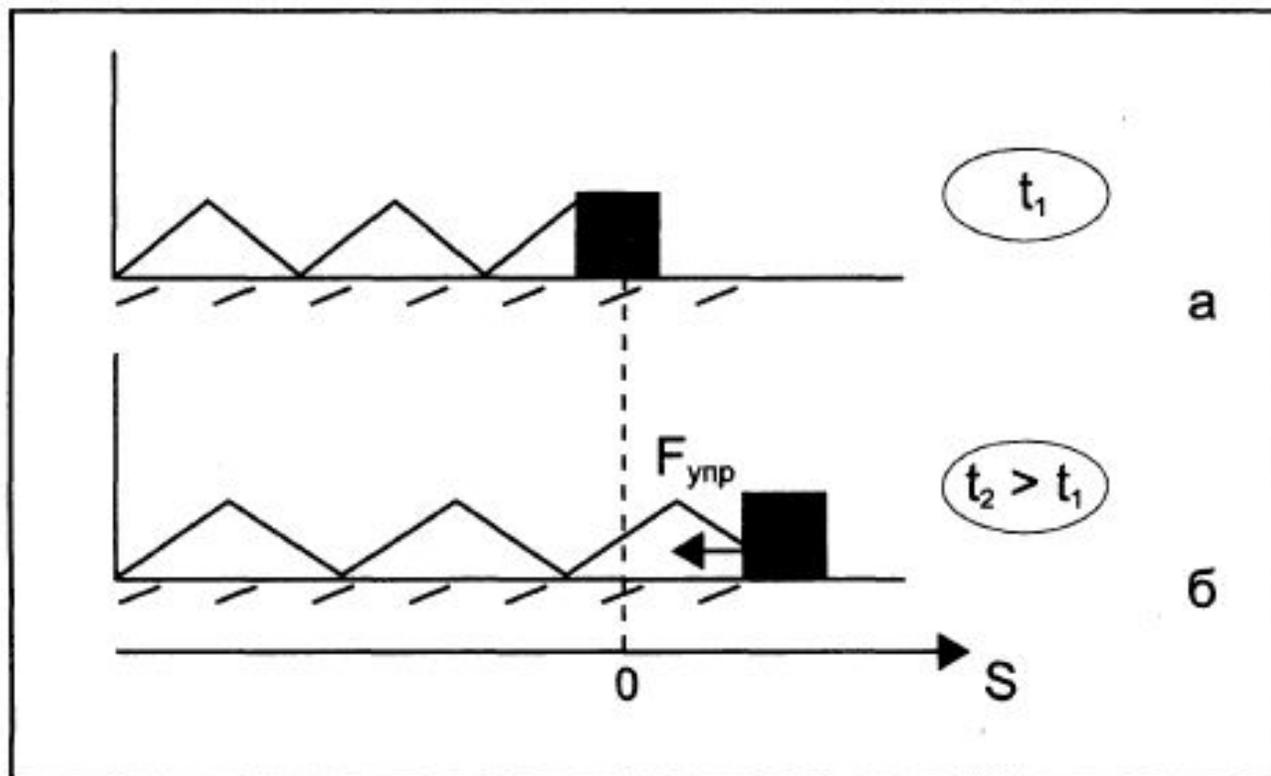


# Механика, механические колебания и термодинамика

# Раздел I. Механические колебания

## I.1. Гармонические колебания

Выведем тело, прикрепленное к пружине (рис. I.1, а), о котором только что шла речь, из положения равновесия (рис. I.1, б).



**Рис. I.1:** а – колебательная система в момент времени  $t_1$ ; б – колебательная система в момент времени  $t_2$ : прикрепленное к пружине тело выведено из положения равновесия. На оси представлено смещение тела от положения равновесия  $S$ .

В этом случае на него действует упругая сила, пропорциональная смещению от положения равновесия и вычисляемая по формуле  $F_{\text{упр}} = -kS$  (закон Гука). Тогда, согласно второму закону Ньютона, уравнение движения (в проекции на ось  $S$ ) имеет вид:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kS. \quad (I.1)$$

Деля обе части равенства на массу  $m$  и вводя обозначение  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , получим уравнение движения в виде линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0, \quad (I.2)$$

