

# Физика плазмы

*Александр Владимирович Бурдаков*

*ИЯФ СО РАН, т.39-46-02*

Спецкурс для магистрантов НГУ

## **Программа и вопросы**

**1. Понятие плазмы.** Энергетическая единица измерения температуры-эВ. Квазинейтральность.

**Дебаевская экранировка.** Радиус Дебая. Потенциал пробной частицы в плазме.

Сравнение с кулоновским потенциалом.

**Плазменные колебания.** Характерный временной масштаб разделения зарядов. Плазменная частота.

**Классическая и вырожденная плазма. Идеальная и неидеальная плазма.**

Число частиц в дебаевской сфере. Влияние этого параметра на свойства плазмы.

**Сравнение свойств плазмы, газа, твердого тела.**

**Характерные параметры лабораторной и космической плазмы.**

**2. Элементарные процессы в плазме.** Ионизация и рекомбинация, основные процессы.

Корональное равновесие. Перезарядка, применение для диагностики и нагрева плазмы.

**Степень ионизации. Формула Саха.** Термодинамическое равновесие, ЛТР.

Зависимость степени ионизации от параметров плазмы, от потенциала ионизации.

**3. Столкновения частиц в плазме. Кулоновский логарифм.** Транспортное (кулоновское) сечение,

зависимость от энергии и заряда. Сила на неподвижный рассеивающий центр.

Кулоновский логарифм для плазмы и газа. Траектории частиц в плазме и газе.

**Излучение из плазмы.** Тормозное и рекомбинационное: характерные

зависимости от параметров плазмы, спектр (максимум в зависимости от температуры, ширина).

Линейчатое: интенсивность линии, отношение интенсивностей линий; доплеровское уширение,

штарковское расщепление, использование этих эффектов в диагностике плазмы.

Циклотронное излучение: частота, запираение излучения, интенсивность излучения черного тела.

### **3. Релаксация импульса и энергии частиц в плазме.**

Характерное время потери направленного импульса для холодной и горячей плазмы, отличия в зависимости от скорости частицы. Сравнение времен релаксации электронной компоненты, ионной компоненты и времени выравнивания электронной и ионной температур. Проводимость плазмы, поле Драйзера, убегающие электроны.

### **4. Теоретические модели, используемые при исследовании плазмы.**

#### **Кинетическое уравнение с самосогласованным полем.**

Функция распределения, выражение параметров плазмы через нее.

Физический смысл кинетического уравнения. Коэффициенты электропроводности и теплопроводности плазмы, их зависимость от температуры (плотности).

### **5. Магнитная гидродинамика. МГД-приближение. Макроскопические характеристики плазмы.**

Одножидкостая МГД, уравнения непрерывности, движения, теплопереноса, сокращенные уравнения Максвелла. Вмороженность силовых линий магнитного поля.

### **6. Волны в плазме. МГД-волны, альфвеновская волна. Звуковые волны.**

#### **7. Ленгмюровская волна. Затухание Ландау.**

Электромагнитные электронные волны. Прохождение электромагнитной волны через плазму: зависимость показателя преломления от частоты, критическая плотность, интерферометрия плазмы. Понятие о плазменных неустойчивостях.

### **8. Движение частиц в магнитных полях. Циклотронный резонанс. Дрейфовое движение.**

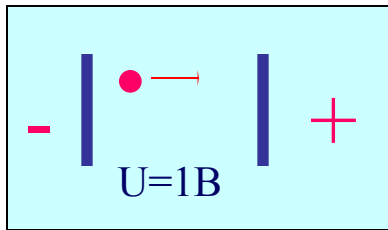
Электрический, центробежный и градиентный дрейф. адиабатические инварианты.

Дрейфовое движение в тороиде. Движение заряженной частицы в открытой ловушке

9. **Управляемый термоядерный синтез.** Проблемы энергетики. Радиационная опасность. Основы термоядерного синтеза. Энергия связи. Сечения реакций. Критерий Лоусона.
10. **Инерциальное удержание.** Термоядерная бомба. Лазерные системы. Быстрый поджиг. Сжатие рентгеновским излучением.
11. **Магнитное удержание.** Замкнутые системы. Токамак. Стелларатор. МГД неустойчивость. Перспективы систем с магнитным удержанием. Пинч. Тета-пинч.
12. **Открытые магнитные ловушки.** Пробкотрон. Неустойчивости. Тандем. Термобарьер. Амбиполярная ловушка. Газодинамическая ловушка. Многопробочная ловушка.
13. **Низкотемпературная плазма и плазменный разряд.** Понятие о Таундсеновской теории пробоя. Кривая Пашена.
14. **Плазменные технологии.** Принцип работы плазменного дисплея, плазменного двигателя.
15. **Плазма в космосе**

# Система единиц-СГС

Единица измерения 1 эВ



$$eU = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow kT$$

$$eU [\text{Дж}] \Rightarrow [\text{эВ}]$$

$$kT [\text{Дж}] \Rightarrow T [\text{эВ}]$$

$$1 \text{ эВ} \sim 10^4 \text{ К}$$

## Определения:

Плотность:  $n$  — число электронов в единице объема

Температура:  $T$  — температура плазмы  
в энергетических единицах

$m$  — масса электрона     $p$  — импульс электронов     $\hbar$  — постоянная Планка

## Классическая и вырожденная плазма.

«Квантовый» масштаб-  
длина волны Де-Бройля

$$\lambda_{d-B} \sim \frac{\hbar}{p} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{mT}}$$

«Плазменный» масштаб-  
расстояние между частицами

$$\lambda_n \sim n^{-1/3}$$

Классическая плазма:  $\lambda_n \gg \lambda_{d-B}$

**Классическая плазма:**  $\lambda_n \gg \lambda_{d-B}$ , и частицы можно рассматривать как точечные заряды.

**Вырожденная плазма:**  $\lambda_n \lesssim \lambda_{d-B}$ , и существенны квантовомеханические эффекты.

**Граница между режимами:**  $\lambda_n \sim \lambda_{d-B}$ ,

$$T \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m}$$

## Идеальная и неидеальная плазма.

Идеальная плазма:

$$W_E \ll W_k.$$



энергия кулоновского  
взаимодействия частиц

кинетическая энергия  
частиц

**Идеальная**

$$W_k \sim T, \quad W_E \sim \frac{e^2}{\lambda_n},$$

$$T \gg e^2 n^{1/3}$$

**неидеальная плазма.**

Плазменные электроны  
-это Ферми-газ

$$W_k \sim \frac{p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \sim W_F,$$

$W_F$  — энергия Ферми

$$n \gg \left( \frac{me^2}{\hbar^2} \right)^3$$



На каком масштабе сохраняется квазинейтральность плазмы?

$$\text{div}E = 4\pi\rho$$

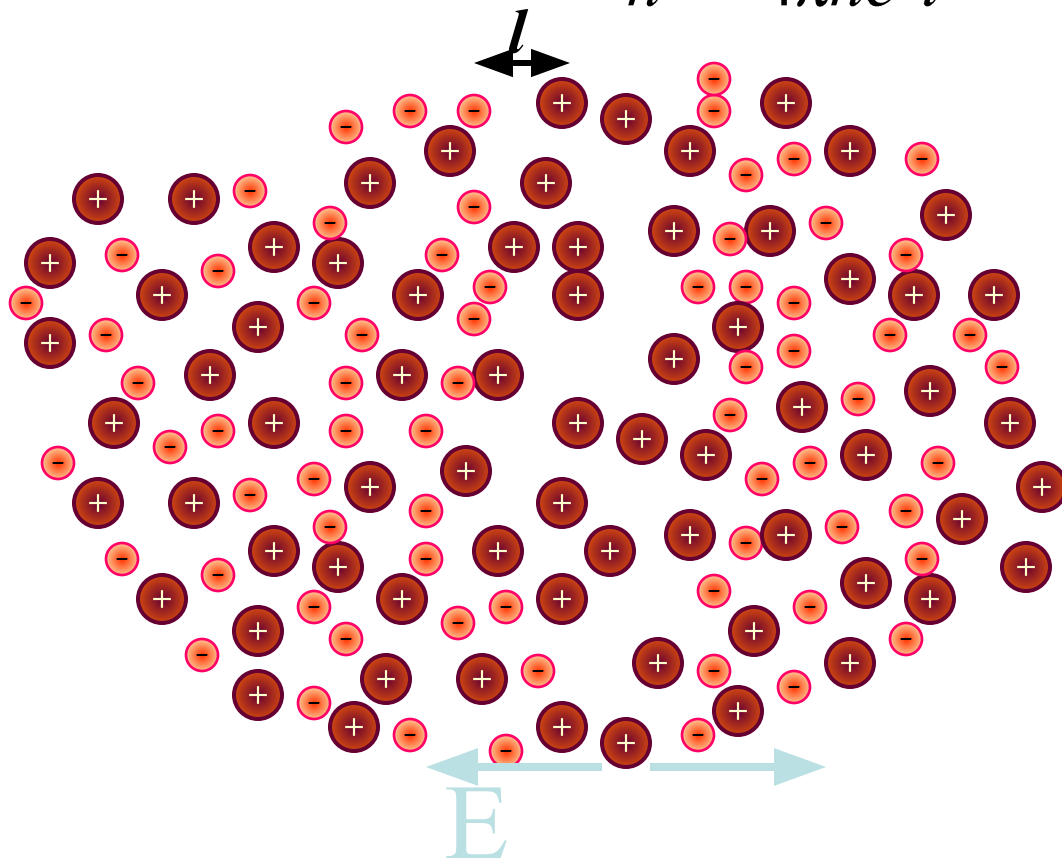
$$\rightarrow \frac{\delta E}{l} \approx 4\pi e\delta n \approx \frac{\delta\varphi}{l^2}$$

$$e\delta\varphi \approx T$$

$$4\pi e^2\delta n \approx \frac{e\delta\varphi}{l^2} \approx \frac{T}{l^2} \rightarrow \frac{\delta n}{n} \approx \frac{T}{4\pi n e^2 l^2} = \frac{r_D^2}{l^2}$$

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}$$

Дебаевский  
радиус



$$r_D [\text{cm}] = 740 \sqrt{\frac{T [\text{эВ}]}{n [\text{cm}^{-3}]}}$$

Макроскопическое отклонение от квазинейтральности ведет к появлению электрического поля.

Для плоского слоя плазмы:  $\delta x$  -смещение электронов

$$m\ddot{\delta x} = -eE_x = -4\pi ne^2\delta x$$

Ленгмюровские колебания

Плазменная частота  $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$

$$\omega_p [\text{с}^{-1}] = 5,6 \cdot 10^4 \sqrt{n [\text{см}^{-3}]}$$

## Дебаевская экранировка

Найдем потенциал  $\varphi$ , создаваемый в плазме маленьким неподвижным точечным зарядом  $q$ . Пусть ионы — однозарядные, тогда

$$\Delta\varphi = 4\pi e (n_e - n_i) \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi e \delta n.$$

$n_i, n_e$  — число ионов и электронов в единице объема,  $\Delta$  — лапласиан

В равновесии  $n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{T_e}\right), \quad n_i \approx n_0 \left(1 - \frac{e\varphi}{T_i}\right),$

$$\delta n = n_0 e\varphi \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right), \quad \begin{array}{l} T_i, T_e \text{ — температуры ионов и электронов} \\ n_0 \text{ — невозмущенная плотность электронов и ионов} \end{array}$$

откуда

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - 4\pi n_0 e^2 \varphi \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right) = 0.$$

Ищем решение  $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \varphi \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{q}{r} \quad \left(\text{через } \varphi = \frac{f(r)}{r}\right):$

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}$$

$$r_D = \left[4\pi n_0 e^2 \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right)\right]^{-1/2}$$

$r_D$  — радиус Дебая.

Уравнение  
Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

## Параметр неидеальности плазмы

Найдем энергию взаимодействия частиц между собой в двухкомпонентной плазме с однозарядными ионами. В среднем, потенциал вокруг каждой частицы равен

$$\frac{q}{r} e^{-r/r_D} = \frac{q}{r} + \text{потенциал экранирующих частиц плазмы.}$$

Потенциал экранирующих частиц

$$\varphi_{pl} = \frac{q}{r} \left( e^{-r/r_D} - 1 \right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{q}{r_D}.$$

Энергия взаимодействия заряда  $q$  с окружающей плазмой

$$= -\frac{q^2}{r_D}.$$

Энергия взаимодействия всех частиц плазмы:

В редкой плазме малых размеров трехчастичная рекомбинация мала, излучение легко уходит из системы:

$$\frac{dn_e}{dt} = n_e n_a \langle \sigma_e v \rangle - \gamma n_i n_e.$$

---

и может реализоваться корональное равновесие:

$$\alpha = \frac{n_i}{n_a} = \frac{\langle \sigma_e v \rangle}{\gamma}$$

(формула Эльверта) — степень ионизации не зависит от плотности.

## Степень ионизации. Формула Саха.

Найдем плотность электронов ( $n_e$ ), ионов ( $n_i$ ) и нейтральных атомов ( $n_a$ ) для водородной плазмы в **термодинамическом равновесии**.

Электрон находится в состоянии с энергией  $\varepsilon_k$  с вероятностью

$$w_k = A \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right), \quad \text{причем} \quad \sum_k w_k = 1, \quad \frac{\sum_{\varepsilon_k > 0} w_k}{\sum_{\varepsilon_k < 0} w_k} = \frac{n_i}{n_a}.$$

В атоме водорода  $\varepsilon_k = -\frac{me^4}{2\hbar^2 k^2} = -\frac{I}{k^2}$ .  $I = 13.6$  эВ — потенциал ионизации,  
 $k \geq 1$  — номер уровня

Поэтому  $\sum_{w < 0} w_k = 2A \left( e^{I/T} + \dots \right)$ .

из-за спина  $\nearrow$   $\nearrow$  пренебрегаем уровнями с  $k \geq 2$

Для свободных электронов

$$\sum_{\varepsilon_k > 0} w_k = 2A \sum_{\varepsilon_k > 0} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) = 2A \int \frac{d\vec{p} d\vec{r}}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) =$$

↙ объем на один электрон,  $V = 1/n_e$

$$= \frac{2AV}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{\int_0^\infty 4\pi p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) dp}_{(2\pi mT)^{3/2}} = \frac{2A}{n_e} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

**Формула Саха:**

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = e^{-I/T} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},$$

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = e^{-I/T} \underbrace{\left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}}_{\sim \lambda_{d-B}^{-3}} \stackrel{\text{def}}{=} K(T)$$

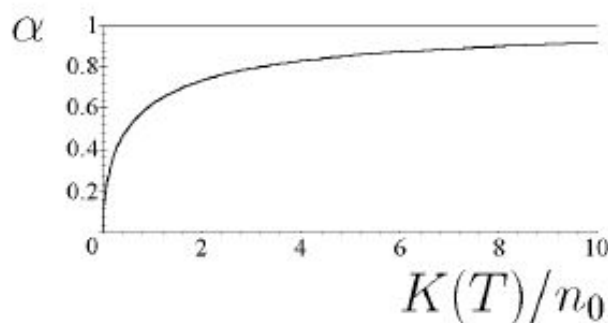
$K(T)$  — константа равновесия

Степень ионизации  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_i}{n_0}$ ,

$$n_0 = n_i + n_a$$

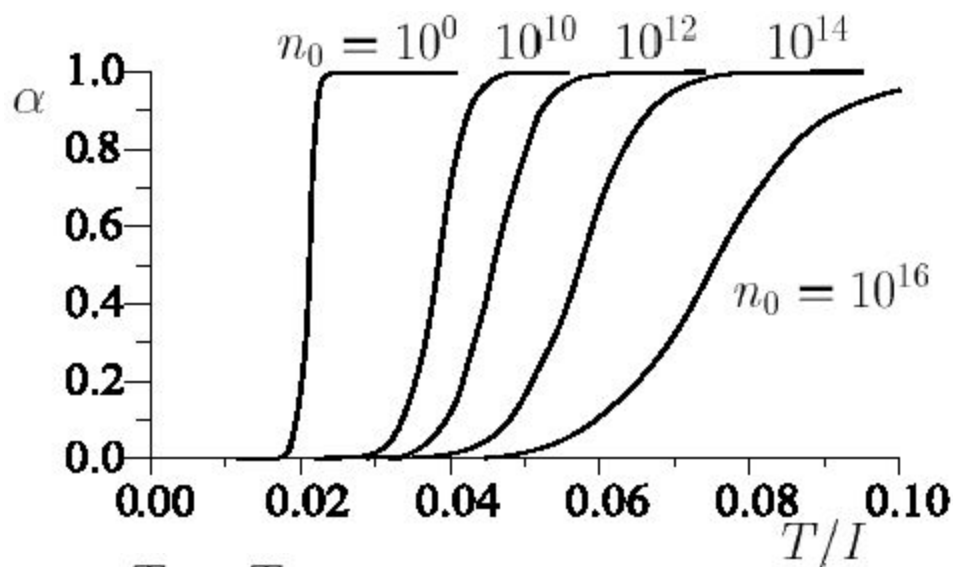
$$K(T) = \frac{\alpha n_0 \alpha n_0}{n_0 - \alpha n_0}$$

$$\frac{K(T)}{n_0} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$$



В классической идеальной плазме:

$\alpha = 0.5$  при  $T = T_* \ll I$ ,



переход к сильно ионизованной плазме на  $\Delta T \ll T_*$ .



