НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$$

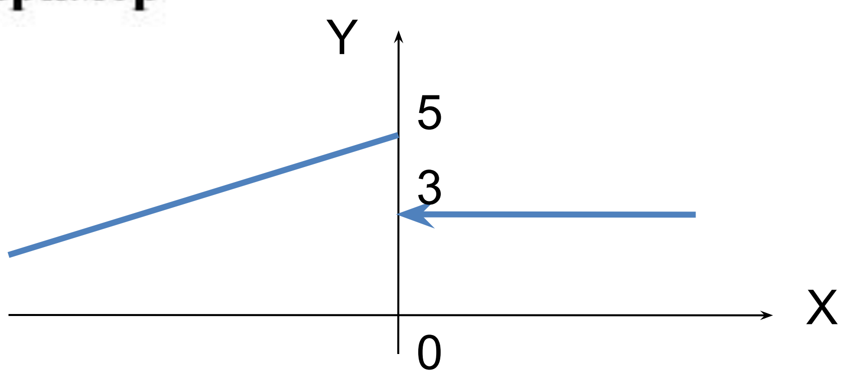
Точка x_0, называется точкой разрыва функции $f(x)$, если функция $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ ФУНКЦИИ

Разрыв первого рода. Точка x_0 называется точкой **разрыва первого рода** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Пример



$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 5$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 3$$

$x = 0$ – *точка разрыва первого рода.*

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ ФУНКЦИИ

Разрыв второго рода. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Пример

Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty;\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЫВОВ ФУНКЦИИ

Устранимый разрыв. Точка называется **устранимой точкой разрыва** функции $f(x)$, если в этой точке

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \neq f(x_0)$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если на некотором множестве X определена функция $g(x)$ с множеством значений G, а на множестве G определена функция $f(g)$, то функция $f(g(x))$ называется сложной функцией.

Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(g)$ непрерывна в точке $g_0=g(x_0)$, то функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Вертикальные асимптоты

Если при $x \to x_0$ (слева или справа) расстояние d от точки M кривой $y = f(x)$ до прямой $x = x_0$ стремится к нулю, а точка M неограниченно удаляется от начала координат (вверх или вниз), то прямая $x = x_0$ есть **вертикальная асимптота** этой кривой.

Следовательно, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота графика этой функции.

Горизонтальные асимптоты

Если расстояние d от точки M кривой $y = f(x)$ до прямой $y = b$ стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат (вправо или влево), то прямая $y = b$ есть **горизонтальная асимптота** этой кривой.

Итак, чтобы найти горизонтальные асимптоты графика функции $y = f(x)$, надо отыскать пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b_1,$$

Если пределы конечные и различные, то прямые $y = b$ и $y = b_1$ будут горизонтальными асимптотами.

Наклонные асимптоты

Прямая $y = kx + b$, называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0\right)$$

Чтобы найти наклонную асимптоту графика функции *y=f(x)* следует найти пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=b$$

Если оба предела существуют и конечные, то прямая $y=kx+b$ – наклонная асимптота.

Примеры.

Исследовать на непрерывность функцию. Найти асимптоты графика функции, если они существуют. Построить график функции.

1) $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$

$$D(y):(-\infty;2)\cup(2;+\infty)\Rightarrow x=2 - \textit{точка разрыва}.$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x-1}{x-2}=\left[\frac{2(2-0)-1}{(2-0)-2}=\frac{3}{-0}\right]=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2x-1}{x-2}=\left[\frac{2(2+0)-1}{(2+0)-2}=\frac{3}{+0}\right]=+\infty$$

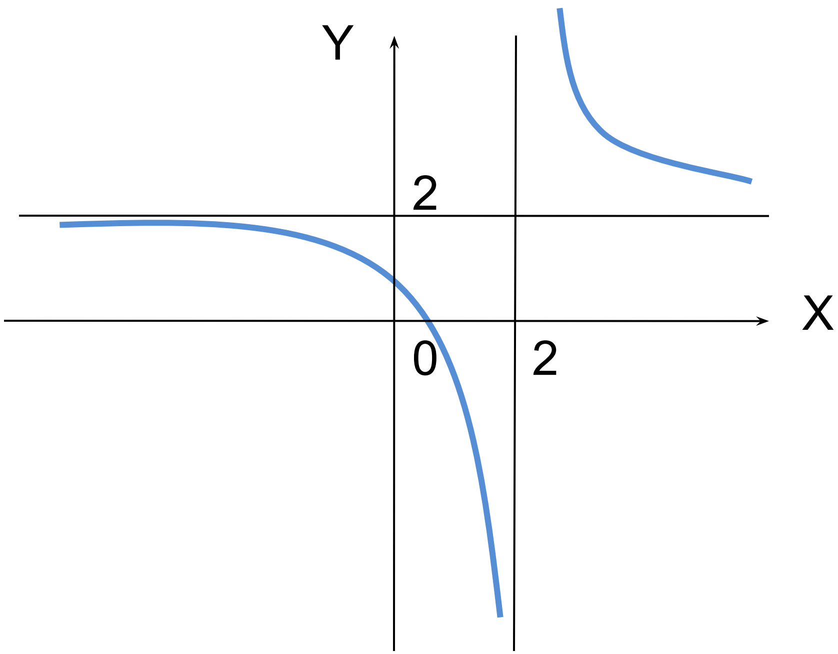
$$\Rightarrow x=2 - \textit{точка разрыва второго рода},$$