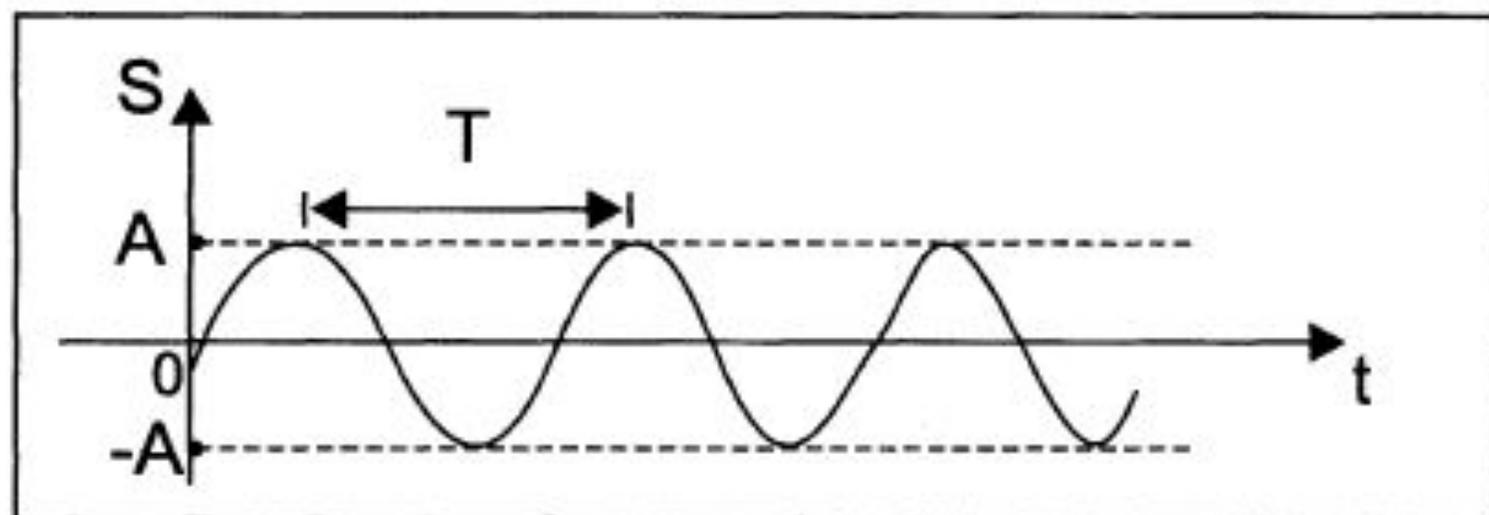
в котором постоянный коэффициент ( $\omega_0^2$ ) зависит только от параметров колебательной системы: массы тела  $m$  и коэффициента жесткости  $k$ .

В курсе математики доказывается, что решением уравнения является следующая функция смещения от времени\*:

$$S(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (I.3)$$

где  $A$  и  $\varphi_0$  — две произвольные постоянные, для определения которых необходимо знать начальные условия: смещение  $S_0$  и скорость  $V_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ . Это значит, что если на движущийся элемент системы массой  $m$  действует только упругая сила  $F_{\text{упр}} = -kS$ , то он совершает гармонические колебания с постоянной амплитудой  $A$ , частота которых  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и период  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$  определяются параметрами системы ( $m$  и  $k$ ).

Графически решение (I.3) представлено на рис. I.2 ( $\varphi_0 = 0$ ).



**Рис. I.2.** График зависимости смещения тела от положения равновесия  $S$  от времени  $t$ . На графике показаны амплитуда колебаний  $A$  и период колебаний  $T$ .

Этот график наглядно иллюстрирует характеристики гармонического колебания:

амплитуда колебаний ( $A$ ) — наибольшее (максимальное) смещение от положения равновесия;

период колебаний ( $T$ ) — время, за которое происходит одно полное колебание;

частота колебаний ( $\nu$ ) — число колебаний, совершаемых системой за единицу времени:  $\nu = \frac{1}{T}$ . Единицей частоты является герц (Гц):  $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$ ;

присутствующий в уравнении коэффициент  $\omega_0$  называют циклической (круговой) частотой колебаний — она связана с периодом соотношением  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ .

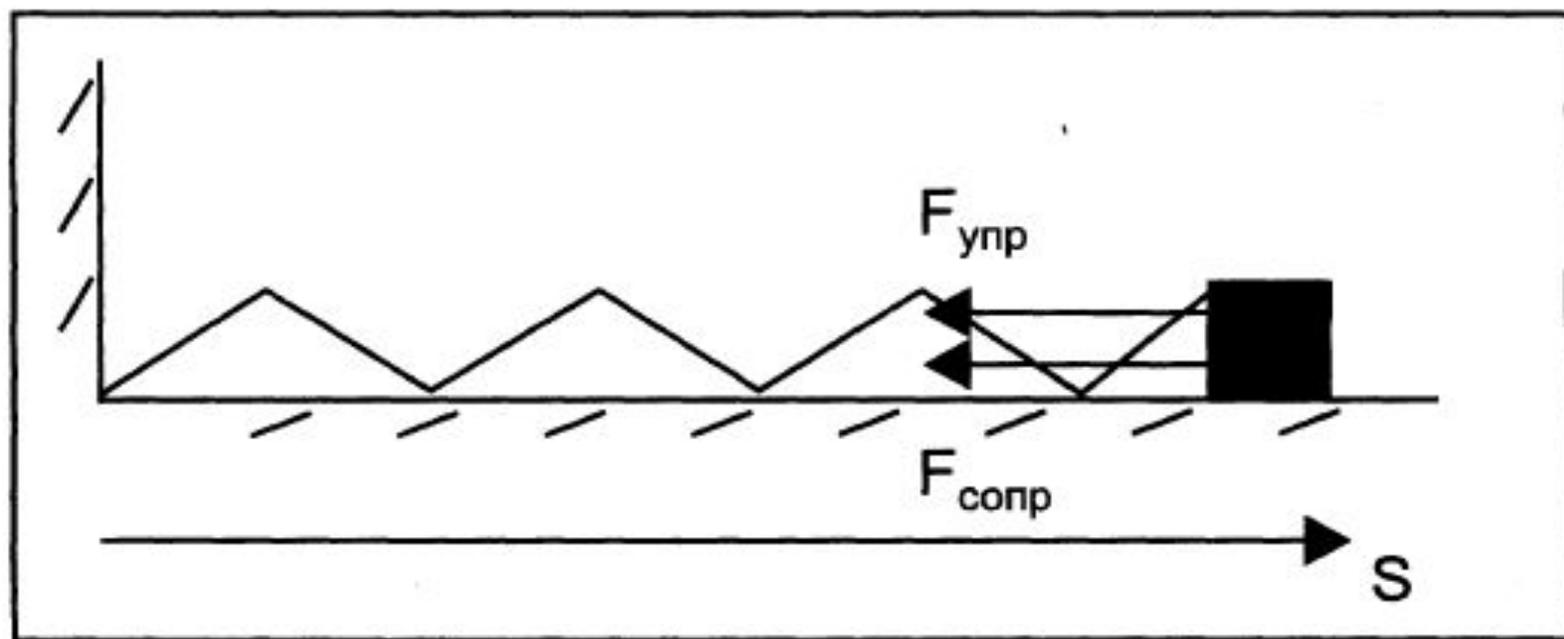
Аргумент  $(\omega t_0 + \varphi_0)$  функции синус называют фазой колебаний, а величину  $\varphi_0$  — начальной фазой.

## 1.2. Затухающие колебания

Пусть теперь на уже рассмотренную ранее колебательную систему кроме упругой силы действует и сила сопротивления среды. Рассмотрим один частный случай (важный в практическом отношении), когда сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела:

$$F_{\text{сопр}} = -r \cdot v. \quad (1.4)$$

(знак минус указывает на то, что сила сопротивления направлена противоположно скорости;  $r$  называют коэффициентом сопротивления).



**Рис. 1.3.** Силы, действующие на колебательную систему: сила упругости и сила сопротивления.

Известно, что такие силы возникают при движении тел в вязкой среде с малыми скоростями. Уравнение движения в этом случае принимает вид:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -rv - kS. \quad (1.5)$$

Перенося все члены в левую часть равенства и учитывая, что  $v = \frac{dS}{dt}$ , получим:

Переносим все члены в левую часть равенства и учитывая, что  $v = \frac{dS}{dt}$ , получим:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} + r \cdot \frac{dS}{dt} + kS = 0. \quad (I.6)$$

Разделив все члены этого уравнения на массу  $m$  и обозначив  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ;  $\frac{r}{m} = 2\beta$ , получим уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0. \quad (I.7)$$

Это также линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, зависящими от параметров колебательной системы. Оно отличается от (I.1) наличием слагаемого с первой производной  $\frac{dS}{dt}$ .

Можно показать, что его решение имеет вид:

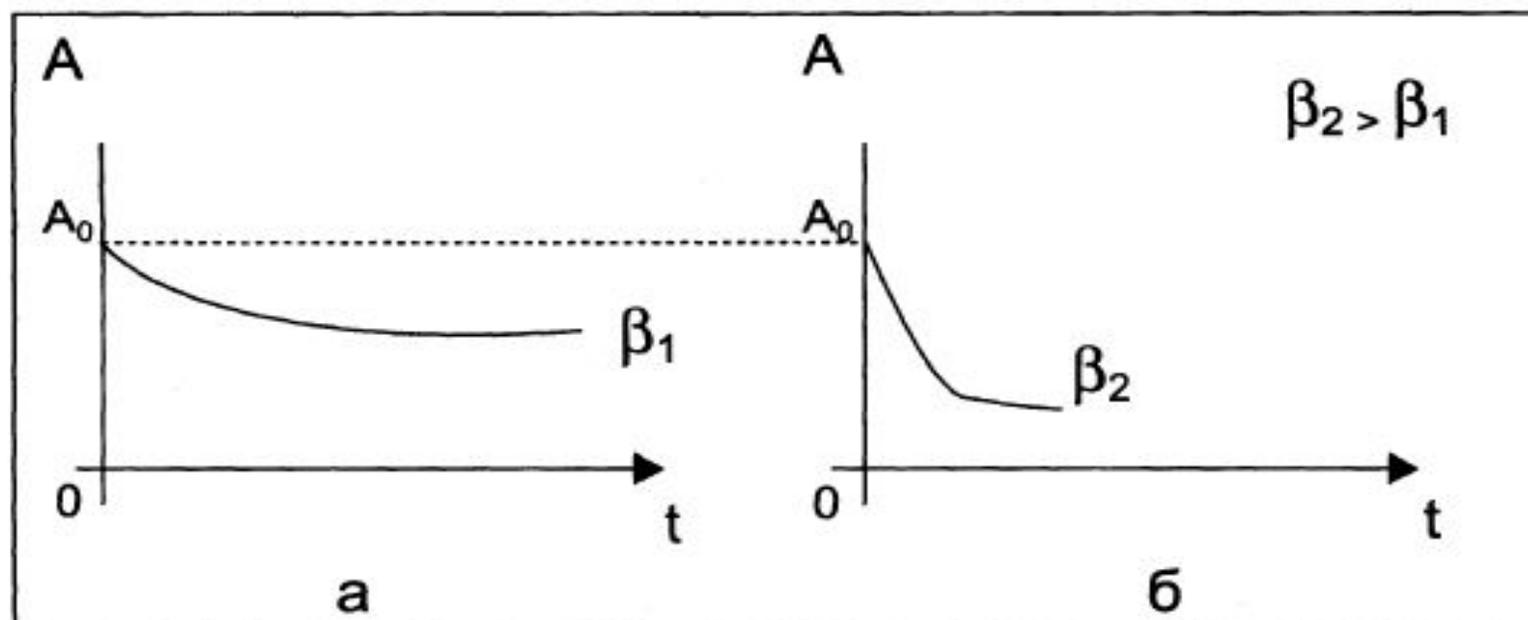
$$S(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (I.8)$$

Из соотношения (I.8) видно, что в результате совместного действия упругих сил  $F_{\text{упр}} = -kS$  и сил сопротивления  $F_{\text{сопр}} = -\gamma v$  система совершает колебательное движение, амплитуда которого

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \quad (I.9)$$

убывает с течением времени по экспоненциальному закону; другими словами, в системе возникают затухающие колебания (рис. I.4).

Частота  $\omega$  затухающих колебаний, как следует из (I.7), зависит не только от параметров системы ( $k$ ,  $m$ ), но и от коэффициента  $\gamma$ , характеризующего силу сопротивления:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Ясно, что



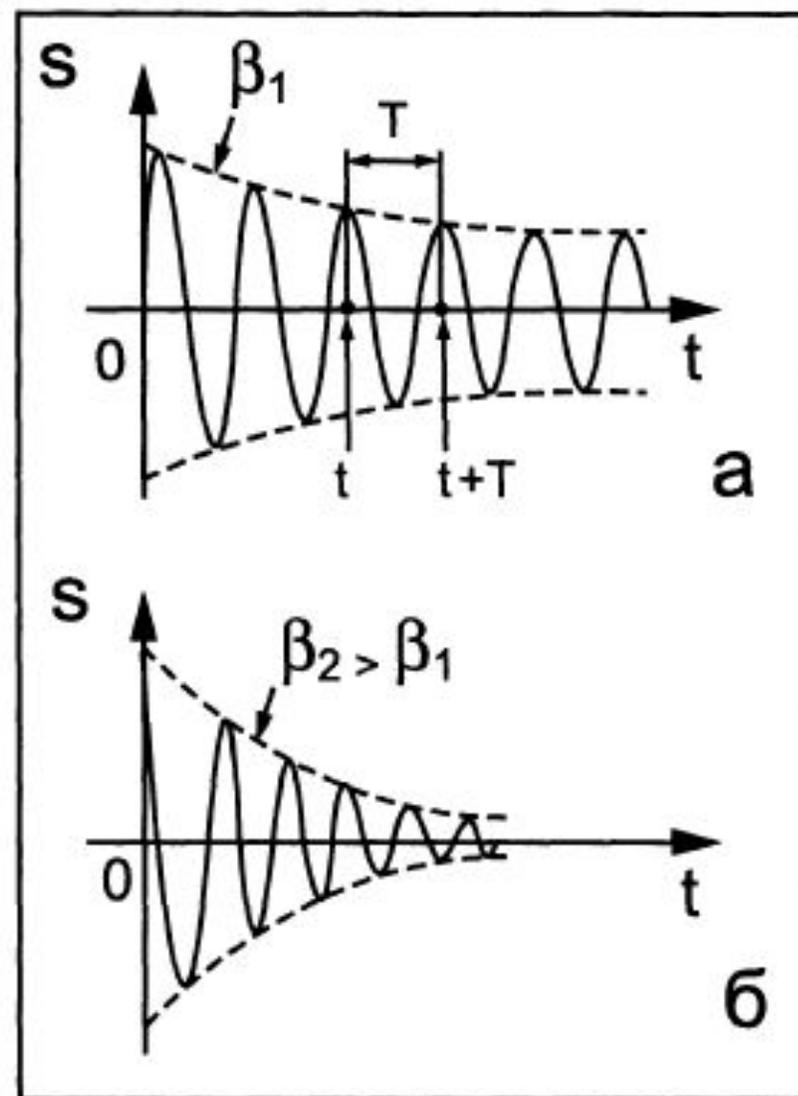
**Рис. 1.4.** Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени в средах с различными коэффициентами затухания. При этом коэффициент затухания в первой среде  $\beta_1$  (а) меньше, чем коэффициент затухания во второй среде  $\beta_2$  (б).