**Замечания:**

- При  $\alpha = 0.5$  имеем  $e^{-I/T_*} \sim n_0 \lambda_{d-B}^3$ , откуда

$$\frac{T_*}{I} \sim -\frac{1}{\ln(n_0 \lambda_{d-B}^3)} \sim \frac{1}{\ln(\text{параметр классичности})}.$$

- При  $T \sim T_*$ :

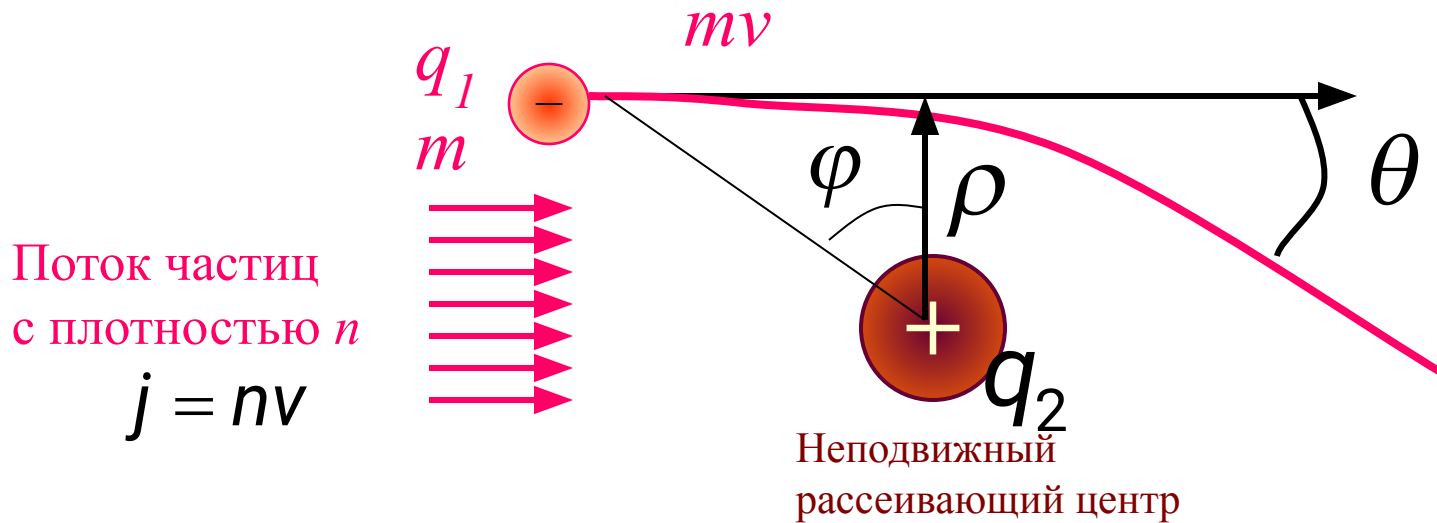
$$\frac{w_2}{w_1} = \exp\left(\frac{|\varepsilon_2| - I}{T}\right) \sim e^{-3I/4T_*} \sim (n_0 \lambda_{d-B}^3)^{3/4} \ll 1,$$

число электронов на возбужденных уровнях мало по параметру классичности  $\Rightarrow$  пренебрежение ими оправдано.

(Электрон с большей вероятностью переходит на один из многих уровней непрерывного спектра, нежели на возбужденный уровень).

- Для сложных атомов равновесная степень ионизации находится аналогично (но с учетом многих, в том числе и вырожденных, уровней).

# Столкновения частиц в плазме. Кулоновский логарифм.



Определим среднюю силу, действующую на неподвижный заряд

$$F = ma = \frac{d}{dt} p_{\parallel}$$

$$F = \frac{d}{dt} (mNv) p_{\parallel} = m \frac{dN}{dt} \Delta v_{\parallel}$$

$$F = mv(1 - \cos\theta) jS$$

$$= jS = nvS$$

$$F_z = \int_0^{\infty} \underbrace{mv(1 - \cos\theta)}_{\text{force per particle}} \underbrace{j 2\pi\rho d\rho}_{\text{number of particles}} ,$$

$$F_z = mvj\sigma_{tr}$$

транспортное сечение.

$$\sigma_{tr} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty (1 - \cos \theta(\rho)) 2\pi \rho d\rho$$

При малых  $\theta$ :

$$\theta(\rho) = \frac{\Delta p_\perp}{mv} = \frac{1}{mv} \int F_\perp dt = \frac{1}{mv} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\frac{q_1 q_2}{\rho^2} \cos^2 \varphi}_{|F|} \overbrace{\cos \varphi}^{F_\perp} \underbrace{\frac{d\rho \operatorname{tg} \varphi}{v}}_{dt} =$$

$$(dt = dz/v = d\rho \operatorname{tg} \varphi / v) = \frac{q_1 q_2}{mv^2 \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2q_1 q_2}{mv^2 \rho}.$$

Ср. точная формула Резерфорда:  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{mv^2 \rho}$

$$\theta \sim 1 \quad \text{при} \quad \rho \sim \frac{q_1 q_2}{mv^2}$$

$$\sigma_{tr} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty (1 - \cos \theta(\rho)) 2\pi \rho d\rho$$

транспортное сечение.

$$1 - \cos \theta = \frac{1}{2} \theta^2 \quad \sigma_{tr} \approx \int \frac{\theta^2}{2} 2\pi \rho d\rho = \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4} \int \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= (\text{расходимость}) = \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4} \ln \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}.$$

Если заряд находится в плазме, то

- $\rho_{min} \sim \frac{q_1 q_2}{mv^2}$  (нарушается приближение  $\theta \ll 1$ )
- $\rho_{max} \sim r_D$  (на больших радиусах поле экспоненциально спадает)
- $mv^2 \sim T, \quad |q_1| \sim |q_2| \sim e$
- $\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} \sim \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi n e^2}} \cdot \frac{T}{e^2} \sim nr_D^3 \sim N_D \gg 1$

Кулоновский логарифм:

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} \sim \ln N_D$$

транспортное сечение.

$$\sigma_{tr} = \frac{4\pi \Lambda q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4}$$

Это сечение падает обратно пропорционально квадрату энергии налетающих частиц  $E = mv^2/2$ . Принимая  $Z_1 = Z_2 = 1$  и  $\Lambda = 15$ , получим практическую формулу

$$\sigma_{tr} \simeq \frac{10^{-12}}{E^2[\text{эВ}]} \text{см}^2.$$

Замечания о логарифмической точности:

- Ошибка в 2 раза при определении  $\rho_{min}$  или  $\rho_{max}$ :

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - \ln 2, \quad \text{относительная ошибка} \sim \frac{1}{\Lambda}.$$

- Вклад рассеяния на большие углы ( $\theta \sim 1$ ):

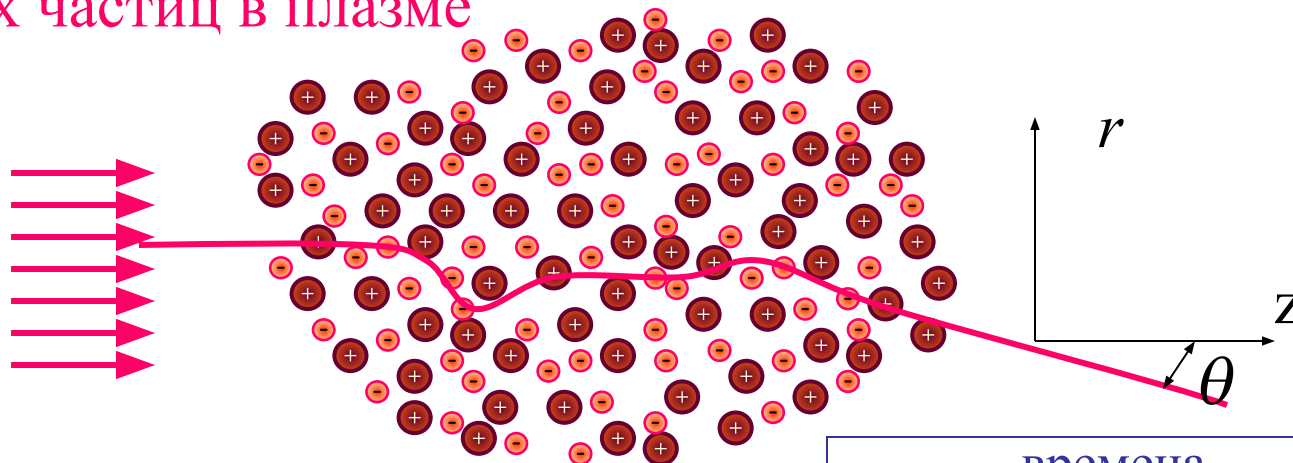
$$\Delta\sigma_{tr} \sim \pi \rho_{min}^2 \sim \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4} \sim \frac{\sigma_{tr}}{\Lambda} \ll \sigma_{tr}.$$

# Релаксация импульса и энергии частиц в плазме.

## Пучок заряженных частиц в плазме

Поток частиц  
с плотностью  $n$

$$j = nv$$



$$\sigma_{tr} = \frac{4\pi\Lambda q_1^2 q_2^2}{m^2 v^4}$$

Потеря направленного импульса

$$\tau_s = - \left( \frac{1}{\langle p_z \rangle} \frac{d\langle p_z \rangle}{dt} \right)^{-1}$$

Потеря энергии

$$\tau_\varepsilon = - \left( \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \frac{d\langle \varepsilon \rangle}{dt} \right)^{-1}$$

Угловой разброс

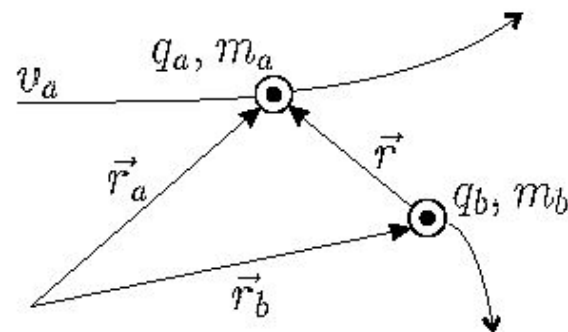
$$\tau_\theta = - \left( \frac{1}{\langle \theta^2 \rangle} \frac{d\langle \theta^2 \rangle}{dt} \right)^{-1}$$

времена

### время потери направленного импульса

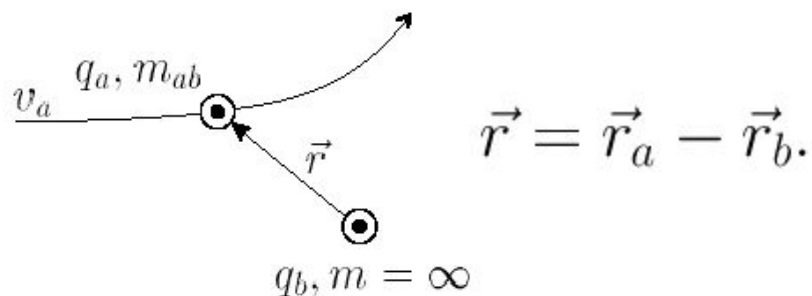
Рассеяние частицы "а" на частице "b" происходит по закону

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = -m_b \ddot{\vec{r}}_b = q_a q_b \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}.$$



Введем приведенную массу:

$$m_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}, \quad \vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b},$$



Получили рассеяние частицы с массой  $m_{ab}$  на неподвижном кулоновском центре:

$$\ddot{\vec{R}} = 0, \quad m_{ab} \ddot{\vec{r}} = \frac{q_a q_b \vec{r}}{r^3}.$$

Средняя сила на рассеивающий центр

$$F_z^b = m_{ab} v_a j \sigma_{tr} = m_{ab} v_a n_a v_a \frac{4\pi \Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}^2 v_a^4} = \frac{4\pi \Lambda n_a q_a^2 q_b^2}{m_{ab} v_a^2}.$$

Средняя сила на налетающую частицу со стороны частиц "b":

$$F_z^a = -\frac{n_b}{n_a} F_z^b, \quad \frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = -\frac{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2}{m_{ab} v_a^2} \frac{\langle p_z \rangle}{m_a v_a} \propto v_a^{-2}.$$

Откуда

$$\tau_s^{a/b} = \frac{m_{ab} m_a v_a^3}{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2}$$

(в холодной плазме)



## Если плазма горячая

(ее частицы двигаются со скоростью  $\gtrsim v_d$ ), то, наряду с плотностью  $n_b$ , плазма характеризуется **функцией распределения**  $f_b$ , такой, что число частиц со скоростью  $v_b$

$$dn_b = f_b(\vec{v}_b) d\vec{v}_b.$$

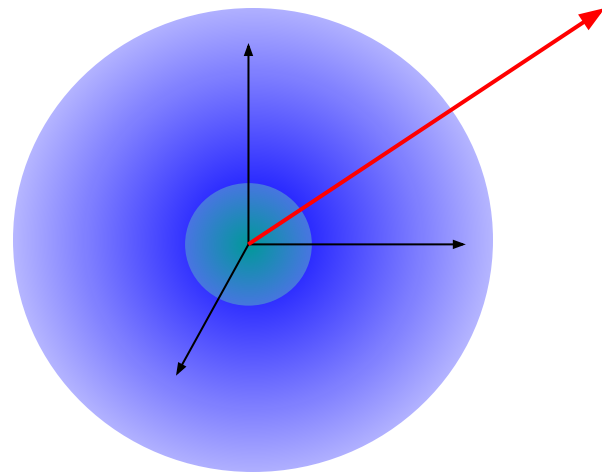
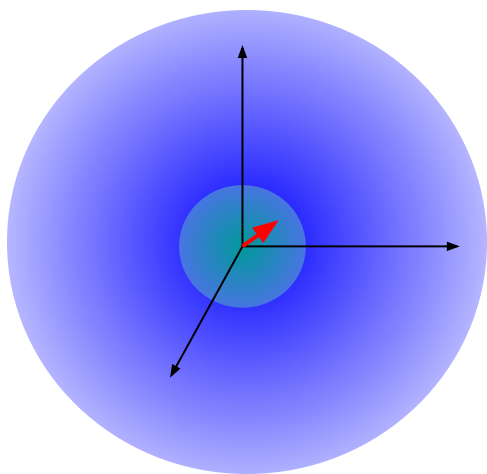
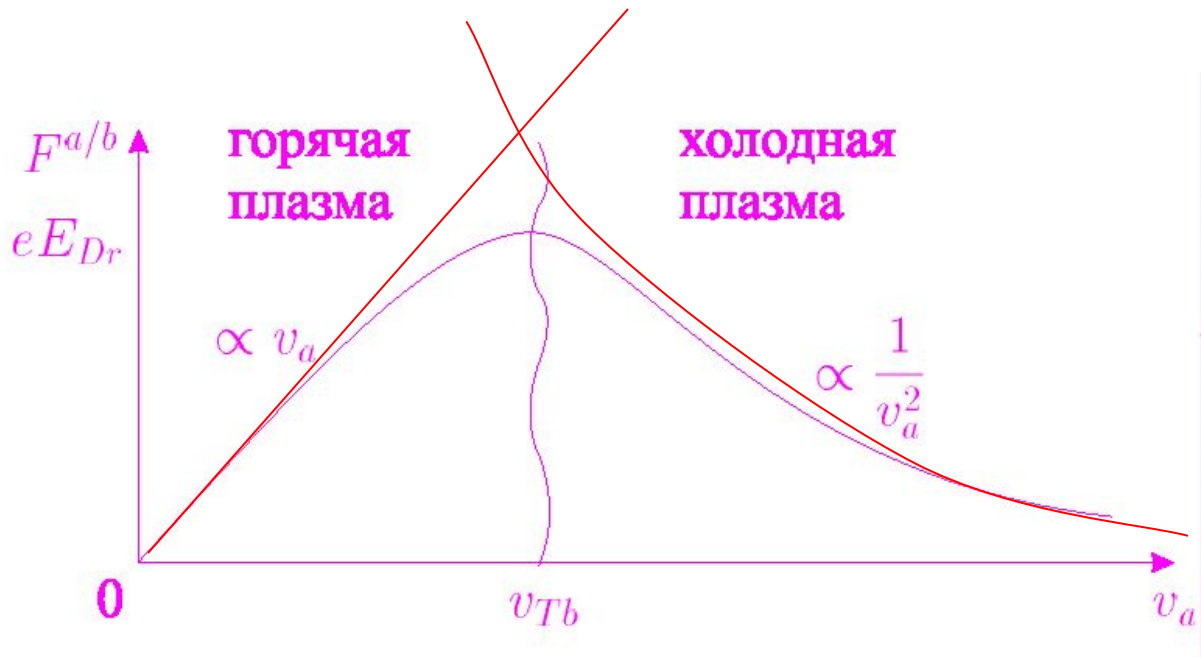
Средняя сила на “a” со стороны  $dn_b$ :

$$d\vec{F}^a = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3} dn_b.$$

Полная тормозящая сила на “a” со стороны “b”:

$$\vec{F}^{a/b} = \int d\vec{F}^a = -\frac{4\pi\Lambda q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \int f_b(\vec{v}_b) \frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3} d\vec{v}_b.$$





## Проводимость плазмы

$$\sigma = j/E$$

Здесь  $j$  — ток в плазме,  
роль  $v_a$  играет скорость  $v$  движения электронов относительно ионов.

Малое внешнее поле  $E$  ускоряет электроны плазмы, пока электрическая сила не уравновесится силой трения об ионы:

$$eE = F^{i/e} = m_i v \nu_{ie} |v \sim v_{Te}$$

$$j = nev = \frac{\bar{n}e^2}{m_i \nu_{ie}} E = \frac{\bar{n}e^2}{m_e \nu_{ei} |v \sim v_{Te}} E,$$

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu} \sim \frac{T_e^{3/2}}{4\pi \Lambda e^2 \sqrt{m_e}}$$

Плазма (100эВ):  $5 \cdot 10^{-7}$  Ом·м, медь:  $2 \cdot 10^{-8}$  Ом·м, нержавеющая сталь:  $7 \cdot 10^{-7}$  Ом·м, ртуть:  $10^{-6}$  Ом·м.

