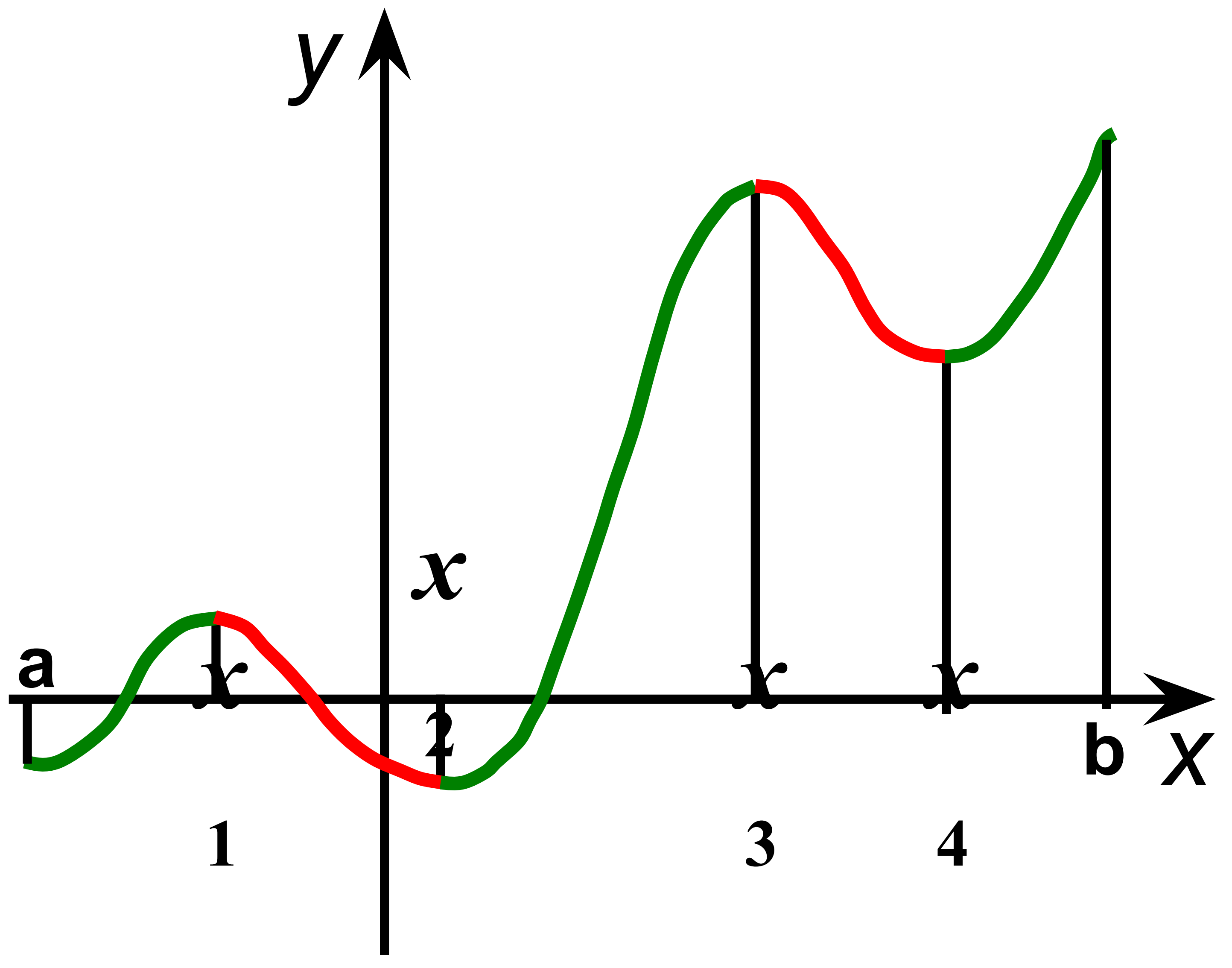
Определение. Точка x_0 называется точкой минимума(*min*), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x_0) < f(x).$$