$\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , т.е. частота затухающих колебаний меньше частоты, которую бы имела система в отсутствие сопротивления (т.е. частоты собственных колебаний). Период затухающих колебаний  $T$  больше периода  $T_0$  свободных колебаний  $T > T_0$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0. \quad (I.10)$$

Если  $\beta$  мало, то период  $T \approx T_0$ . При  $\beta^2 \rightarrow \omega_0^2$  частота уменьшается до нуля, а период возрастает до бесконечности. При  $\beta^2 > \omega_0^2$  частота становится мнимой. Физически это означает, что при  $\beta^2 > \omega_0^2$  колебания не возникают: система, выведенная из положения равновесия, медленно (апериодически) возвращается в первоначальное положение.

Обсудим далее еще одну важную величину. На рис. 1.5 приведены графики изменения смещения для двух значений  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Большему значению  $\beta$  (большему  $\gamma$ ) соответствует более быстрый спад амплитуды. Из приведенных на рис. 1.5 графиков видно, что величина  $\beta$  характеризует быстроту затухания колебаний (по этой причине  $\beta$  называют коэффициентом затухания). Смысл этой величины как характеристики затухания можно установить из следующих рассуждений.



**Рис. 1.5.** Зависимость смещения  $S$  от времени  $t$  при затухающих колебаниях в средах с различными коэффициентами затухания. При этом коэффициент затухания в первой среде  $\beta_1$  (а) меньше коэффициента затухания во второй среде  $\beta_2$  (б).

Рассмотрим отношение двух амплитуд, разделенных во времени интервалом в 1 период (см. рис. I.5, а), — это отклонения системы от положения равновесия в моменты времени  $t$  и  $t+T$ :

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (\text{I.11})$$

Логарифмируя полученное выражение, получим:

$$\ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T. \quad (\text{I.12})$$

Так как  $\beta = \frac{\Gamma}{2m} = \text{const}$ . Для данной системы выражение показывает, что отношение двух амплитуд, разделенных интервалом в 1 период, всегда одно и то же.

Быстроту затухания часто характеризуют логарифмическим декрементом затухания, которым называется величина, равная натуральному логарифму отношения двух последовательных амплитуд, разделенных промежутком времени, равным периоду (см. рис. 1.5, а). Обозначая логарифмический декремент затухания через  $\lambda$ , имеем:

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T, \text{ или } \lambda = \beta T. \quad (1.13)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания тем больше, чем больше коэффициент затухания. Поскольку  $\beta$  и  $T$  постоянны для конкретной системы, то и  $\lambda = \text{const}$ . А это означает, что отношение двух амплитуд, отстоящих друг от друга во времени на 1 период, постоянно для данной системы и не зависит от выбора момента времени  $t$ . Возьмем ли мы  $t$  в начале колебаний, когда амплитуды еще велики, или к концу, когда амплитуды малы, отношение  $A_t$  и  $A_{t+T}$  остается неизменным. Такая особенность в изменении амплитуды обусловлена принятым характером зависимости сил трения от скорости ( $F_{\text{сопр}} = -rv$ ).

### 1.3. Вынужденные колебания

Вынужденными называют такие колебания, которые возникают в колебательной системе при действии на нее внешней, периодически изменяющейся силы, называемой вынуждающей силой.

Разберем простейший случай возникновения вынужденных колебаний под действием силы, изменяющейся по закону синуса:  $F_{\text{вын}} = F_0 \cdot \sin \omega t$ , где  $F_0$  — амплитуда вынуждающей силы (ее максимальное значение);  $\omega$  — циклическая частота колебаний этой силы.