Большое поле,  $\swarrow$  — поле Драйзера

$$E > E_{Dr} \sim m_e v_{Te} \nu_{ei}(v_{Te})$$


---

не может уравновеситься трением об ионы  $\Rightarrow$  неограниченное ускорение электронов (“просвист”, убегание электронов) или неустойчивость.

За какое время слабонеравновесная плазма придет к максвелловскому равновесию ?

Рассмотрев в качестве "a" частицу плазмы, из

$$\tau_s^{a/b} = \frac{m_{ab} m_a v_a^3}{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2}$$

получим времена релаксации:

$$\tau_s^{a/b} = \frac{1}{\nu_{ab}} \sim \frac{m_{ab} m_a v_{Ta}^3}{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2} = \frac{m_{ab} T_a^{3/2}}{4\pi \Lambda n_b q_a^2 q_b^2 \sqrt{m_a}} \propto \frac{m_{ab}}{\sqrt{m_a}}$$

Электроны максвеллизуются за время

Ионы — за время

Выравнивание электронной и ионной температур произойдет за время

$$\begin{aligned} &\sim \tau_s^{e/e} \sim \frac{\sqrt{m_e} T^{3/2}}{4\pi \Lambda n e^4}, \\ &\sim \tau_s^{i/i} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tau_s^{e/e} \\ &\sim \tau_\varepsilon^{i/e} \sim \frac{m_i}{m_e} \tau_s^{e/e}. \end{aligned}$$

(Поскольку при столкновении с ионом легкий электрон отдает или получает долю энергии не более  $m_e/m_i$ ).

На временах  $\tau_s^{i/i} \ll t \ll \tau_\varepsilon^{i/e}$  компоненты плазмы имеют максвелловские распределения с  $T_e \neq T_i$ .

Длина свободного пробега  $\lambda_a = v_a \tau_s^a$

Частота столкновений  $\nu_{ab} = 1 / \tau_s^{a/b}$

В водородной плазме

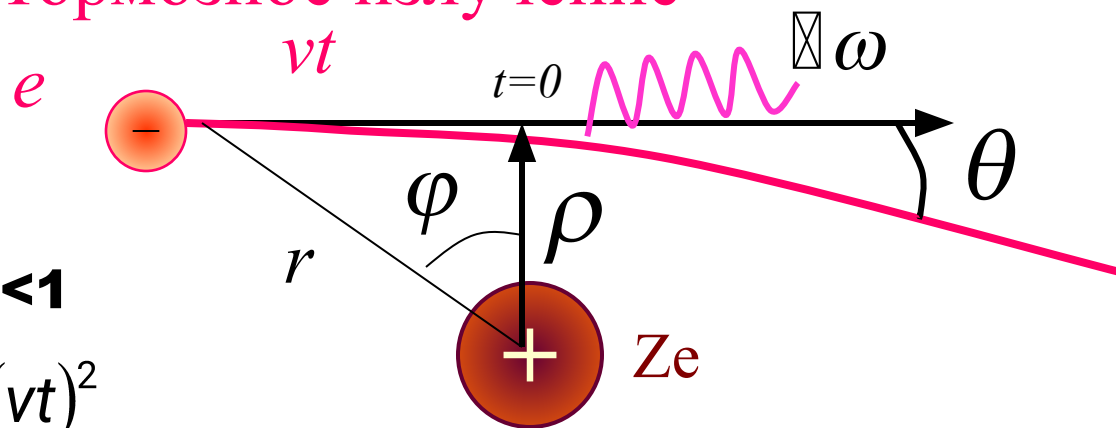
$$\tau = (n \sigma_{\text{тр}} \hat{v})^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{n \sigma_{\text{тр}}} = \frac{10^{12} E^2 [\text{эВ}]}{n [\text{см}^{-3}]} \text{ см.}$$

$$\nu_{ei} = n \sigma_{\text{тр}} v.$$

$$\nu_{ei} = 6 \cdot 10^{-5} \frac{n [\text{см}^{-3}]}{E^{3/2} [\text{эВ}]} \text{ сек}^{-1}.$$

# Излучение из плазмы. Тормозное излучение



Приближение  $\theta \ll 1$

$$r^2 = \rho^2 + (vt)^2$$

Неподвижный  
рассеивающий центр

Энергия, излучаемая электроном в единицу времени, определяется по формуле дипольного излучения:

$$J = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{c^3}$$

$$F = m_e w = \frac{Ze^2}{r^2}$$

$$w = \frac{Ze^2 / m_e}{\rho^2 + v^2 t^2}$$



Мощность излучения:

$$J = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6 / m_e^2 c^3}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2}.$$

Энергия, излучаемая за один пролет:

$$\Delta \mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} dt J = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v \rho^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v \rho^3}.$$

Если : Поток частиц с плотностью  $n_e$  и скоростью  $v$  :

$$P_1 = \int 2\pi \rho d\rho \cdot n_e v \cdot \Delta \mathcal{E} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e}{m_e^2 c^3} \int \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

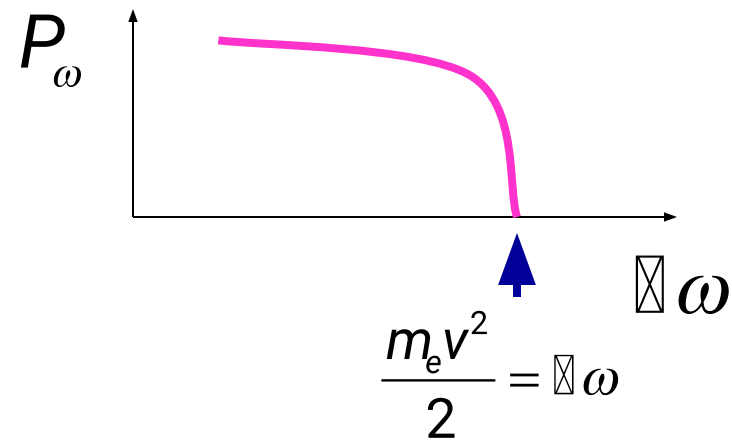
Интеграл формально расходится на нижнем пределе, но

$$\frac{m_e v^2}{2} \geq \hbar \omega \quad , \text{ тогда} \quad \rho \geq \frac{\hbar}{m_e v} = \lambda_B$$

Мощность, которая излучается из единицы объёма, получается умножением  $P_1$  на число ионов  $n_i$  в единице объёма плазмы:

$$P \approx Z^2 n_e n_i \frac{e^6}{m_e c^3} v$$

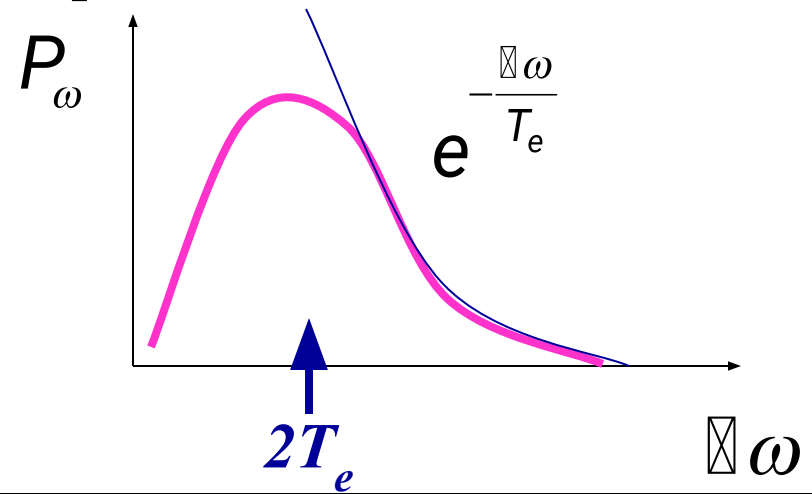
Спектр излучения



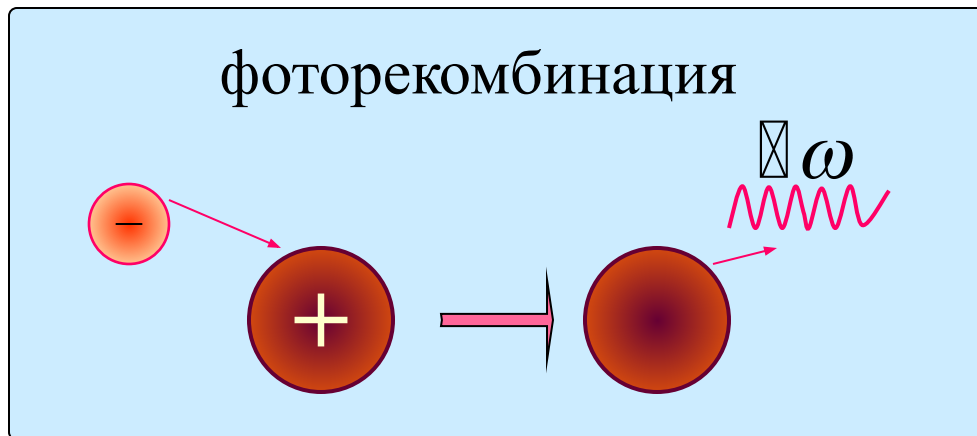
Для максвелловской функции распределения:

$$v \Rightarrow \langle v \rangle \approx \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$$

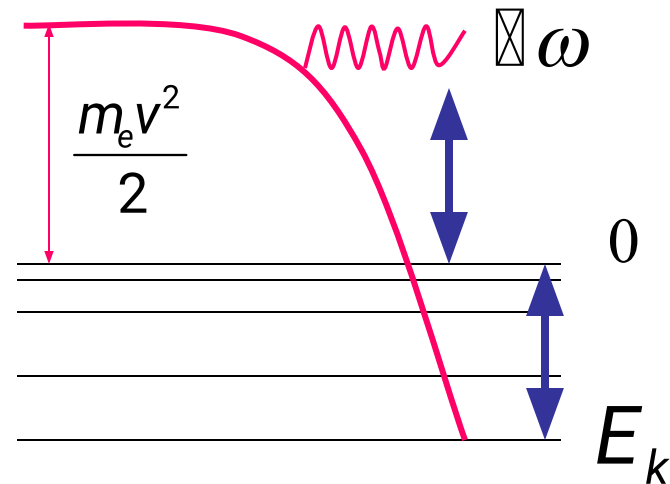
$$P_{\text{торм}} = AZ^2 n_e n_i \frac{e^6}{m_e^{3/2} c^3} \sqrt{T_e}$$



# Рекомбинационное излучение



Свободно-связанный переход

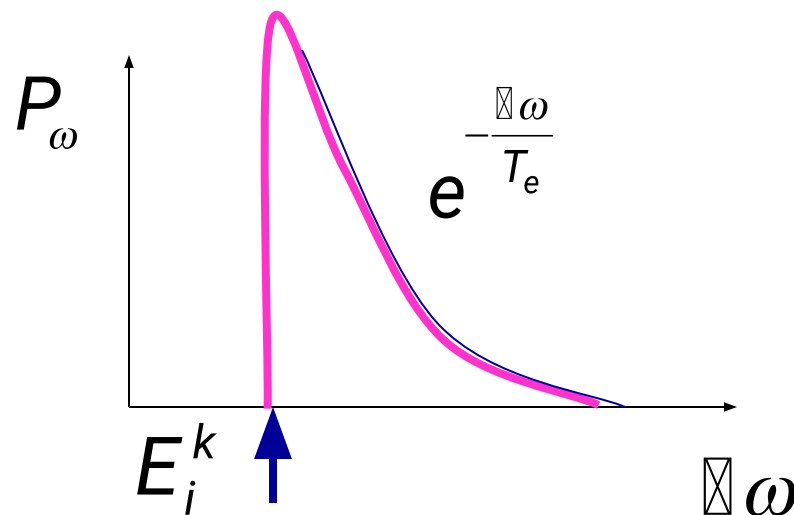


Для максвелловской функции распределения:

$$\Delta\omega \sim \omega \sim \frac{E_k}{\hbar}$$

ПОЛНАЯ МОЩНОСТЬ

$$P_r \propto \frac{Z^4 n_i n_e}{\sqrt{T}}$$

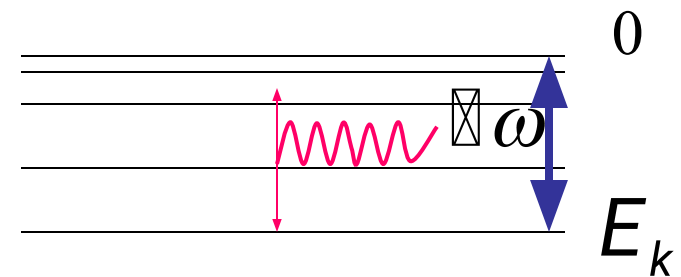


# Линейчатое излучение

Связанно-связанный переход

Интенсивность линии

$$I = \int I_{\omega} d\omega = \frac{\hbar \omega}{4\pi} A_{ki} \frac{g_k}{U} n l e^{-E_k/T}$$



Отношение интенсивностей линий одного и того же иона

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1 g_1 \omega_1}{A_2 g_2 \omega_2} e^{-(E_1 - E_2)/T}$$

## Уширение (рассечение) линий

Доплер-эффект

$$\Delta\omega = kv$$

$v$  - скорость

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_k}{c}$$

Штарк - эффект

Для водорода и водородоподобных ионов ( $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ ....):

$$\Delta\omega_s = \frac{3}{2} k_s E$$

Зееман-эффект

$$\Delta\omega_z = \frac{eB}{2m_e c} g_z$$

## Доплер-эффект

$$\Delta\omega = kv \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v_k}{c}$$

В плазме:

Для максвелловской функции распределения:

$$J_{\Delta\omega} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_0} \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega_0^2}\right)$$

Гауссов профиль

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega}{c} v_T = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2T}{M_a}}$$

## Штарк -эффект

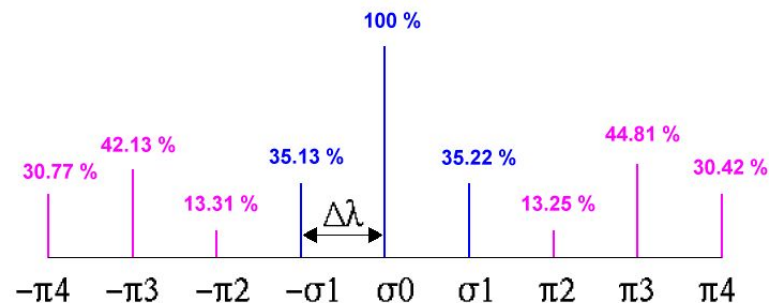
Для водорода и водородоподобных ионов ( $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$ ....):

$\pi$ - поляризация:  $\parallel E$  (Лоренцевское эл. поле)

$\sigma$ - поляризация:  $\perp E$

$$\Delta\omega_s = \frac{3\hbar}{2m_e} k_s E$$

$H_\alpha$



В плазме:

Микрополе:  $\tilde{E} \sim \frac{e}{r^2}$ ,  $r \approx n^{-\frac{1}{3}}$ ,  $\tilde{E} = 2.6en^{\frac{2}{3}}$

Имеет распределение-уширение линий

В движении:

$$E^* = E + \frac{1}{c} [vB]$$

# Циклотронное излучение

$$\omega = l\Omega_e = l \frac{eB}{m_e c}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Мощность излучения определяется по формуле дипольного излучения:

$$J = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{c^3} \quad \text{где} \quad w = \Omega_e v_{\perp}$$

$$P_{\text{цикл}} = \frac{2e^2}{3c^3} (\Omega_e v_{\perp})^2 n_e = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2 T_e n_e}{m_e c^5}$$

$$\Omega_e = 1,8 \cdot 10^7 B[\text{Гс}] \text{сек}^{-1}$$

$$\Omega_e = 9 \cdot 10^{11} \text{сек}^{-1} \text{ при } B = 50 \text{ кГс}$$

$$\lambda = 2\pi c / \Omega_e = 2 \text{ см}$$



# Излучение Черного тела

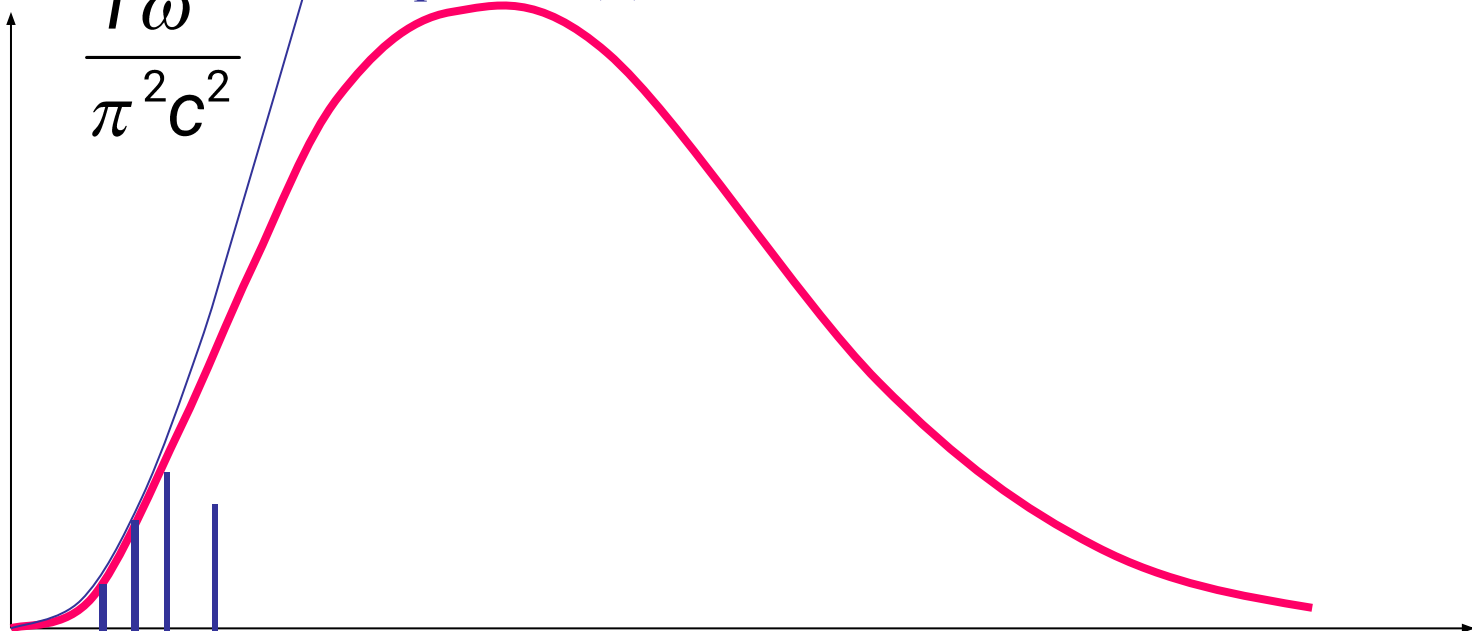
Планковский спектр:

$$P_{pl} = \sigma T^4$$

$$\frac{T\omega^2}{\pi^2 c^2}$$

Спектр Релея-Джинса

$P_\omega$



$\omega$

$$\omega \approx 3T$$

Циклотронные частоты, излучение заперто

Формула для электропроводности  
Используем кинетическое уравнение

Простейшая модель:  $St_{ab} = -\nu_{ab} (f_a - f_{a, \text{максв}})$  с  $\nu_{ab} = \text{const.}$