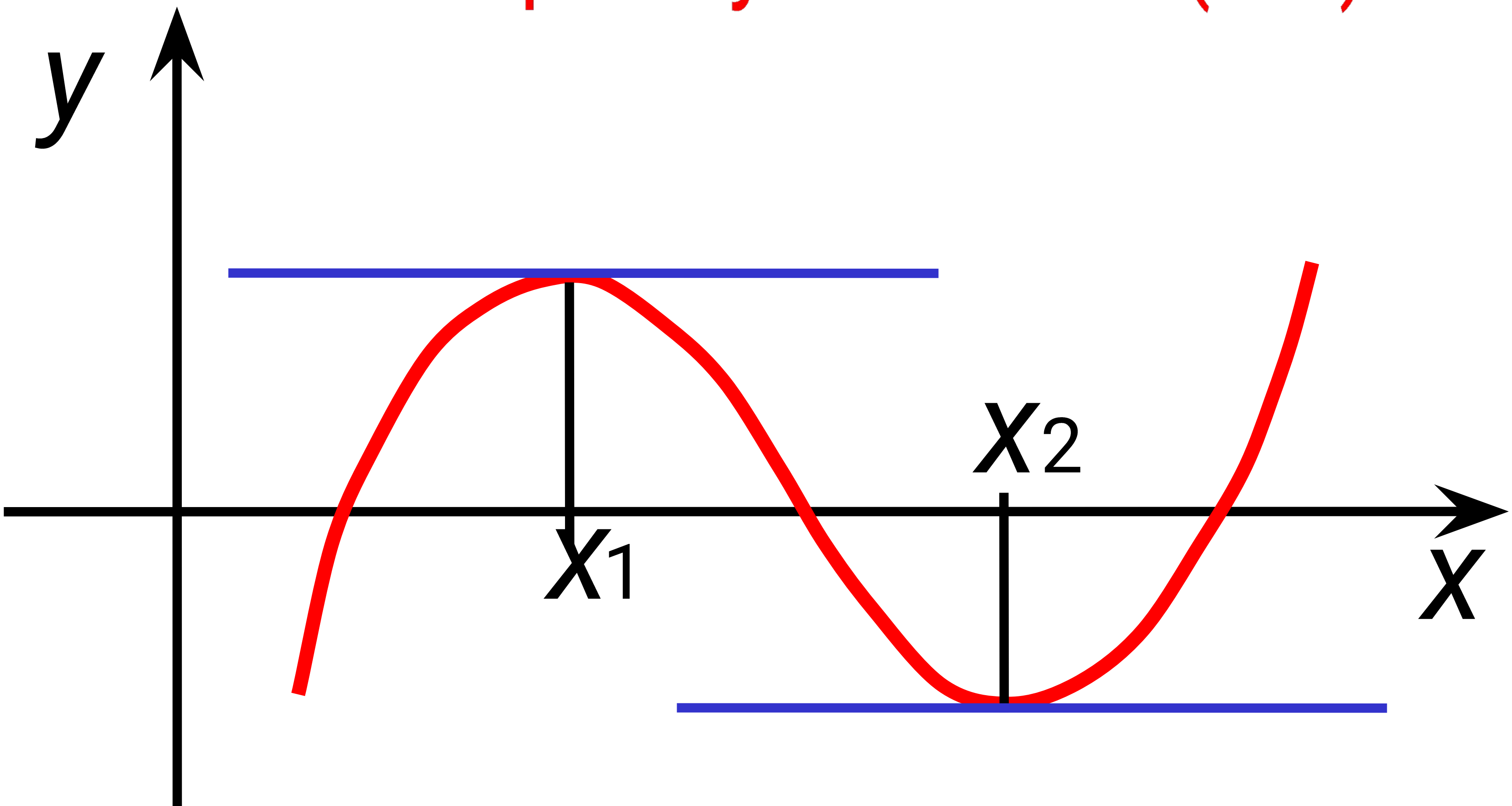
x_0 - точка минимума,

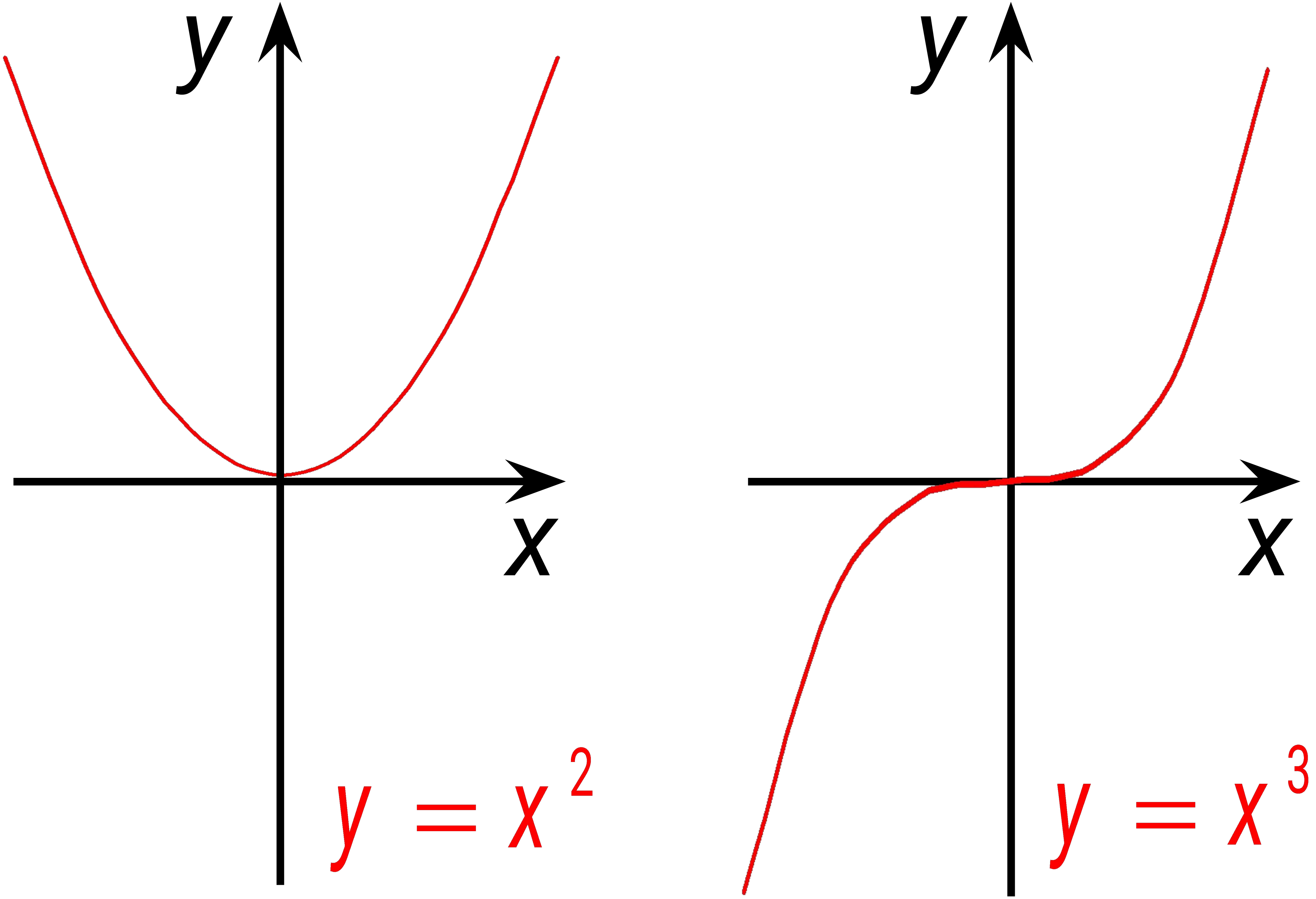
$f(x_0)$ - минимум


y
x
2
a
x
1
x
3
x
4
b
x

Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). **Если x_0-точка экстремума функции и в ней существует производная, то она в этой точке равна 0.**

$$x_0 - \text{экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$



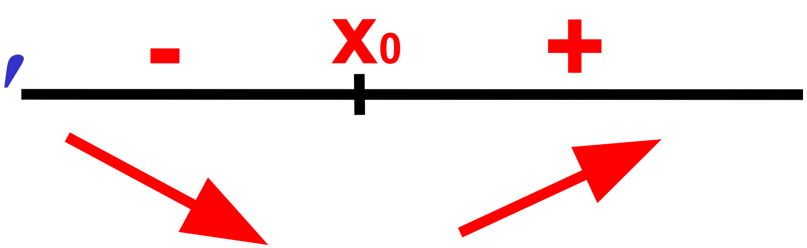

y
x
$y = x^2$
y
x
$y = x^3$

3. Достаточное условие экстремума функции.

Теорема (1-е достаточное условие существования экстремума).

Пусть *x_0* - критическая точка функции *$y=f(x)$* (т.е. $f'(x_0)=0$ или не существует). Если производная при переходе через *x_0* меняет знак, то *x_0* является точкой экстремума.

f' , то x_0 – т. max

f' 

, то x_0 – т. min

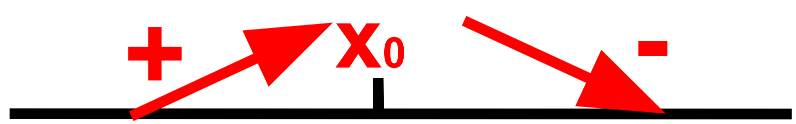


Схема исследования функции на монотонность и экстремумы.