Пусть система характеризуется параметрами  $k$ ,  $m$ ,  $r$  (трение вязкого типа). На систему действуют сила упругости  $F_{\text{упр}} = -kS$ , сила трения  $F_{\text{сопр}} = -rv$  и вынуждающая сила  $F_{\text{вын}} = F_0 \cdot \sin \omega t$ . Тогда уравнение движения принимает вид:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kS - rv + F_0 \cdot \sin \omega t. \quad (I.14)$$

Разделив все члены этого уравнения на  $m$  и введя обозначения  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{r}{2m} = \beta$ ,  $\frac{F_0}{m} = f_0$ , получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = f_0 \cdot \sin \omega t. \quad (I.15)$$

Оно отличается от однородного уравнения наличием члена, не зависящего от  $S$ :  $f_0 \cdot \sin \omega t$ .

Общее решение  $S(t)$  такого уравнения равно сумме общего решения  $S_1(t)$  уравнения без правой части (когда она равна нулю) и частного решения  $S_2(t)$  неоднородного уравнения (I.15):

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t). \quad (I.16)$$

Общее решение уравнения без правой части мы уже получили; это выражение (I.8). Оно соответствует свободным затухающим колебаниям системы. За достаточно большой промежуток времени свободные колебания практически затухнут и в (I.16) останется только второе слагаемое.

Таким образом, функция  $S=S_2(t)$ , являясь частным решением, описывает вынужденные колебания системы. Будем ее искать в следующем виде:

$$S_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (I.17)$$

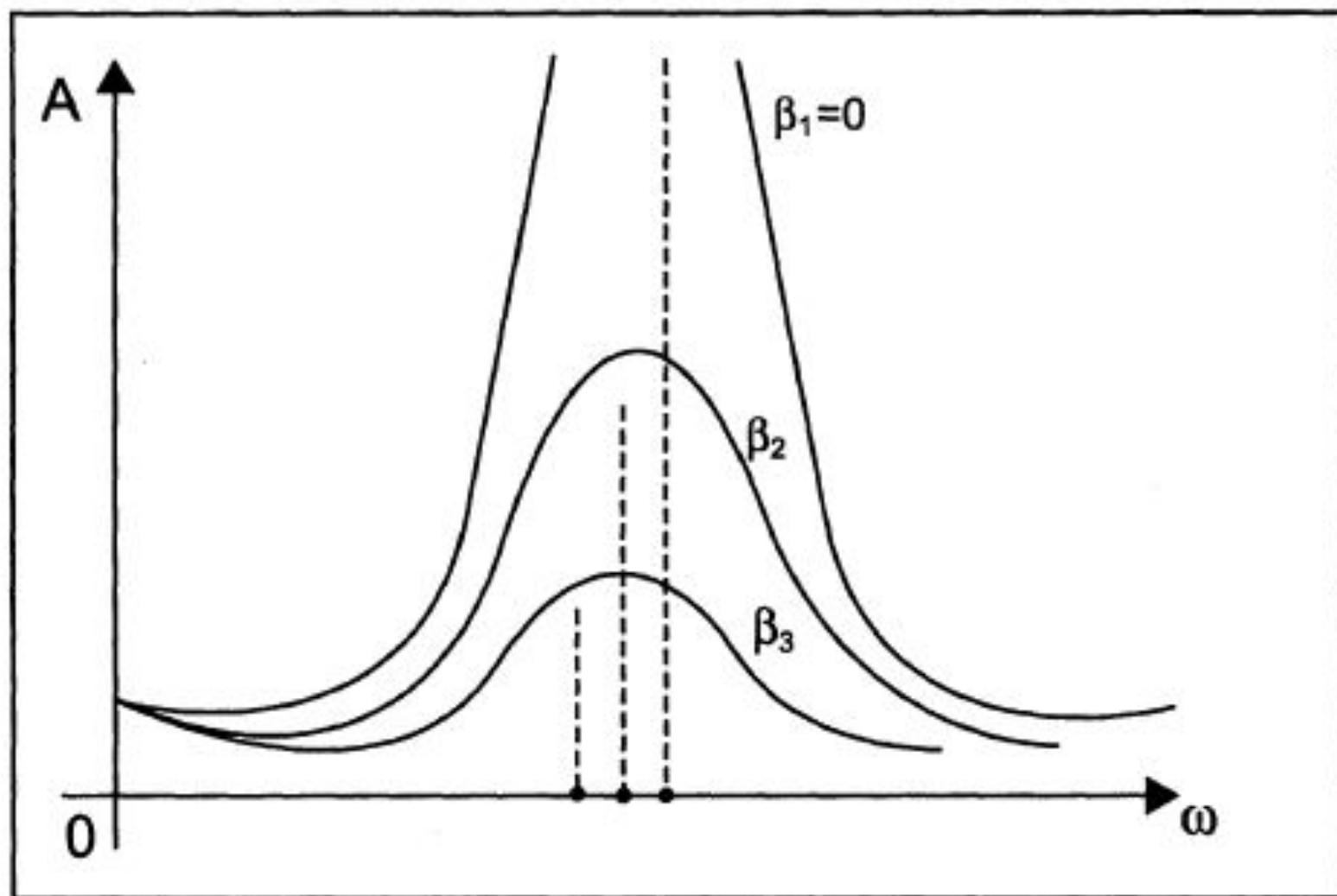
Можно показать, что амплитуда  $A$  вычисляется по формуле:

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (I.18)$$

Итак, при действии на систему вынуждающей силы  $F=F_0 \cdot \sin \omega t$  возникают вынужденные колебания, описываемые уравнением:

$$S_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (I.19)$$

Как видим, вынужденные колебания представляют собой гармонические колебания с амплитудой  $A$  той же частоты, которая соответствует изменению вынуждающей силы. Из формулы (I.18) видно, что амплитуда зависит от соотношения частоты собственных колебаний ( $\omega_0$ ) и частоты изменения вынуждающей силы ( $\omega$ ). Кроме того, амплитуда зависит также от  $F_0$  и коэффициента затухания  $\beta$ . На рис. I.6 приведена зависимость  $A$  от  $\omega$  для различных значений  $\beta$  при одинаковых  $F_0$  и  $m$  (резонансные кривые).



**Рис. 1.6.** Зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $A$  от частоты изменения внешней вынуждающей силы  $\omega$  при различных значениях коэффициентов затухания:  $\beta_3 > \beta_2$ .

При  $\omega = 0$  (постоянная сила) выражение дает постоянное смещение  $A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  (надо иметь в виду, что это относится к установившемуся состоянию, когда свободные колебания уже практически затухли). При  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда, как видно из рис. 1.6, асимптотически стремится к нулю ( $A \rightarrow 0$ ). При некотором промежуточном значении  $\omega$  амплитуда принимает максимальное (для данного  $\beta$ ) значение. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы носит название механического резонанса. Частота вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, называется резонансной частотой, а значение максимальной амплитуды называется резонансной амплитудой.

Найдем резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$ . Для этого нужно найти минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе формулы (1.18). Продифференцировав это выражение по  $\omega$  и приравняв результат нулю, получим:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2) + 8\beta^2 = 0, \quad (1.20)$$

откуда:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.21)$$

## 1.4. Сложные колебания. Теорема Фурье

Большинство реальных колебаний в окружающем нас мире гармоническими не являются (рис. 1.7), поэтому необходимо обсудить теорему Фурье: любое сложное колебание может быть представлено в виде суммы гармонических колебаний (кратко – гармоник), частоты которых кратны частоте этого колебания. Математически в ряде важных случаев это записывается следующим образом:

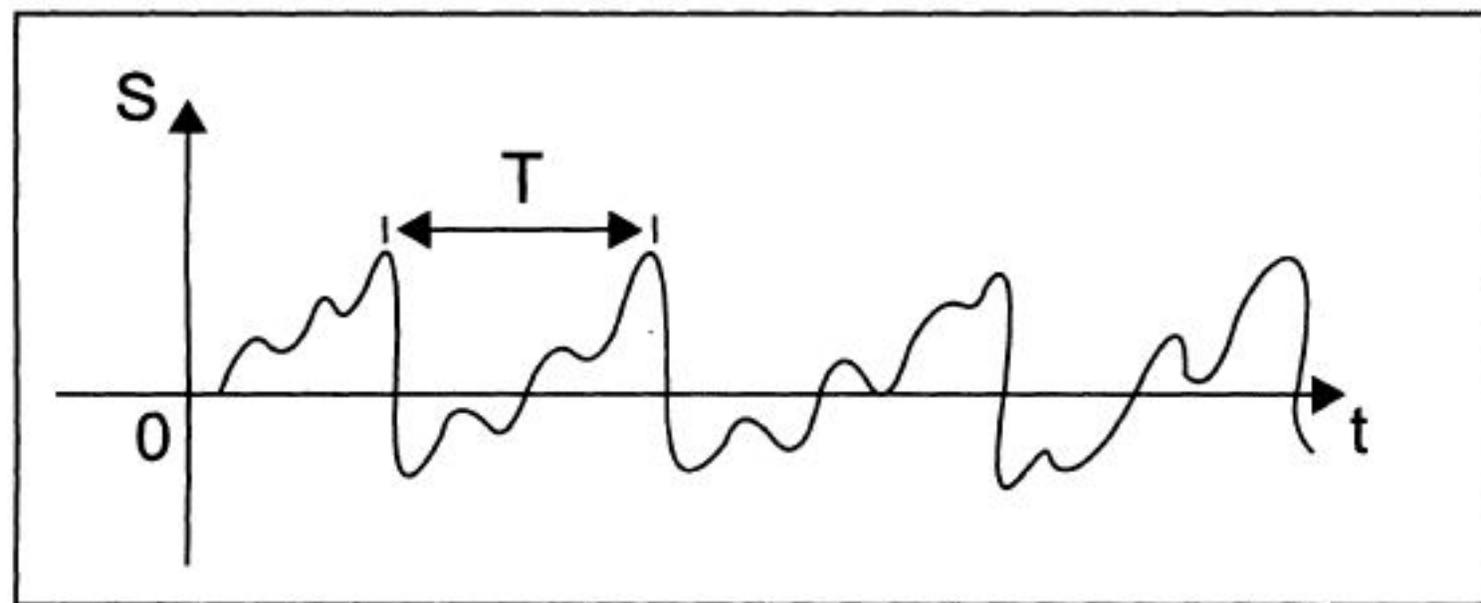
$$S(t) = A_0 + A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) + \dots + A_n \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_{0n}). \quad (1.22)$$