Водородная плазма:  $e, i$   $St_{ei} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$

Кинетическое уравнение для этой задачи имеет вид:

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$

Пусть  $f = f_0 + f_1$

Пренебрегаем произведением малых сомножителей

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V}$$

Тогда:

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{-f_1}{\tau_{ei}}$$

Отсюда:

$$\vec{j} = -e \int \vec{v} f_1(\vec{v}) dV = \left( \frac{e^2 \vec{E}}{m_e} \right) \tau_{ei} \int f_0 dV = \left( \frac{ne^2}{m_e} \right) \tau_{ei} \vec{E}$$

Ранее получали:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu} \sim \frac{T_e^{3/2}}{4\pi \Lambda e^2 \sqrt{m_e}}$$

Смысл приближения слабого электрического поля:

Условие  $f_1 \ll f_0$  означает:

$$\frac{eE}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial V} = \frac{-f_1}{\tau_{ei}} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_0}{\partial V} \sim \frac{f_0}{V_T} \right| \Rightarrow \frac{eE}{m_e} \frac{\tau_{ei}}{V_T} \ll 1 \quad \text{Или:} \quad \frac{eE}{m_e T_e} \lambda_{ei} \ll 1$$

Энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле на длине св. пробега, должна быть намного меньше тепловой.

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)f_a + \frac{q_a}{m_a} \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \sum_b St_{ab}$$

## Коэффициент теплопроводности

Стационарное состояние, поле отсутствует. Одномерный случай.

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_0 - f}{\tau} \quad \text{x-направление градиента температуры}$$

Для  $l \sim v\tau \ll L$  функцию распределения можно разложить  
в ряд по степеням малого параметра  $\tau$ :  $f = f_0 + f_1 + \dots$

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{mv^2}{2T(x)} \right)$$

$$f_1 = -\tau v \frac{\partial f_0}{\partial x} = -n\tau v \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{mv^2}{2T^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \right) \exp\left( -\frac{mv^2}{2T} \right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

Поток тепла:

$$q = \int v \frac{mv^2}{2} f(v) dv = \int v \frac{mv^2}{2} f_0(v) dv - \int v \frac{mv^2}{2} f_1(v) dv = 0$$

Второй интеграл:  $q = 3n\pi\tau \frac{T}{m} \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial T}{\partial x}$

Коэффициент теплопроводности  
Точное выражение:

$$\kappa = 3.2n\pi\tau_{ei} \frac{T_e}{m} \quad \tau_{ei} = \frac{3.510^5}{\Lambda} \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n}$$

Ток и тепло переносятся электронами

$$\sigma \propto T_e^{\frac{3}{2}}, \quad \kappa \propto T_e^{\frac{5}{2}}$$

и не зависят от плотности

Уравнение непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$

Закон сохранения массы или числа частиц

Уравнение движения  $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]$

Уравнение Ньютона, отнесенное к единичному объему среды

Уравнение теплопереноса  $\frac{d}{dt} p \rho^{-\gamma} = 0$

Уравнение адиабаты, сохранение энергии

После введения в уравнения обычной гидродинамики силы Лоренца система уравнений оказалась незамкнутой. Она должна рассматриваться совместно с уравнениями Максвелла.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Током смещения можно пренебречь

Пусть  $L$ ,  $\tau$ , и  $v$  — характерные параметры системы.  $\operatorname{rot} \sim 1/L$

$$E \sim \frac{L}{c\tau} B \sim \frac{v}{c} B \quad \left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \sim \frac{E}{c\tau} \sim \frac{B v^2}{L c^2} \ll \frac{B}{L} \sim |\operatorname{rot} \vec{B}|$$

различием  $n_e$  и  $n_i$  можно пренебречь при  $v \ll c$ .

$$j \sim cB/L; \quad \text{из } \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho_q \text{ следует } \rho_q \stackrel{\text{def}}{=} \text{плотность заряда} \sim \frac{E}{L} \sim \frac{vB}{cL}.$$

$$\text{Магнитная сила} = \left| \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] \right| \sim \frac{jB}{c} \sim \frac{B^2}{L} \gg \text{Электрическая сила} = \left| \rho_q \vec{E} \right| \sim \frac{v^2 B^2}{c^2 L}.$$

## Сокращенные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

## Уравнение в замороженности

В с.о. плазмы (обозначаем величины штрихом):

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad \vec{j}' = \sigma \vec{E}'.$$

В лабораторной с.о.:

$$\vec{j} = \vec{j}' + \rho_q \vec{v} \approx \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right).$$

↓ ↙ мало при  $v \ll c$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right),$$

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}],$$



(т.к.  $\text{rot rot } \vec{B} = -\Delta \vec{B} + \nabla \text{div } \vec{B} = -\Delta \vec{B}$  )

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \text{rot } \vec{E} = \underbrace{\text{rot } [\vec{v} \times \vec{B}]}_{\text{"1"}} + \underbrace{\frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{B}}_{\text{"2"}}.$$

$D_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  — коэффициент диффузии магнитного поля

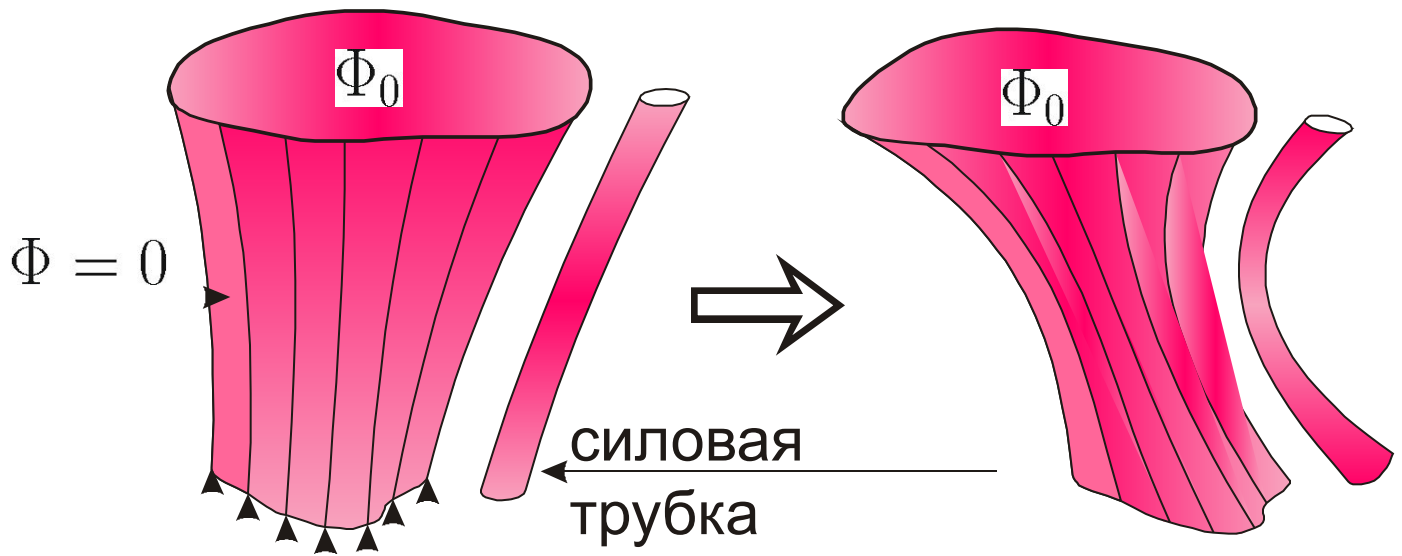
Так как  $\frac{\text{"1"}}{\text{"2"}} \sim \frac{vB}{L} : \frac{D_m B}{L^2} \sim \frac{vL}{D_m} \sim \frac{vL\sigma}{c^2}$ , то

при  $\sigma \ll \frac{c^2}{vL}$  — диффузия магнитного поля,

при  $\sigma \gg \frac{c^2}{vL}$  — вмороженность магнитного поля.

### Почему называется вмороженностью?

При  $\sigma \rightarrow \infty$  магнитный поток через любой жидкий контур сохраняется  $\Rightarrow$  силовые линии "текут" вместе с плазмой:



Силовые линии

Так как  $\nabla \times \mathbf{E}' = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} \dot{\Phi}_k = 0$  (ЭДС=0 на обходе «жидкого» контура К)

Откуда: 
$$\Phi_k = \int_{(k)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

## Простейшие равновесные системы

Статическое равновесие:  $v = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$

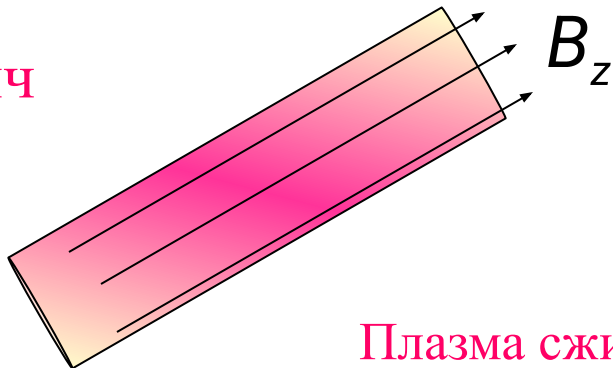
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] \Rightarrow \nabla p = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]$$

Линии поля и линии тока лежат на одной поверхности:  $\vec{\nabla} p = \vec{B} \nabla p = 0$

Пусть магнитное поле имеет одну компоненту:  $\vec{B} = B_z$

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0 \Rightarrow p + \frac{B^2}{8\pi} = const$$

$\theta$  -пинч

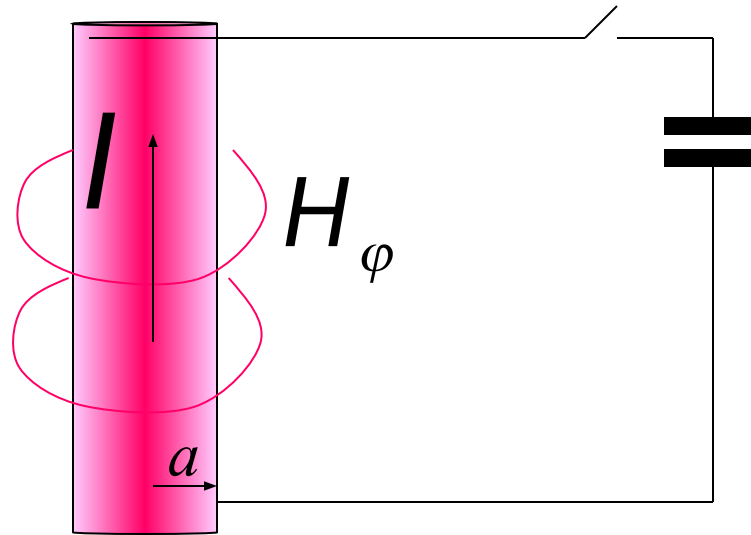


Магнитное поле внутри плазмы равно 0, давление=const, поле на границе:

$$p = \frac{B_z^2}{8\pi}$$

Плазма сжимается нарастающим магнитным полем

Z-пинч



На границе:  $B_\varphi = \frac{2I}{ca}$        $p = 2nT = \frac{B^2(a)}{8\pi}$

$$I^2 = 8c^2\pi a^2 nT$$

Для термоядерной плазмы :  $T=10$  кэВ,  $n=4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$      $I=1 \text{ МА}$

Такая плазма равновесна, но неустойчива.....

## Классификация плазменных неустойчивостей

*Неустойчивостей — бесчисленное множество, в каждой плазменной конфигурации — свои.*

- **кинетические**

(микро-)

чувствительны к деталям  
функции распределения

- **гидродинамические**

(макро-)

распределение частиц по скоростям не существенно

- **абсолютные**

возмущение неограничено  
нарастает в некоторой точке  
пространства

- **сносовые**

(конвективные)

в любой точке

возмущение  $\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$   
(пакет бежит быстрее,  
чем растет)

Имеет смысл только для волновых пакетов и зависит от системы отсчета.

тензор натяжений магнитного поля,  $T_{\alpha\beta}$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \overbrace{\frac{B^2}{8\pi}} + \left( \vec{B} \nabla \right) \frac{\vec{B}}{4\pi},$$

$$-i\omega \rho_0 \vec{v} = -i\vec{k} \delta p - i\vec{k} \frac{\vec{B}_0 \delta \vec{B}}{4\pi} + i \left( \vec{k} \vec{B}_0 \right) \frac{\delta \vec{B}}{4\pi},$$

$$\omega \rho_0 \vec{v} = \vec{k} \gamma p_0 \frac{\vec{k} \vec{v}}{\omega} + \vec{k} \frac{\vec{B}_0 \delta \vec{B}}{4\pi} - \left( \vec{k} \vec{B}_0 \right) \frac{\delta \vec{B}}{4\pi},$$

z-компонента  $\omega \rho_0 v_z = -k B_{0x} \frac{\delta B_z}{4\pi} = \frac{k B_{0x}}{\omega} k B_{0x} \frac{v_z}{4\pi},$

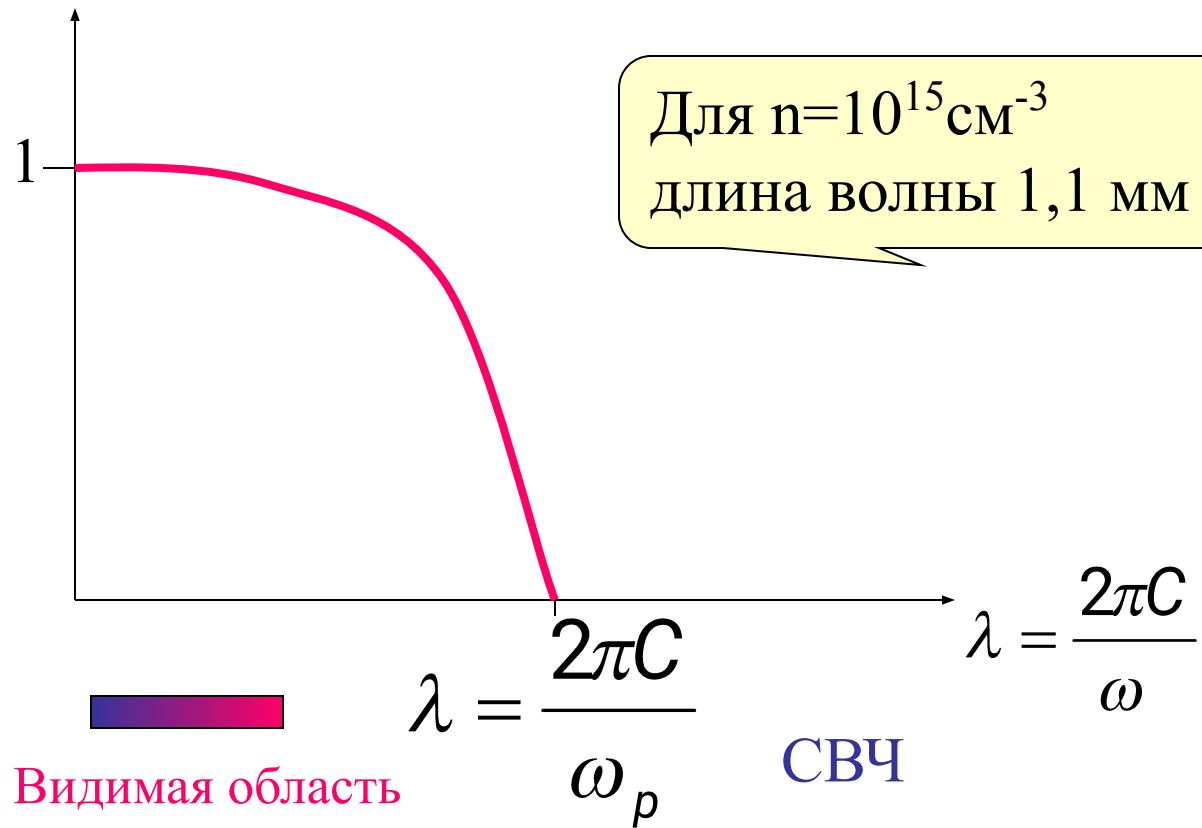
$$\omega^2 = \frac{k^2 B_{0x}^2}{4\pi \rho_0} = \frac{\left( \vec{k} \vec{B}_0 \right)^2}{4\pi \rho_0}$$