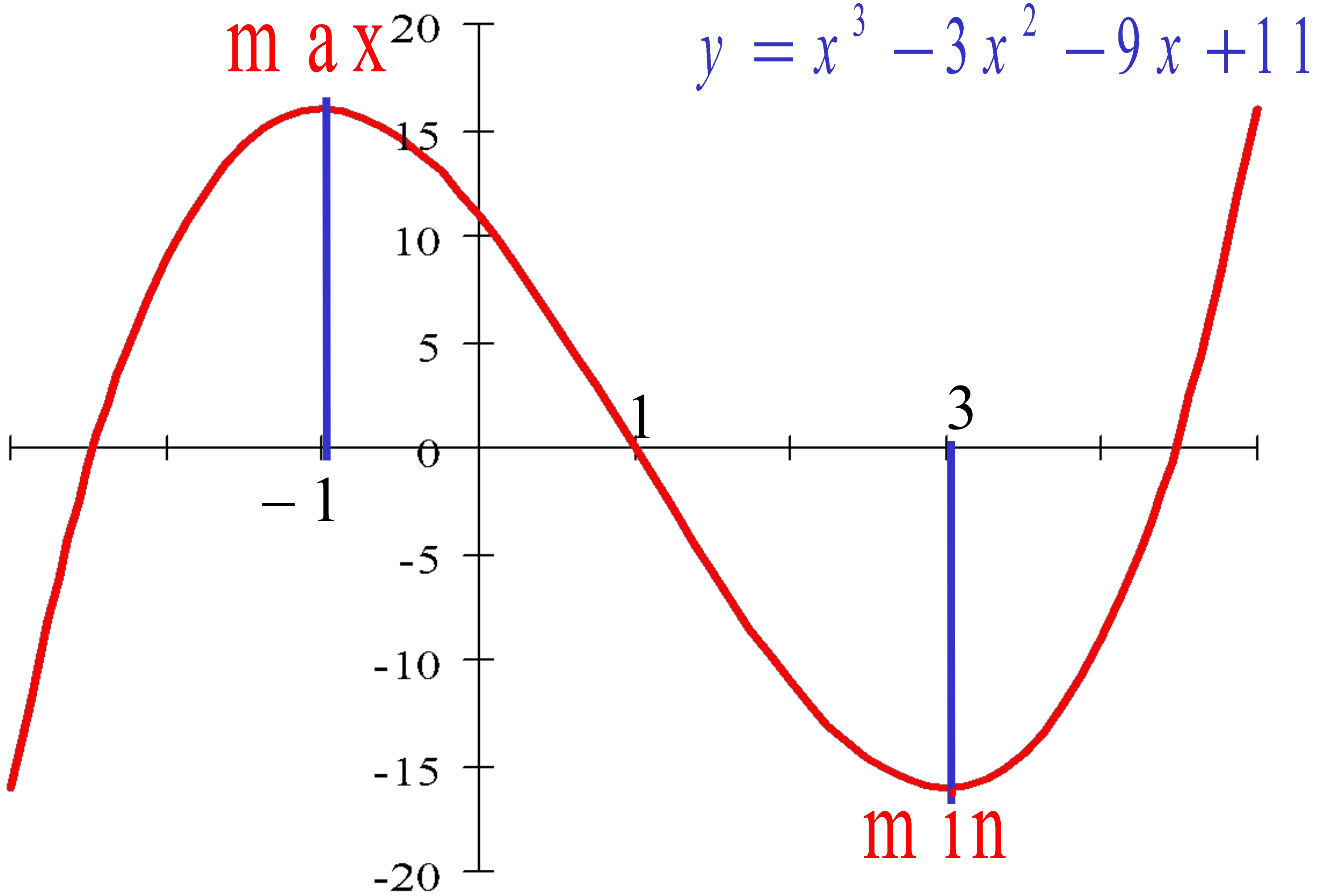
1. Найти $f'(x)$
2. Найти критические точки 1-го рода. (т.е. решить уравнение $f'(x) = 0$)
3. Установить знаки производной при переходе через критические точки и определить точки экстремума.
4. Найти значения функции в точках экстремума.

Пример. **Исследовать функцию**

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$$

на монотонность, точки экстремума.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	Max 16	$\searrow$	Min -16	$\nearrow$



max
min
$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-1
1
3

Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.

Теорема (2-е достаточное условие существования экстремума).

Пусть x_0 - критическая точка функции, т.е. $f'(x_0)=0$ или не существует.

Если вторая производная функции в точке x_0 положительна , то x_0 - точка минимума.

$$f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0 - т.\min$$

Если вторая производная функции в точке x_0 отрицательна, то x_0 - точка максимума.

$$f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0 - т.\max$$

Пример **Функцию** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ **исследовать на точки экстремума по 2-му достаточному условию.**

$$1)\quad y' = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

Задание на самоподготовку:

Дана функция $y = x^3 - 12x + 4$

1) исследовать функцию на монотонность и экстремумы (2-мя способами)