$$\textit{прямая } \boxed{x=2 - \textit{вертикальная асимптота}.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2.$$

$$\Rightarrow \boxed{\textit{прямая } y = 2 - \textit{горизонтальная асимптота}.}$$



2) $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$

$$D(y):(-\infty;3)\cup(3;+\infty)\Rightarrow x=3-\textit{точка разрыва}.$$

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[2^{\frac{1}{(3-0)-3}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \right] = 0;$$

$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[2^{\frac{1}{(3+0)-3}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right] = \infty.$$

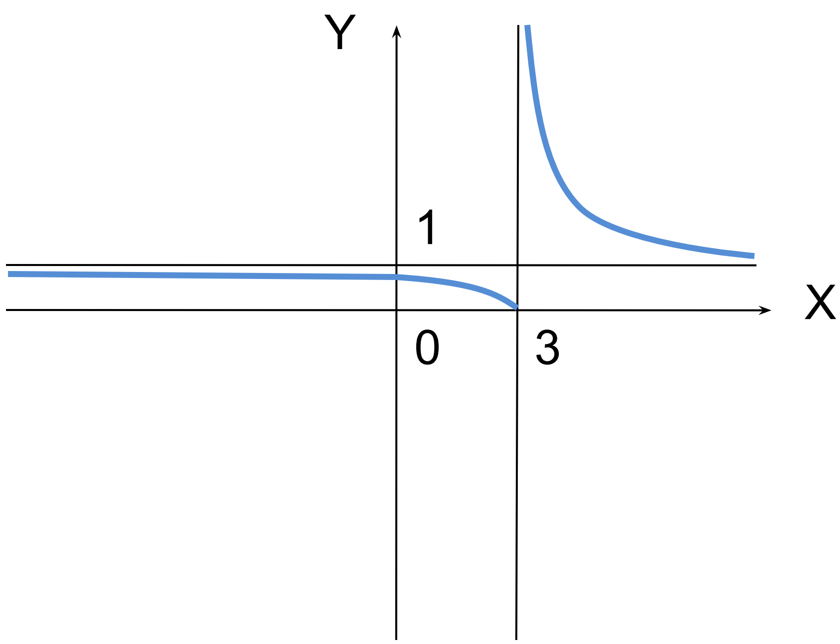
$\Rightarrow x = 3 - \textit{точка разрыва второго рода},$

прямая $\boxed{x = 3 - \textit{вертикальная асимптота при } x \to (3+0).}$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[2^{\frac{1}{-\infty-3}} = 2^{\frac{1}{-\infty}} = 2^{-0} = \frac{1}{2^0} \right] = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left[2^{\frac{1}{+\infty-3}} = 2^{\frac{1}{+\infty}} = 2^{+0} \right] = 1.$$

$\Rightarrow$ *прямая* $y = 1$ – *горизонтальная асимптота*.



3) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$$D(y):(-\infty;1)\cup(1;+\infty)\Rightarrow x=1-\textit{точка разрыва.}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=\left[\frac{(1-0)^2+1}{(1-0)-1}=\frac{2}{-0}\right]=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=\left[\frac{(1+0)^2+1}{(1+0)-1}=\frac{2}{+0}\right]=+\infty;$$

$\Rightarrow x=1-$ *точка разрыва второго рода,*

прямая $\boxed{x=1-\textit{вертикальная асимптота}.}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\left[\frac{(-\infty)^2+1}{-\infty-1}=\frac{\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty;$$

$\boxed{\Rightarrow \textit{горизонтальных асимптот нет}.}$

Исследуем наличие наклонной асимптоты, найдем пределы:

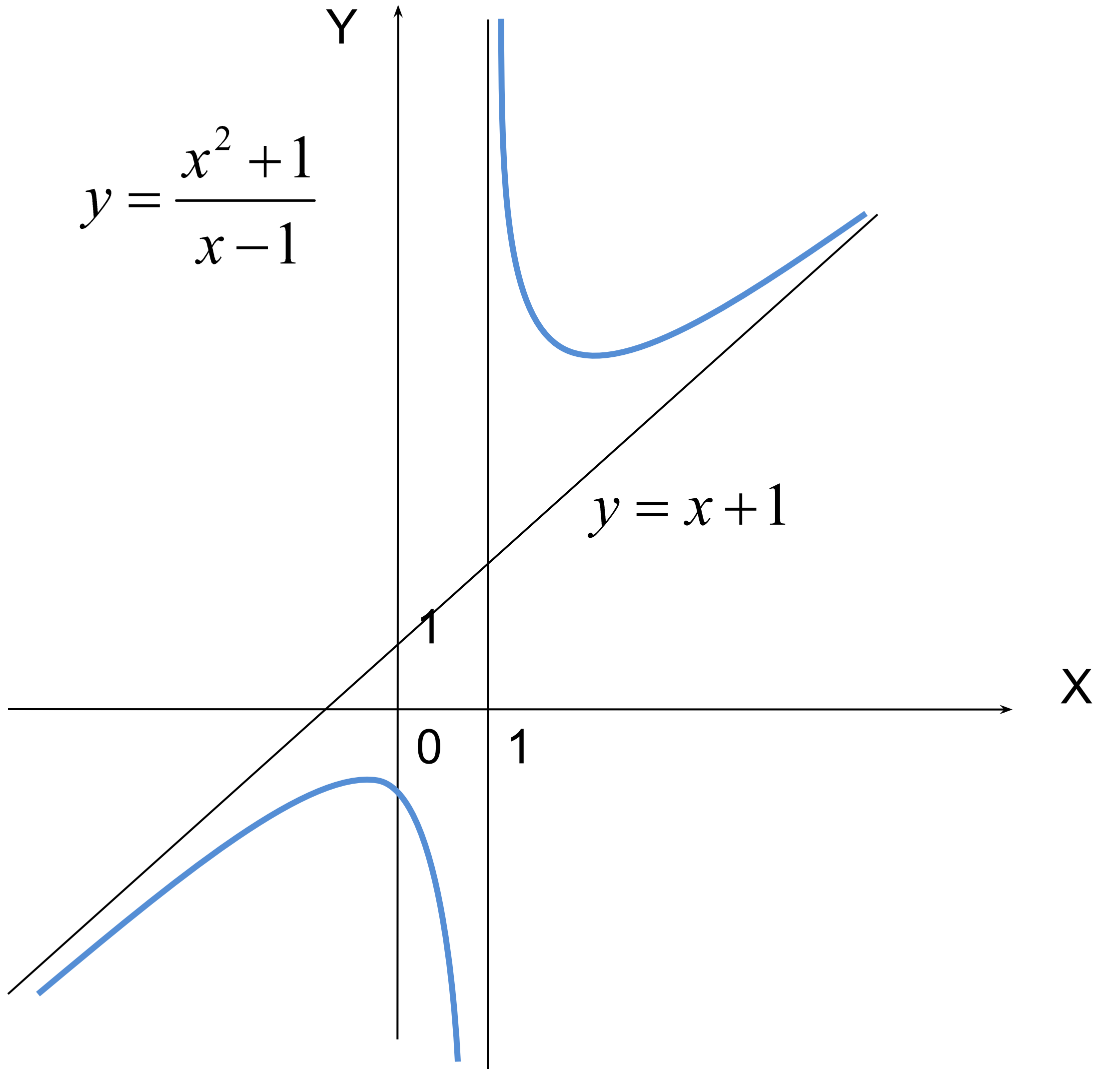
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)x}=1\Rightarrow k=1.$$

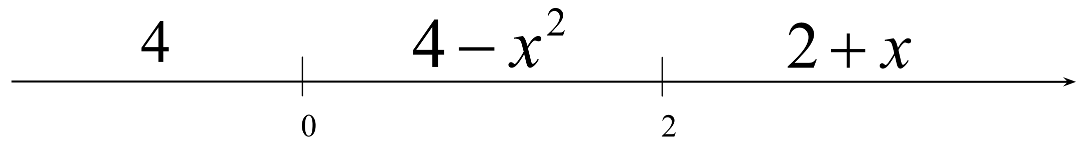
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x-1}-1\cdot x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}=1\Rightarrow b=1.$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x + 1 - \textit{наклонная асимптота}}.$$



$$4)\ y=\begin{cases} 4, & x\le 0;\\ 4-x^2, & 0<x\le 2;\\ 2+x, & x>2.\end{cases}$$



$x=0,\ x=2$ – *точки возможного разрыва.*

$x=0$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} 4=4;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(4-x^2\right)=4.$$

$\Rightarrow x=0$ – *не является точкой разрыва.*

$x=2$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(4-x^2\right)=0;$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\left(2+x\right)=4.$$

$\Rightarrow x=2$ – *точка разрыва I – го рода.*

$$y = \begin{cases} 4\;, & x \le 0; \\ 4 - x^2, & 0 < x \le 2; \\ 2 + x, & x > 2. \end{cases}$$