— альфвеновская волна

$$V_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B_0}{\sqrt{4\pi \rho_0}}$$

— альфвеновская скорость

Показатель преломления



Дисперсионное соотношение для э/м волны

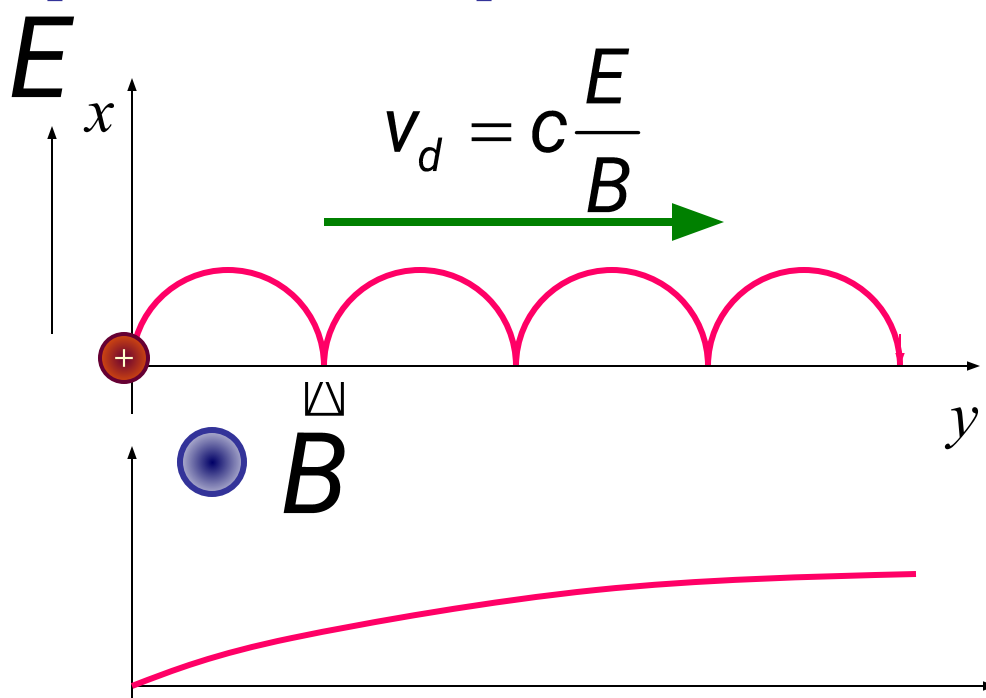
$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$$

- Волна с  $\omega < \omega_p$  в плазме не распространяется (отражается).

Магнитное и электрическое поле

$$\vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} + [\vec{v} \times \omega_H]$$

Скращенное электрическое и магнитное поле:



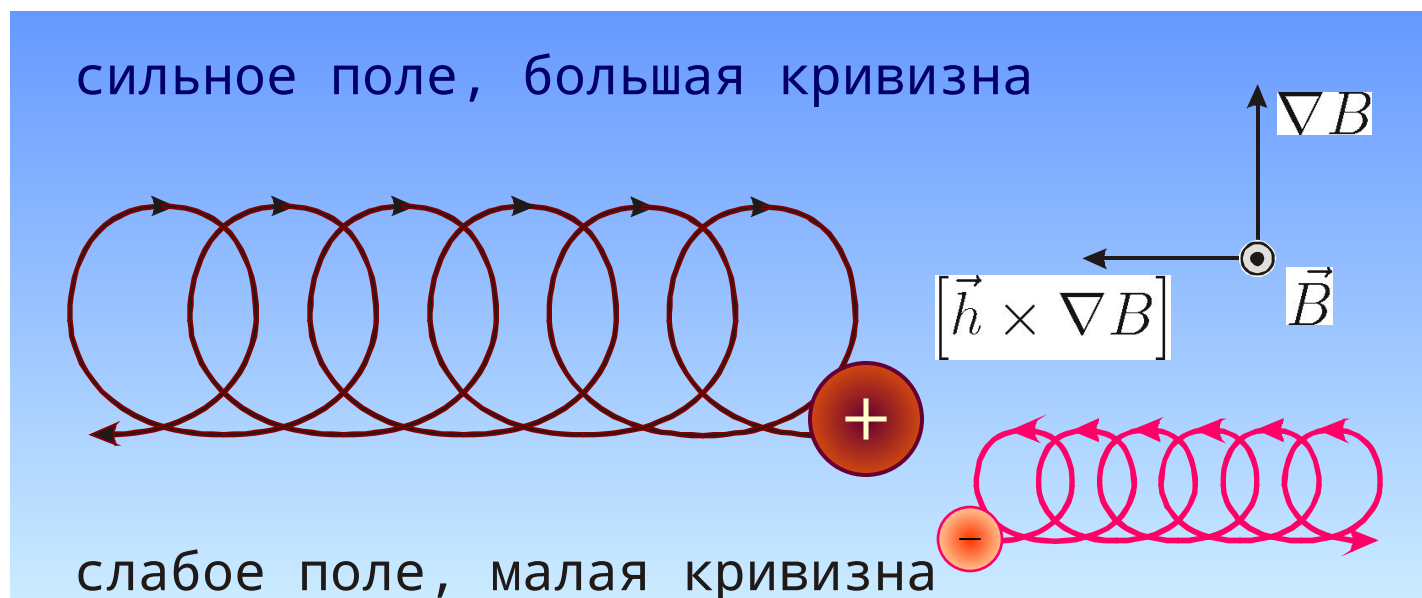
«быстрое» включение  
 $\omega_H t \ll 1$

«медленное» включение  
 $\omega_H t \gg 1$

Дрейфовая скорость не зависит от заряда и массы частицы



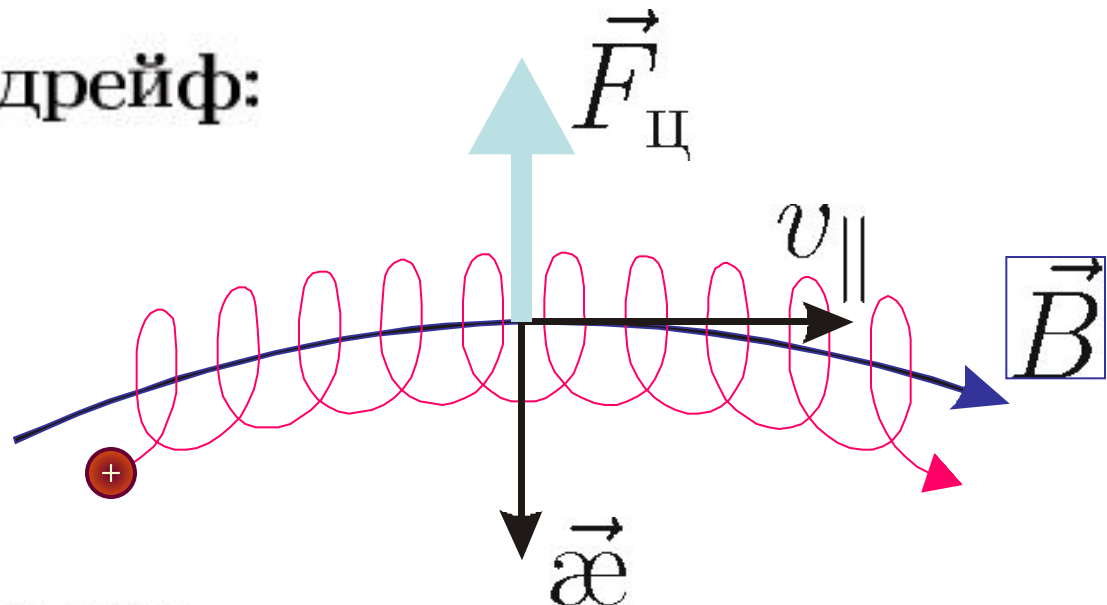
## Градиентный дрейф:



$$\dot{\vec{R}} = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_H B} [\vec{h} \times \nabla B]$$

Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны

## Центробежный дрейф:



В системе отсчета, движущейся вдоль силовой линии со скоростью  $v_{||}$ , на частицу действует центробежная сила

$$F_{ц} = \frac{mv_{||}^2}{R_{кр}}, \quad \vec{F}_{ц} = -mv_{||}^2 \vec{a}.$$

$F_{ц}$  эквивалентна электрическому полю  $\vec{E}_{экр} = \vec{F}_{ц}/q$

$$\Rightarrow \text{Дрейф} \quad \vec{v} = \frac{c}{B^2} [\vec{E}_{экр} \times \vec{B}] = \frac{mv_{||}^2 c}{qB^2} [\vec{B} \times \vec{a}]$$

Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны

Аналогично можно преобразовать уравнения

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \dot{\vec{v}}\vec{h} + \vec{v}\dot{\vec{h}}, \quad \frac{dv^2}{dt} = 2\vec{v}\dot{\vec{v}}$$

и получить

(сохранение магнитного момента)

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \vec{E}\dot{\vec{R}} + \mu \frac{\partial B}{\partial t}$$

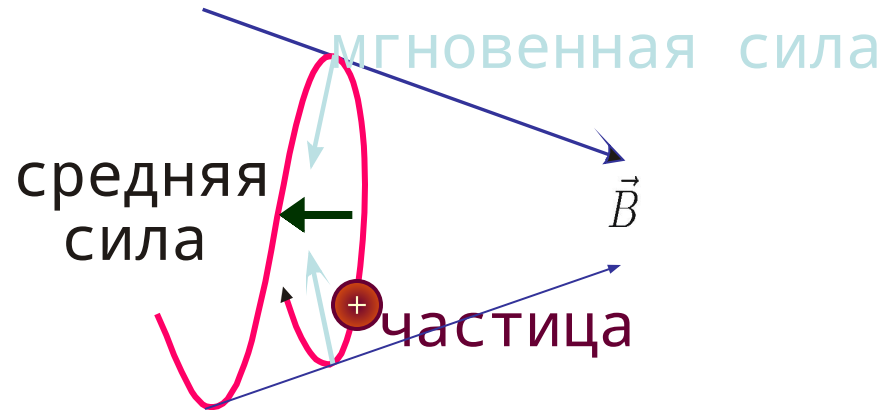
работа вихревого поля ↗

**Если**  $\text{rot } \vec{B} = 0$ ,  $\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$ , то  $\frac{\nabla B}{B} = \vec{\alpha}$ , и градиентный и центробежный дрейфы направлены по бинормали к силовой линии:

$$\vec{v}_{\text{др}} = \frac{v_{\parallel}^2 + (v_{\perp}^2/2)}{\omega_H} \left[ \vec{h} \times \vec{\alpha} \right].$$

Условие удержания:

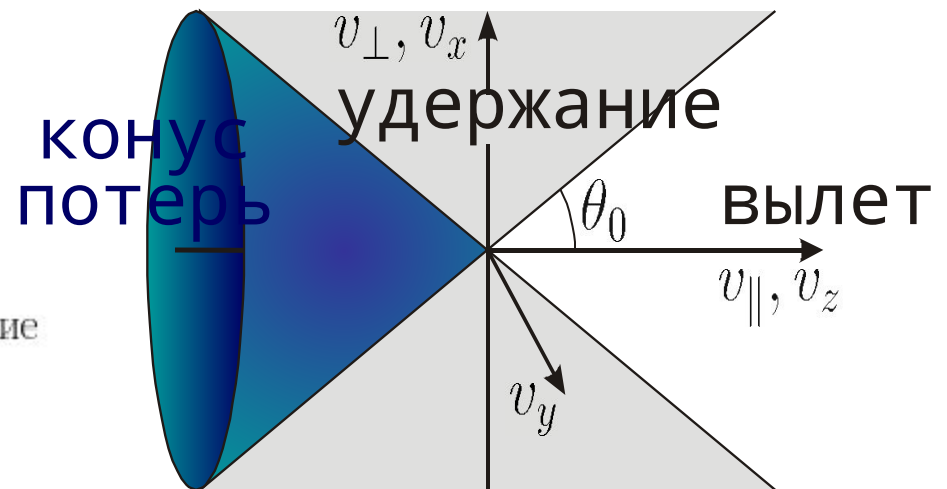
$$\frac{v_{\perp}^2}{v^2} > \frac{B}{B_{max}}$$



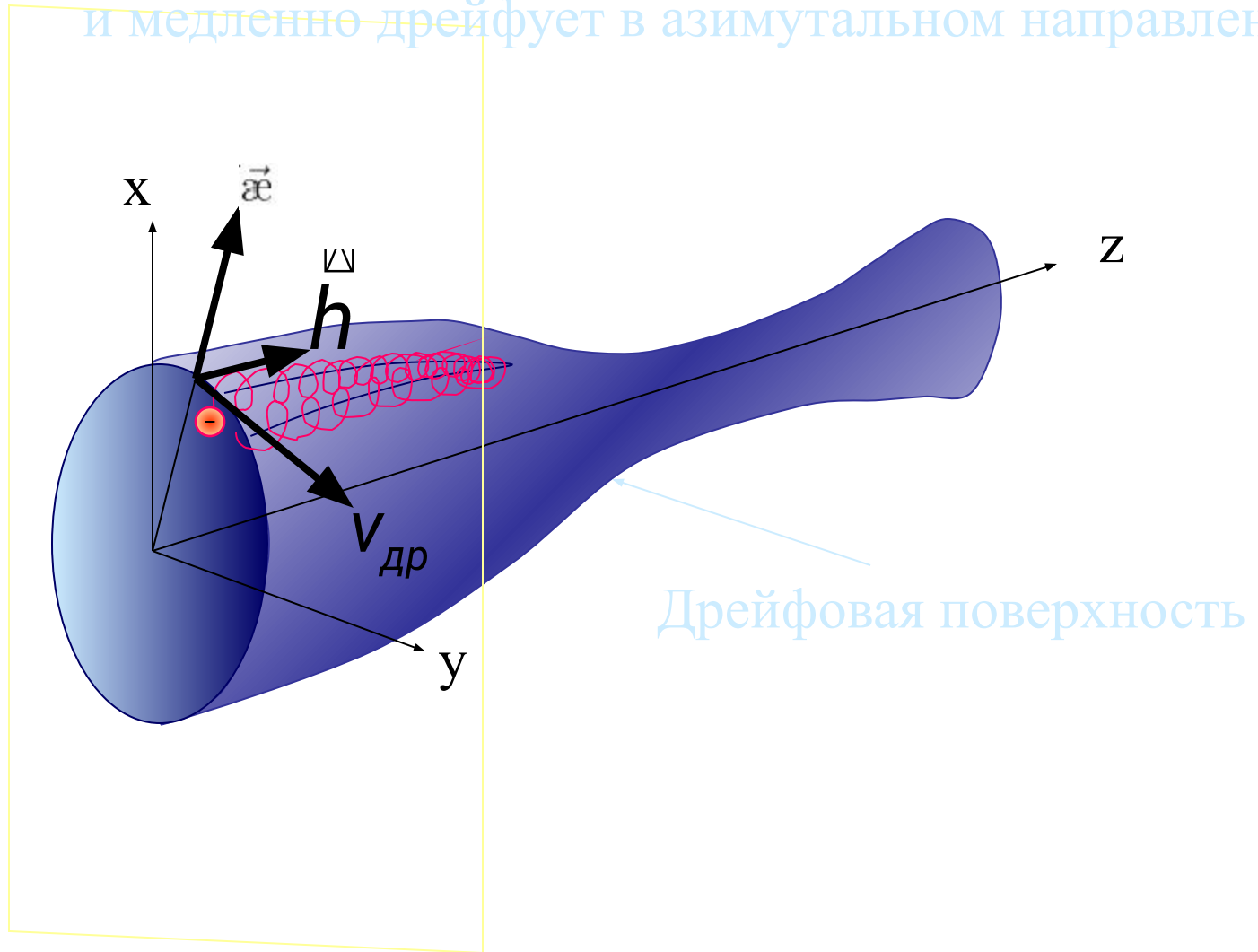
В точке минимума поля:

$$\sin \theta_0 = \frac{v_{\perp}}{v} = \sqrt{\frac{B_{min}}{B_{max}}}$$

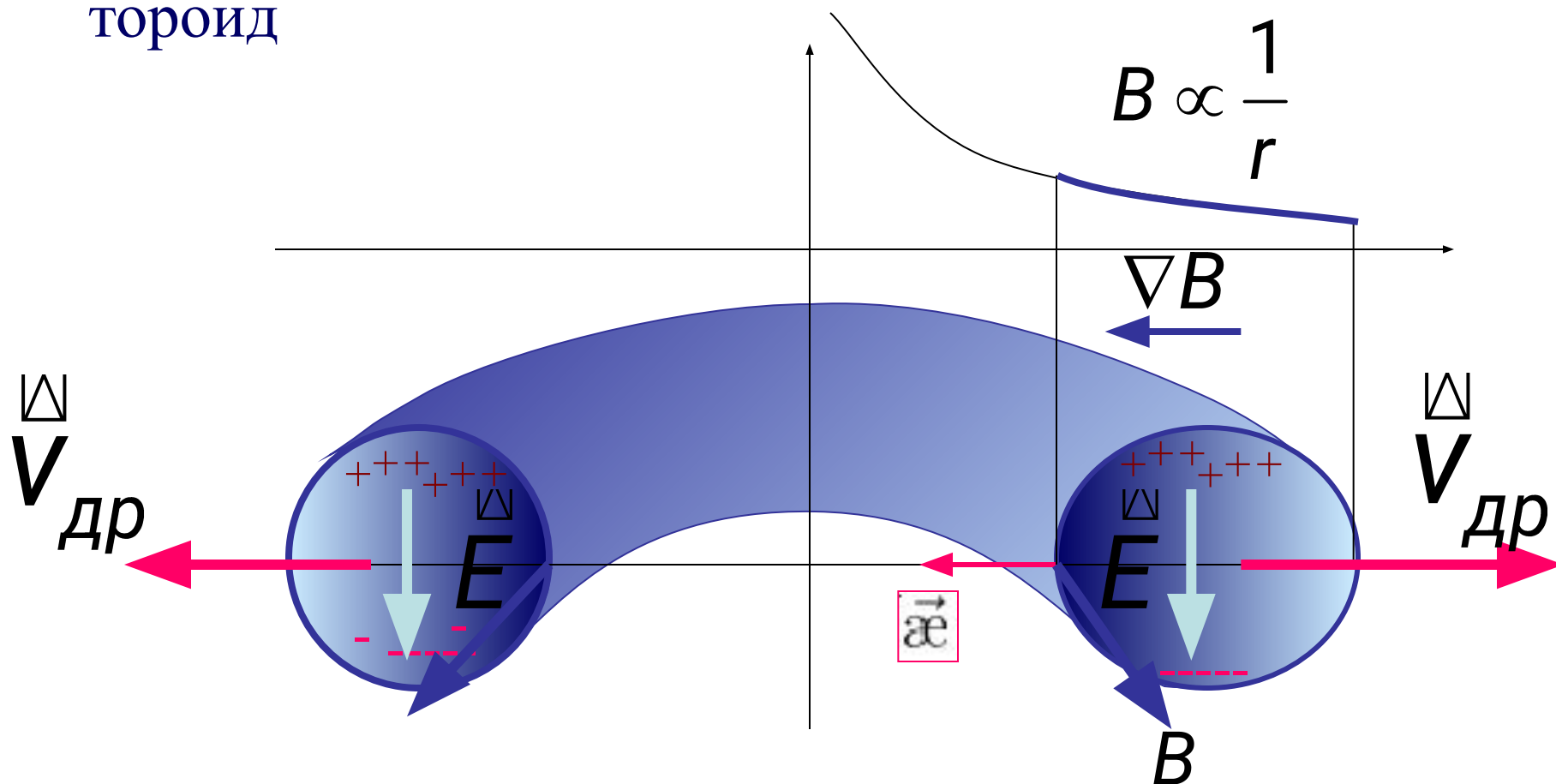
$$R \stackrel{\text{def}}{=} B_{max}/B_{min} \quad \text{— пробочное отношение}$$



Частица быстро осциллирует между пробками и медленно дрейфует в азимутальном направлении



тороид

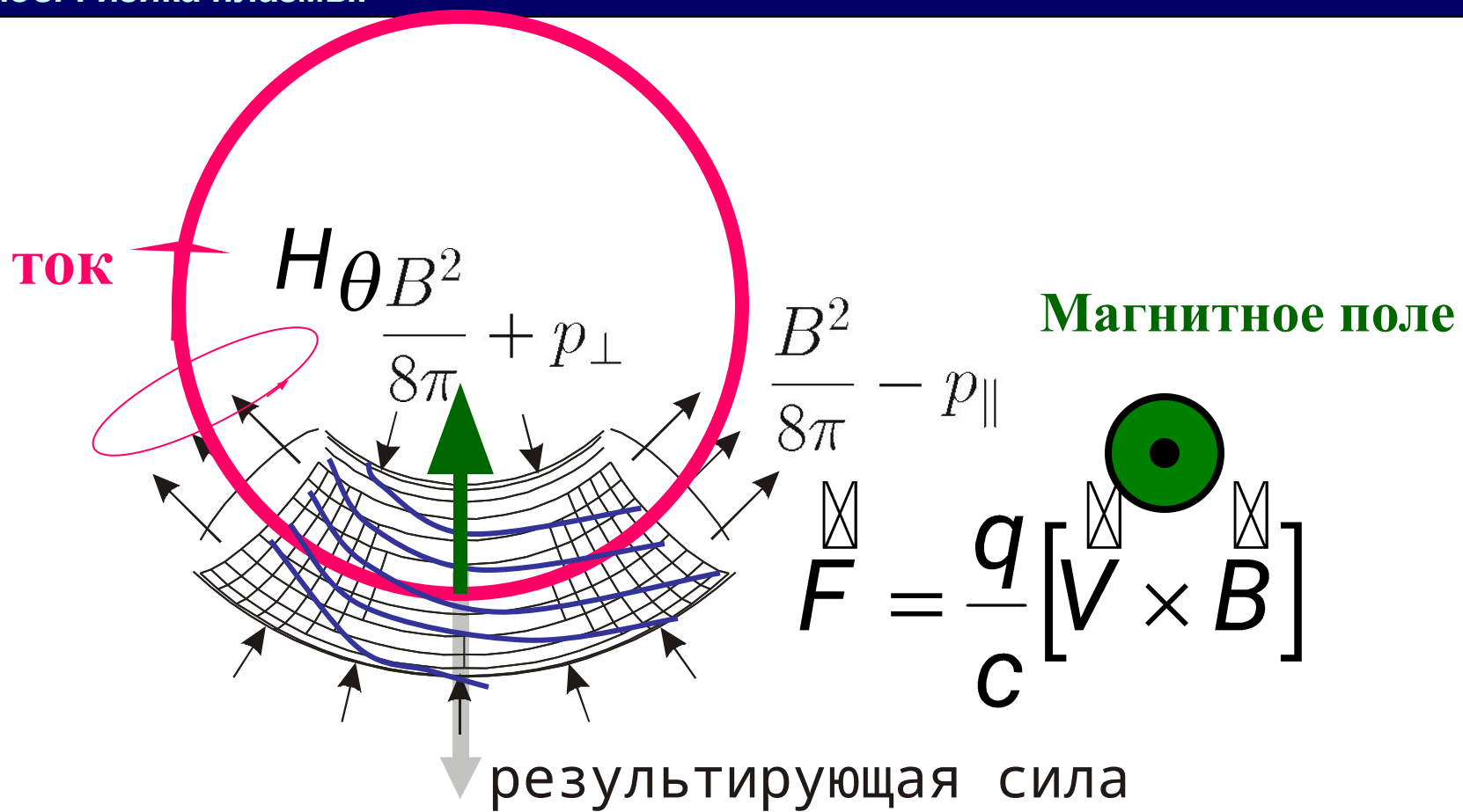


Электронны и ионы дрейфуют в разные стороны

\*поляризация плазмы

\*в электрическом @ магнитном поле- плазма дрейфует наружу тора

\*в тороидальной геометрии плазму не удержать!



В дополнительном поле  $B$  появляется сила, уравнивающая плазменный виток.

**= ТОКАМАК**

## Основные положения

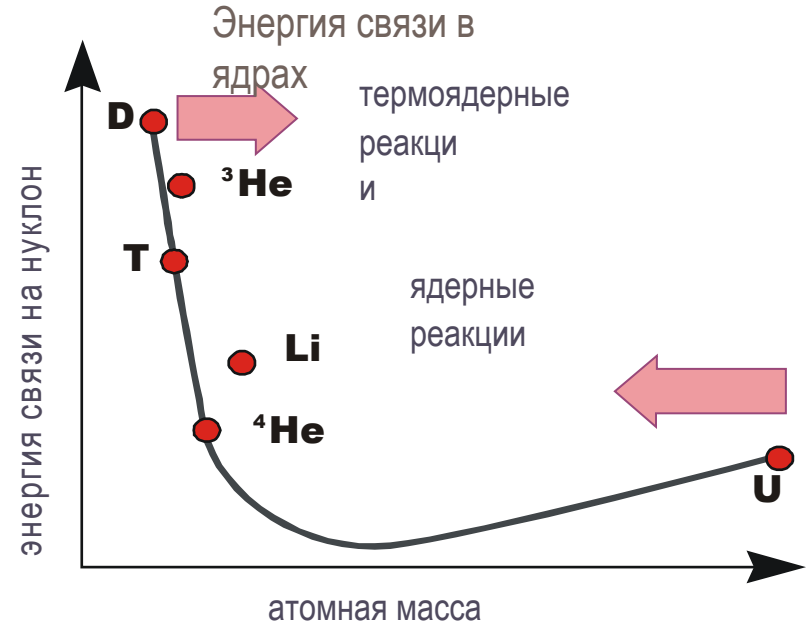
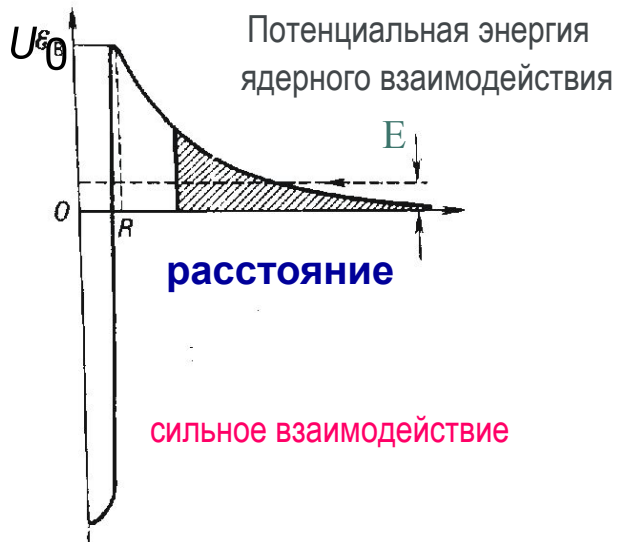
### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Термоядерные реакции - ядерные реакции между легкими атомными ядрами, протекающие при высоких температурах ( $>10^7-10^8$  К)

### кулоновский барьер

$$U_0 = \frac{e^2}{R} \sim 1 \text{ МэВ}$$

потенциальная энергия



Туннельный эффект.

Барьерная модель Гамова:

Сечение:

$$\sigma(E) \sim \frac{A}{E} \exp\left(-\frac{B}{E^{1/2}}\right)$$



## Реакция DT

Плазма с  $n_D = n_T = \frac{1}{2}n$

Число реакций в единице объема в единицу времени:  $\frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle$

Выделяемая мощность:  $P_{\text{термояд}} = \frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle E_{DT}$  ( $E_{DT} = 18 \text{ МэВ}$ )

Мощность потерь:  $\frac{3nT}{\tau}$ , ( $3nT = \frac{3}{2}nT_e + \frac{3}{2}nT_i$ )

$\tau$  – Энергетическое  
время жизни

Условие положительного выхода  $P_{\text{термояд}} > \frac{3nT}{\tau}$

**Критерий Лоусона:**

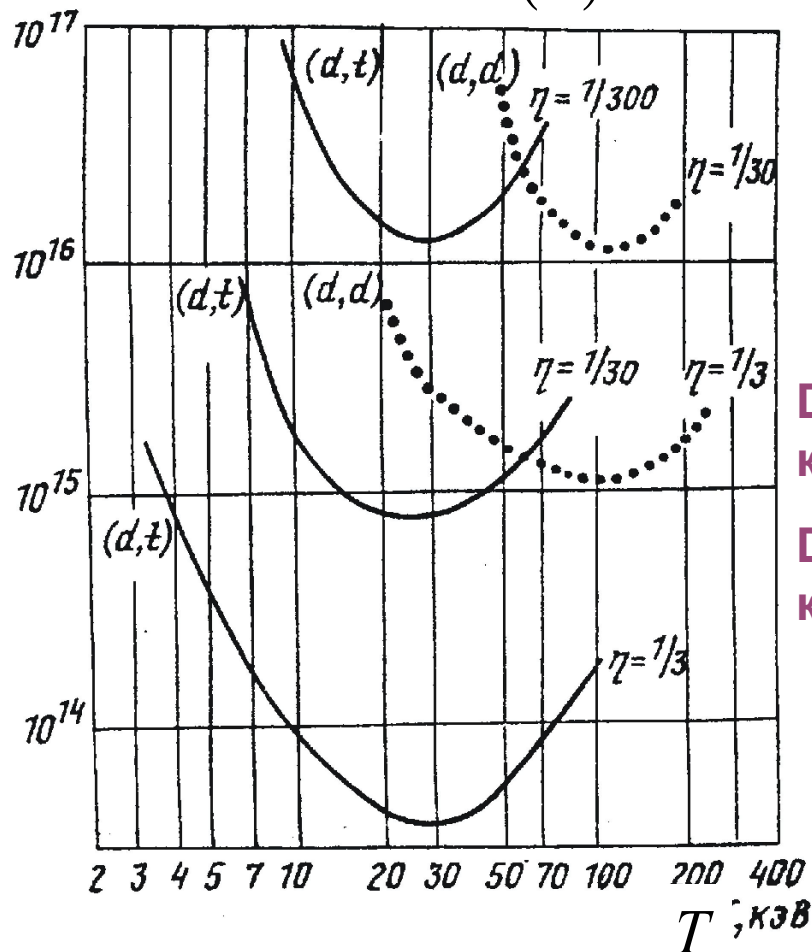
$$n\tau > \frac{12T}{\langle\sigma v\rangle E_{DT}} \equiv f(T)$$

!!! В критерий Лоусона входит произведение

$$n\tau$$

$n\tau_{LT, \text{ см}^{-3}\cdot\text{с}}$

$$n\tau \equiv f(T)$$



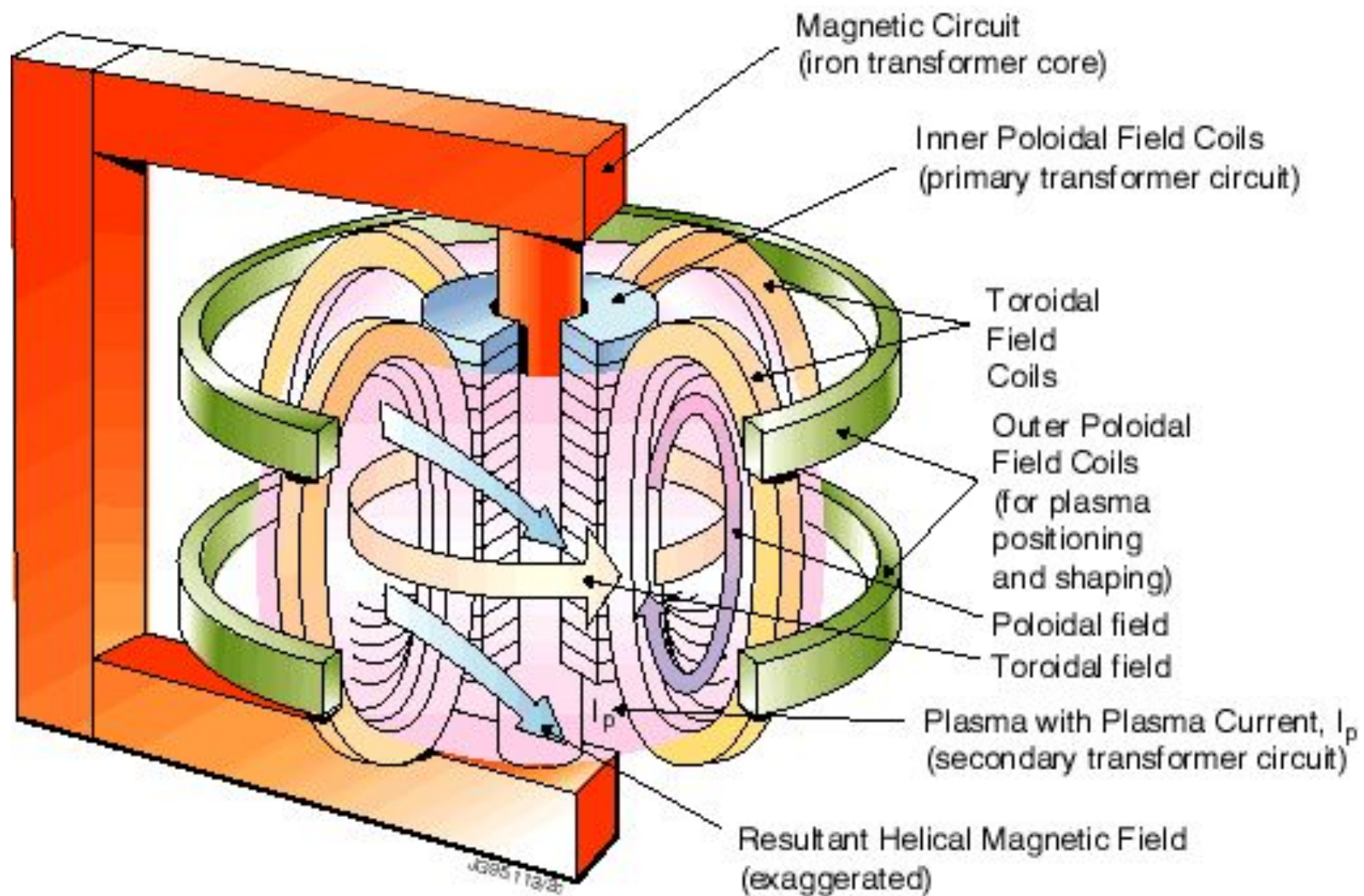
Минимумы кривых (для КПД 30%):

DT смесь  $n\tau > 0.5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup> с (20 кэВ)

DD реактор  $n\tau > 10^{15}$  см<sup>-3</sup> с (100 кэВ)

!!! В критерий Лоусона входит произведение

$n\tau$



# Понятие магнитной поверхности и вращательного преобразования

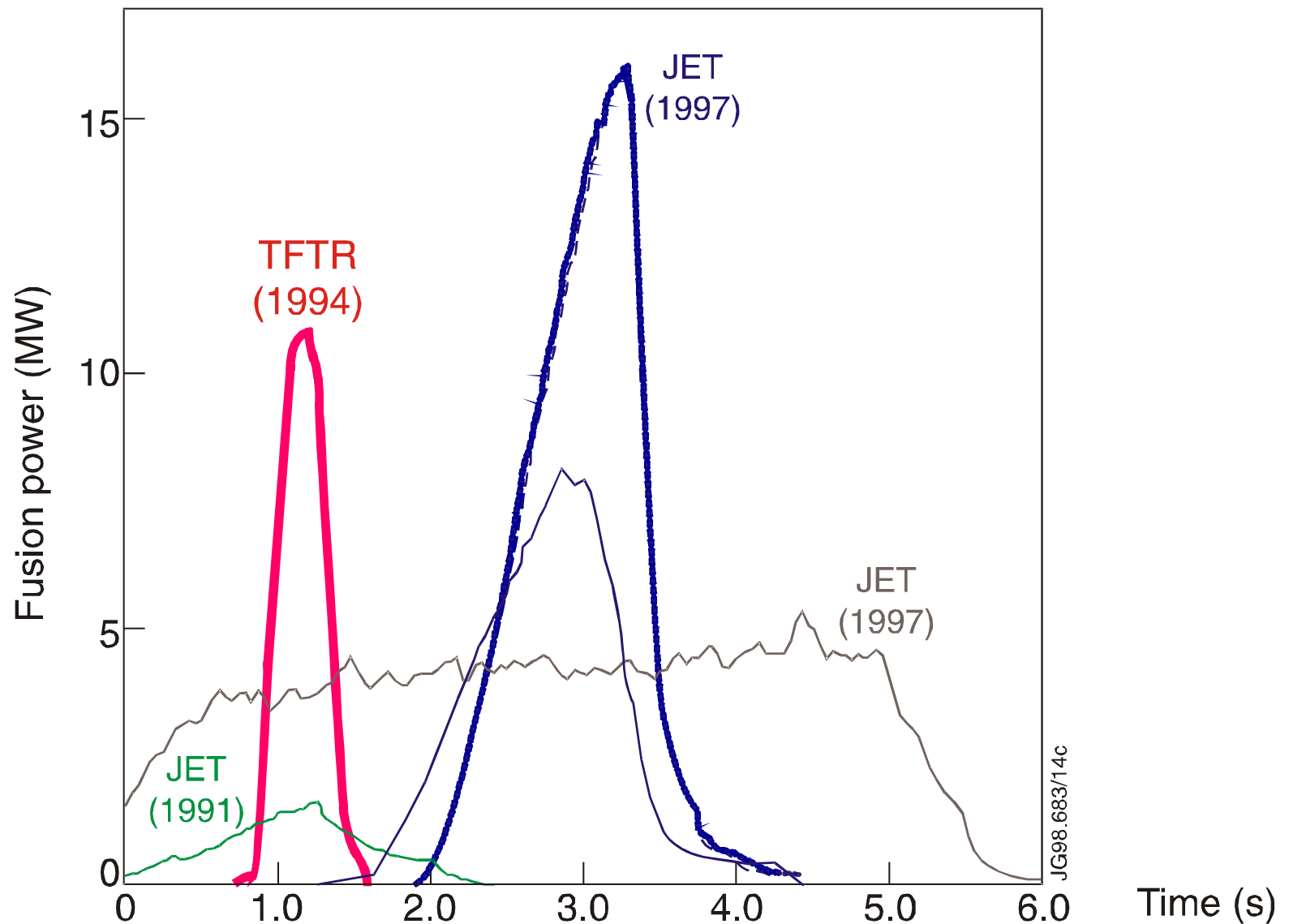
- \* "вращательное преобразование" - следствие наличия тока, текущего по плазме
- \* силовые линии незамкнуты и образуют магнитную поверхность
- \* магнитные поверхности являются вложенными
- \* условие равновесия плазмы  $\nabla P = [j\mathbf{B}]$  означает, что магнитные поверхности есть поверхности постоянного давления ( $\mathbf{B} \nabla P = 0$ ) и на них располагаются линии тока ( $j \nabla P = 0$ )
- \* через каждую точку проходит только одна поверхность (в вырожденных системах без вращательного преобразования - множество)
- \* магнитные поверхности разрушаются турбулентностью
- \* предельная величина плазменного тока (критерий Шафранова-Крускала)
$$q(r) = \frac{r B_z(r)}{R B_\theta(r)} > 1$$

(более точно - интегрирование по всей поверхности)

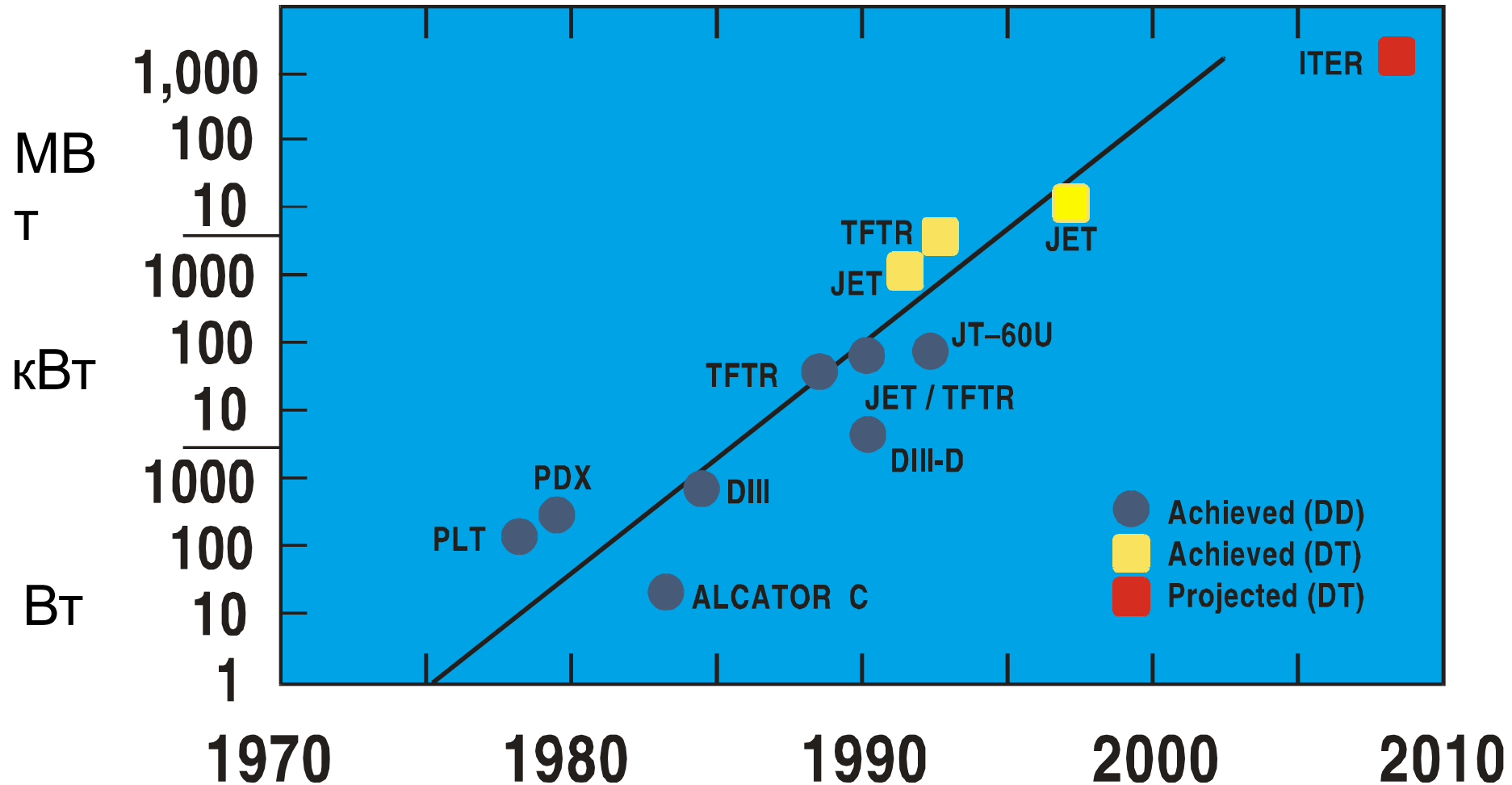
$q(r)$  - запас устойчивости, при  $q < 1$  развивается винтовая МГД-неустойчивость (выброс плазмы на стенку)
- \* величина  $q$  изменяется по малому радиусу, т.е. шаг "кручения" соседних магнитных поверхностей разный  $q' = dq/dr$  - shear

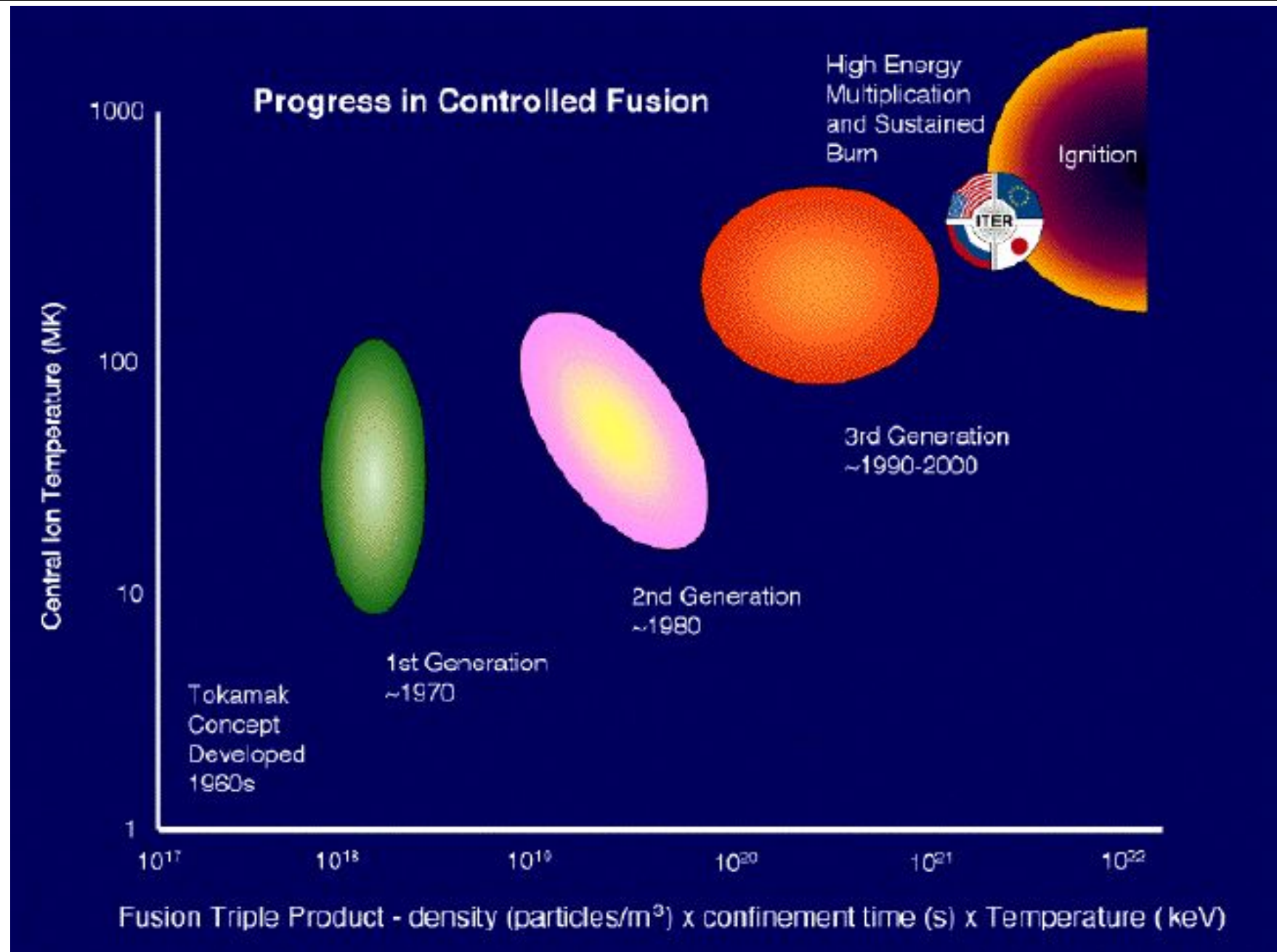
При увеличении тока в плазме растет ее нагрев, увеличивается давление, но одновременно приближается порог винтовой МГД-неустойчивости

## Лучшие результаты JET и TFTR с DT плазмой



# Прогресс в достигнутой Т/Я мощности



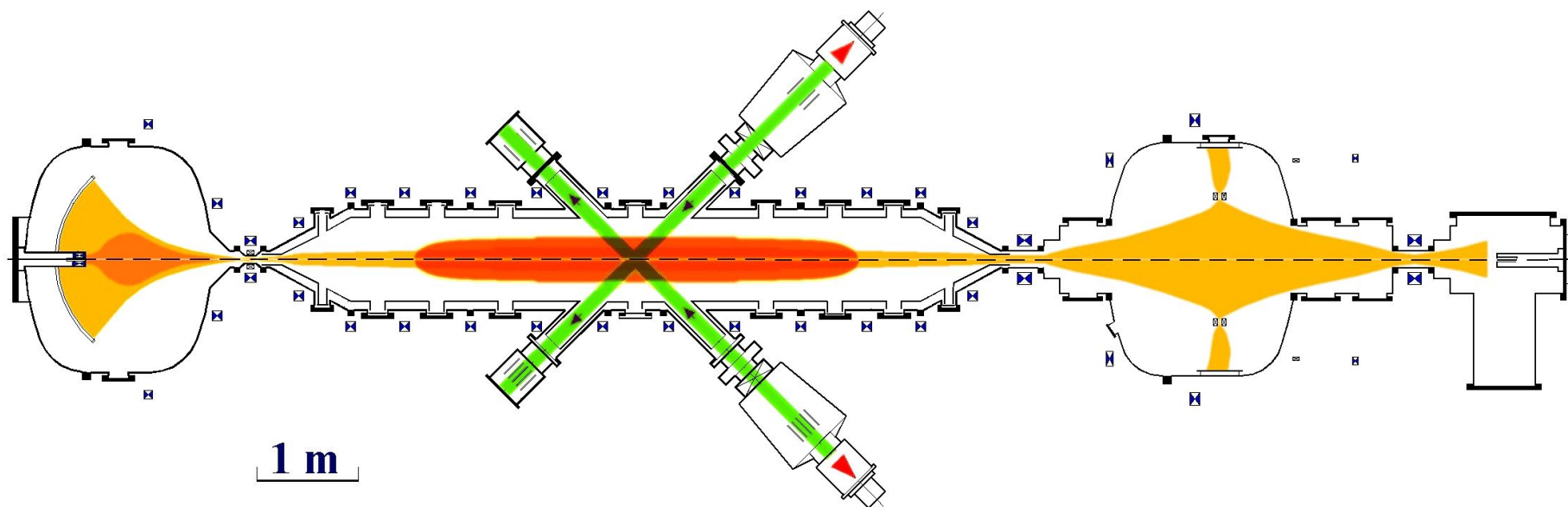








# Установка ГДЛ



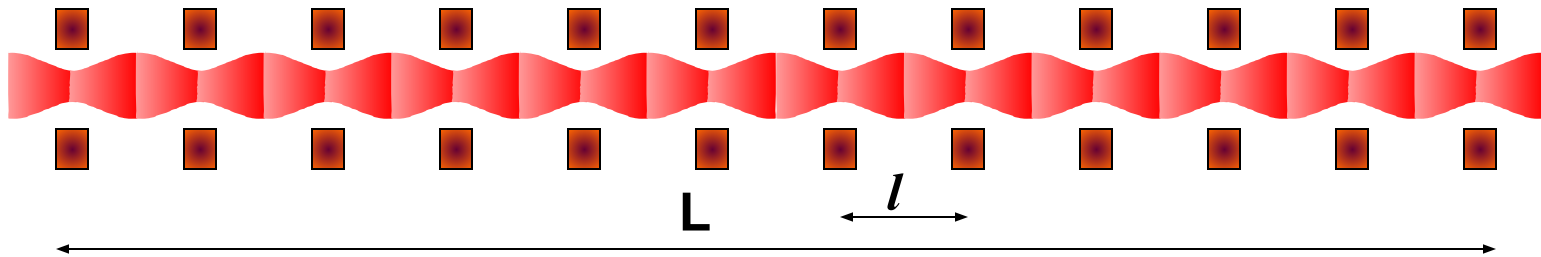
Газодинамическая ловушка:  $L \gg \lambda_i/R$

(длина установки много больше длины рассеяния на угол  $\theta_0$ ):

$$\tau \sim RL/2V_s.$$

# Многопробочное удержание - введение

## Принцип многопробочного удержания



Пусть длина соленоида  $L$  превышает длину свободного пробега  $\lambda_i$ . Если, в то же время, длина ячейки  $l \sim \lambda_i$ , то время продольного удержания существенно увеличивается по сравнению с классической пробочной ловушкой.

$$\tau \sim R^2 \frac{L^2}{\lambda_i V_{Ti}} = R^2 \frac{L}{\lambda_i} \tau_0$$

$$R = \frac{B_{\max}}{B_{\min}}$$

$$\tau_0 \sim \frac{L}{V_{Ti}} \quad \text{- время удержания в соленоиде}$$

# Заключение

---

- Достигнута ионная температура 2кэВ:  
Обнаружен эффект быстрого нагрева ионов
- Время жизни плазмы (0,5-1мс) соответствует расчетному для многопробочной ловушки в оптимальных условиях.
- Получена величина  $nT \sim (1.5 \div 3) \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$  при ионной температуре  $\sim 1$  кэВ.
- При плотности плазмы  $(1-3)10^{15} \text{ см}^{-3}$  найдены условия для макроскопической стабилизации плазмы :
  - стабилизация системы пучок-плазма происходит за счет формирования винтовой структуры магнитного поля с широм
  - впервые измерена радиальная зависимость вращательного преобразования
  - начаты исследования влияния винтовой конфигурации магнитного поля на удержание плазмы

## Дрейф электронов в слабоионизованной плазме

Для низкотемпературной плазмы основную роль играют столкновения с нейтральными частицами:

$$\tau_{ei} \rightarrow \tau_0$$

Тогда:

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{V} = -\left(\frac{ne^2}{m_e}\right)\tau_0\mathbf{E}$$

Скорость дрейфа электронов в слабоионизованной плазме:

$$V_d \sim \frac{eE}{m_e}\tau_0 \quad \tau_0 \sim \frac{1}{n_0\langle\sigma V\rangle} \quad V_d \sim \frac{eE}{m_e} \frac{1}{n_0\langle\sigma V\rangle}$$

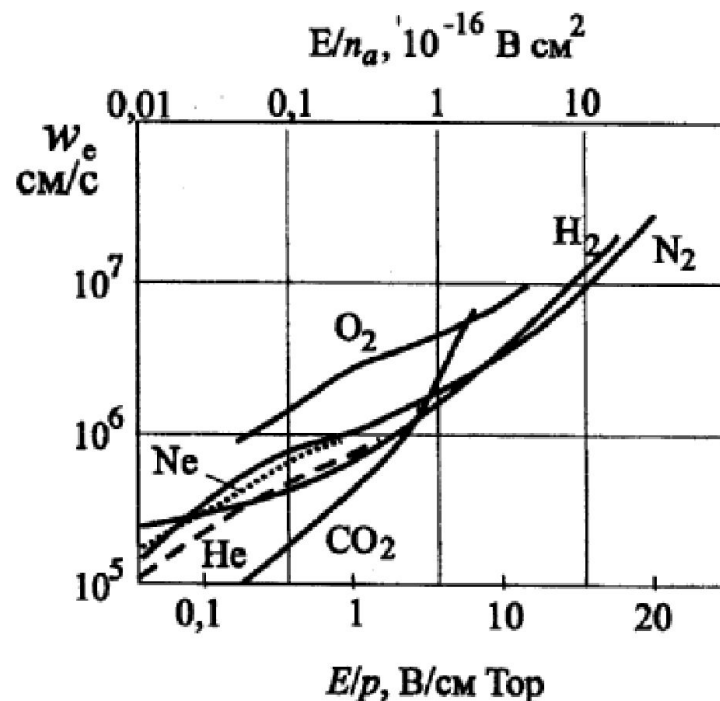
$$V_d = \left(\frac{e}{m_e}\right)\left(\frac{E}{n_0}\right)\left\langle\frac{1}{\sigma V}\right\rangle = \mu E$$

## Дрейф электронов в слабоионизованной плазме

$$V_d = \left( \frac{e}{m_e} \right) \left( \frac{E}{n_0} \right) \left\langle \frac{1}{\sigma V} \right\rangle = \mu E \quad \mu \text{ - ПОДВИЖНОСТЬ}$$

Параметр  $\left( \frac{E}{n_0} \right)$ , или  $E/p$

Рис. 7.9. Экспериментальные данные о скоростях дрейфа электронов в некоторых газах



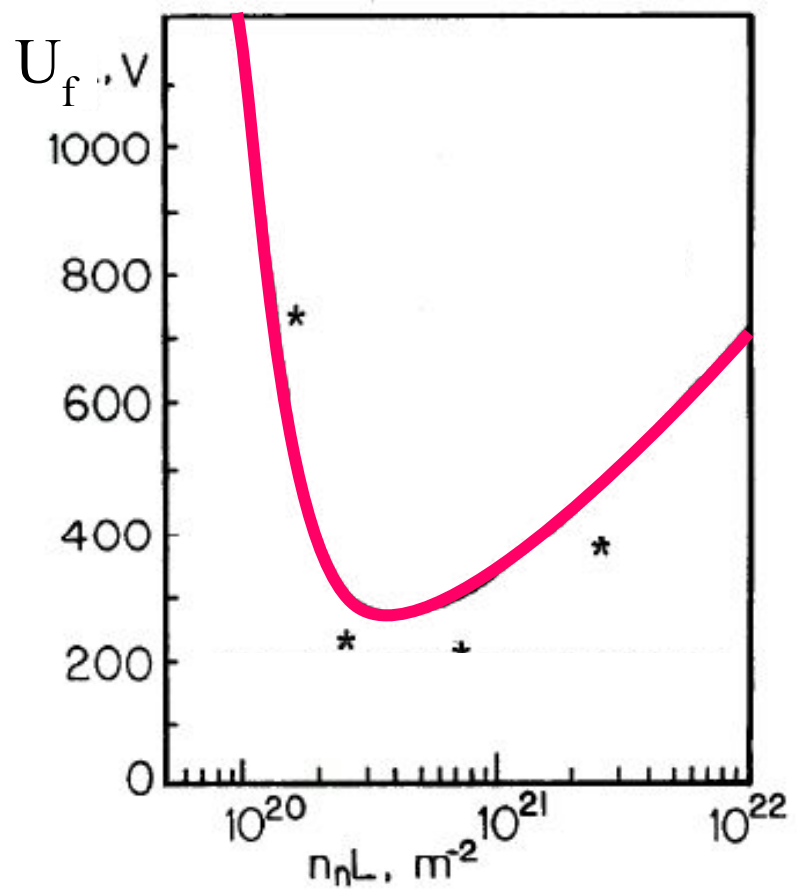
# Кривая Пашена

Напряжение пробоя  $U = E \cdot L$

$$U = \frac{BpL}{\ln \frac{ApL}{\ln(1+1/\gamma)}}$$

$$L_{opt} \sim \lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

↑  
длина свободного пробега



# Плазма в космосе



Colliding Galaxies NGC 4038 and NGC 4039

HST • WFPC2

## Гравитационная неустойчивость

Приводит к возникновению видимой структуры мира

Рассматривается однородная среда с учетом поля тяжести и давления вещества.

Было: В МГД-модели плазма рассматривается как сплошная среда.

$$\rho \mathbf{u} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad \text{Уравнение движения}$$

$\mathbf{u}(r, t)$  - скорость среды,  $p(r, t)$  - давление,  $\rho(r, t) = mn$  - плотность

$\mathbf{g}$  –аналог вектора  $\mathbf{E}$  в электродинамике

Электромагнитное поле	$E = e/r^2$	$f=e/r$	$E = -\text{grad}\phi$	$\Delta\phi=-4\pi\rho$
Гравитационное поле	$g = -Gm/r^2$	$f=-Gm/r$	$g = -\text{grad}\phi$	$\Delta\phi=-4\pi G\rho$



$$\rho_0 \delta \dot{u} = -\nabla \delta P + \rho_0 \delta \dot{g}$$

$$- \operatorname{div} \delta g = 4\pi G \delta \rho$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \delta u = 0$$

$$\delta P / P_0 = \gamma \delta \rho / \rho$$

Волновое уравнение

Пусть  $f = \operatorname{div} \delta u$   
 $c_s^2 = dP/d\rho = \gamma P_0 / \rho_0$   
 – скорость звука

Получим решение системы в виде:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta f + 4\pi G \rho_0 f$$

$\frac{\delta \rho}{\rho_0}$

Раскладываем возмущение на плоские волны:  $f = F(t) \exp(-ikr)$

$$F'' + (k^2 c_s^2 - \omega_0^2) F = 0,$$

$$\text{где } \omega_0^2 = 4\pi G \rho_0$$

$$F \propto \exp(vt),$$

$$\text{где } v = \sqrt{\omega_0^2 - k^2 c_s^2}$$

Характерный размер возмущения, для  $k_{\text{кр}}$

$$\lambda_{\text{Дж}} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}$$

-Джинсовская  
длина волны

Для малых  $k < k_{\text{кр}}$  возмущения  
экспоненциально нарастают → **неустойчивость**

Для больших  $k > k_{\text{кр}}$  получаем  
колебательные решения → **устойчивость**

На больших расстояниях преобладает  $F_{\text{тяг}}$   
На малых – давление препятствует сжатию

Показываю различные структуры:  
Крупномасштабная струк. Всел,  
Скопл. гал, галактика, шаровые скопл,  
звезды

# Звезда – система, находящаяся в равновесии

## 1. Гидродинамическое равновесие

$$-\nabla P + \rho \mathbf{g} = 0 \quad \text{для всех } r \quad \mathbf{g} = \frac{G}{r^2} m(r) = \frac{G}{r^2} 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

При  $P=P(\rho)$ , имеем систему

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}$$

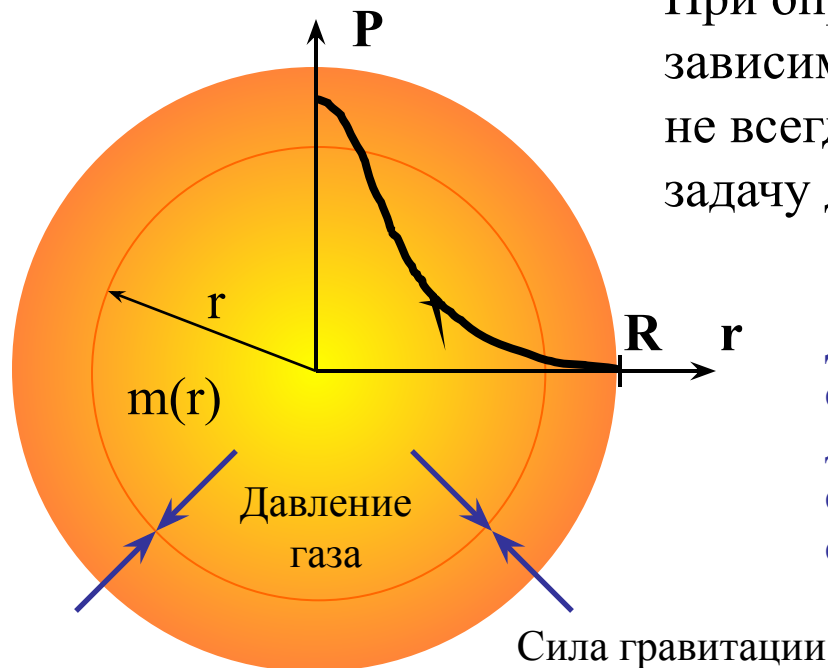
$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Для  $P \sim \rho^\gamma$ ,  $\gamma = 4/3$

при  $r \rightarrow 0$ ,  $P(r) = P(0) - kr^2$

при  $r \rightarrow \infty$ ,  $P(r) \sim (R-r)^4$

$k = \text{const}$



При определенной зависимости  $P=P(\rho)$  не всегда удастся решить задачу для данной  $M$ .

Для тяжелых звезд с  $M \sim 100 M_\odot$  давление излучения становится сравнимым с газовым давлением

## 2. Тепловое равновесие

Энергия, выделяемая в звезде = Энергии, излучаемой с поверхности

## Устойчивое равновесие звезд

В равновесии полная энергия звезды отрицательна  $W_0 = W_{\text{гр}} + W_{\text{т}} < 0$ .  
 (свойство любых гравитационно связанных систем)

$$W_{\text{гр}} = -2W_{\text{т}} \quad \text{- теорема вириала}$$

$$W_0 = -W_{\text{т}} = W_{\text{гр}}/2$$

Предположим, что мы **сообщили** звезде энергию (*нагрели*)

$\delta(W_{\text{гр}} + W_{\text{т}}) > 0$ , тогда

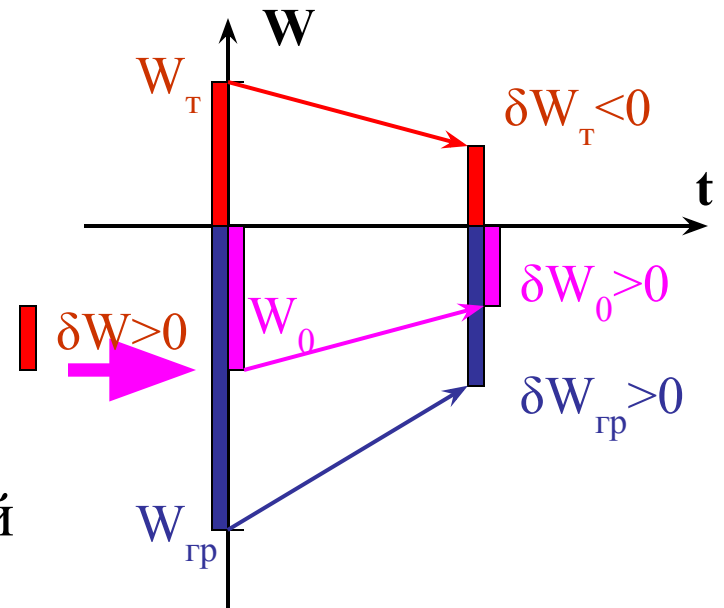
$\delta(-2W_{\text{т}} + W_{\text{т}}) > 0$

$\delta W_{\text{т}} < 0$  – звезда остыла!

Звезды имеют отрицательную  
теплоемкость!

При  $c > 0$  система была бы неустойчивой

Таким образом, излучая, звезды  
постепенно разогреваются  $\delta W_{\text{т}} > 0$ .

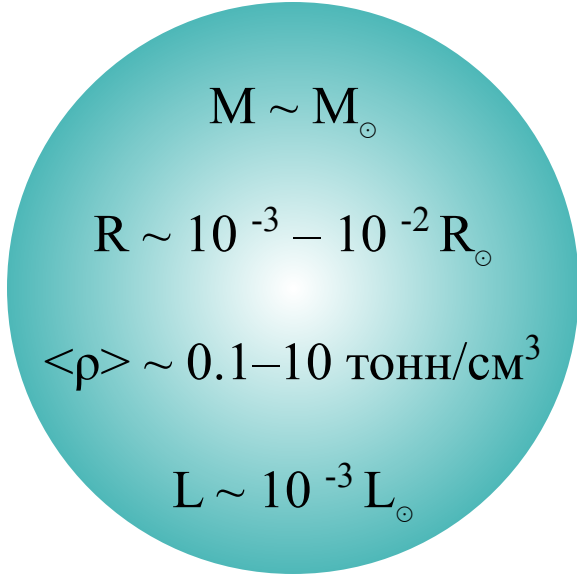


Разогревшись звезда  
расширится и остынет.

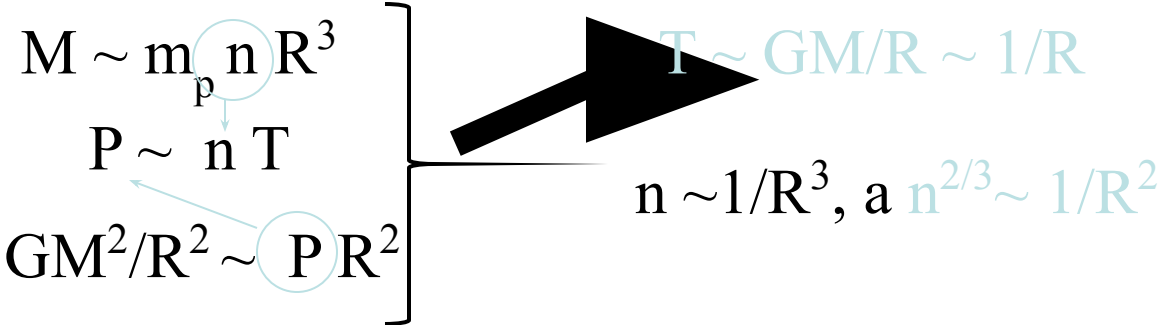
# Белые карлики – вырожденные звезды

Условие вырождения:  $\lambda_B \gtrsim n^{-1/3}$

$$T \lesssim \hbar^2 n^{2/3} / 2m$$

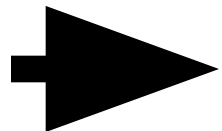


Невырожденная звезда



Видно, что в процессе сжатия звезды  $T$  растет медленнее, чем  $n^{2/3}$ , поэтому для электронов начинает выполняться условие вырождения.

Оценим давление вырожденного электронного газа,  $p = n^{1/3} \hbar$  – импульс каждого электрона  $P \sim$  потоку импульса  $\sim n^{1/3} \hbar \cdot (n^{1/3} \hbar / m) \cdot n \sim n \cdot (n^{1/3} \hbar)^2 / m$



$$P \sim n^{5/3} \hbar^2 / m$$

Давление вырожденного электронного газа не зависит от  $T$ .

Подставляя давление вырожденного электронного газа в уравнение гидродинамического равновесия

$$GM^2/R^2 \sim P R^2, \text{ получим, что}$$

$$R_{\text{бк}} \sim M^{-1/3}$$

Б.к. светятся в основном за счет расхода тепловой энергии.  
Роль термоядерных реакций в недрах незначительна.

Из-за малой площади поверхности **характерное время остывания Б.к.** составляет  $\sim 10 - 100$  млрд. лет (*время жизни Вселенной  $\sim 15$  млрд. лет*)

$$M_{\text{бк}} < 1.44 M_{\odot} \quad \text{- предел Чандрасекара}$$

При больших массах звезды электронный газ становится релятивистским

$$p_e \sim n^{1/3} \hbar \sim m_e c$$

Для вырожденного релятивистского электронного газа.

Давление газа уже не может обеспечить равновесие Б.к.

При массах больших  $1.44 M_{\odot}$  образуются нейтронные звезды

$$P \sim n^{4/3}$$