Циклическую частоту  $\omega_1$  можно найти по простой формуле:

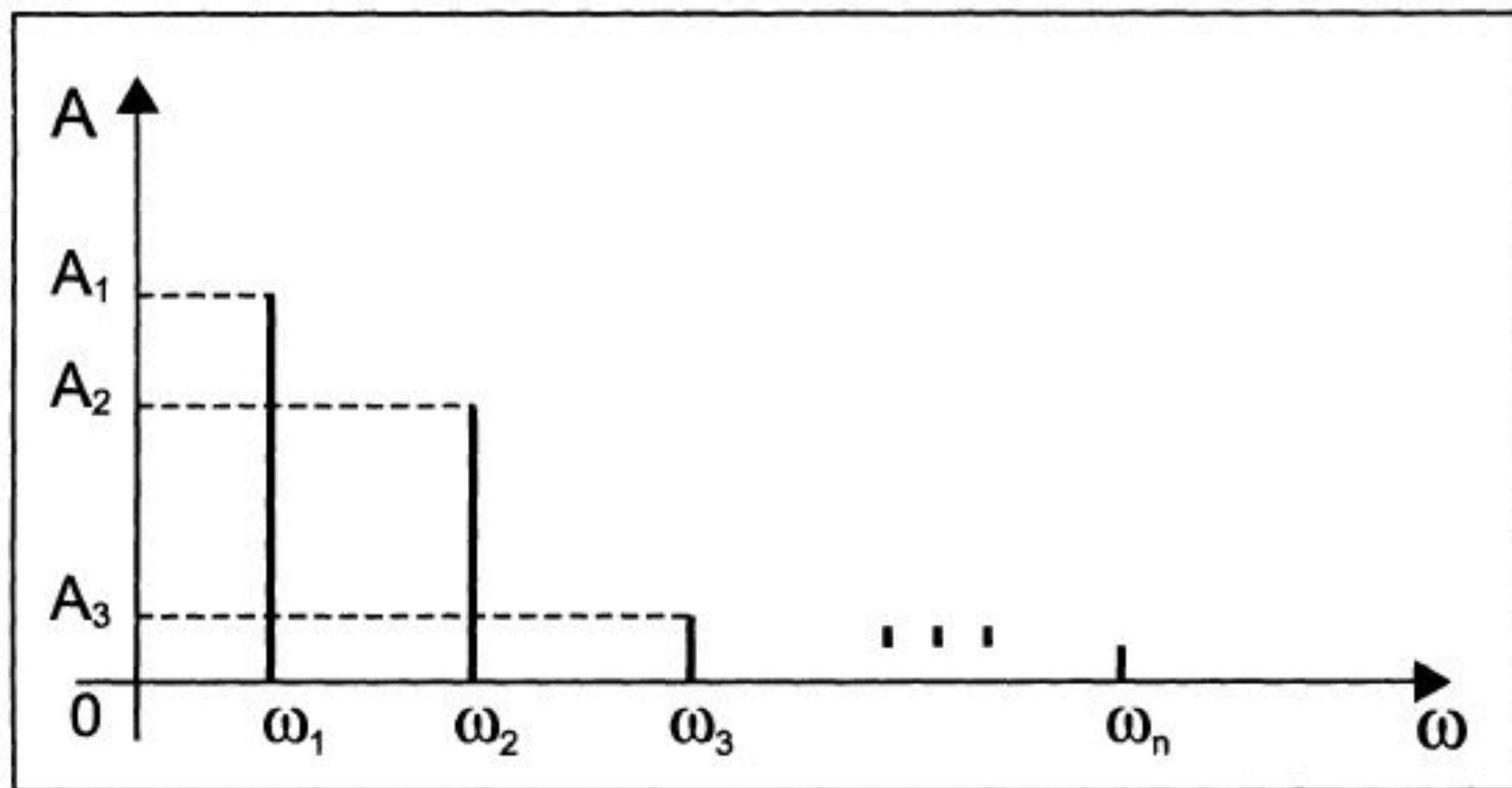
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.23)$$

где  $T$  – период сложного колебания. Остальные циклические частоты вычисляются по формулам:  $\omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots, \omega_n = n\omega_1$ , где  $n$  – целое число.

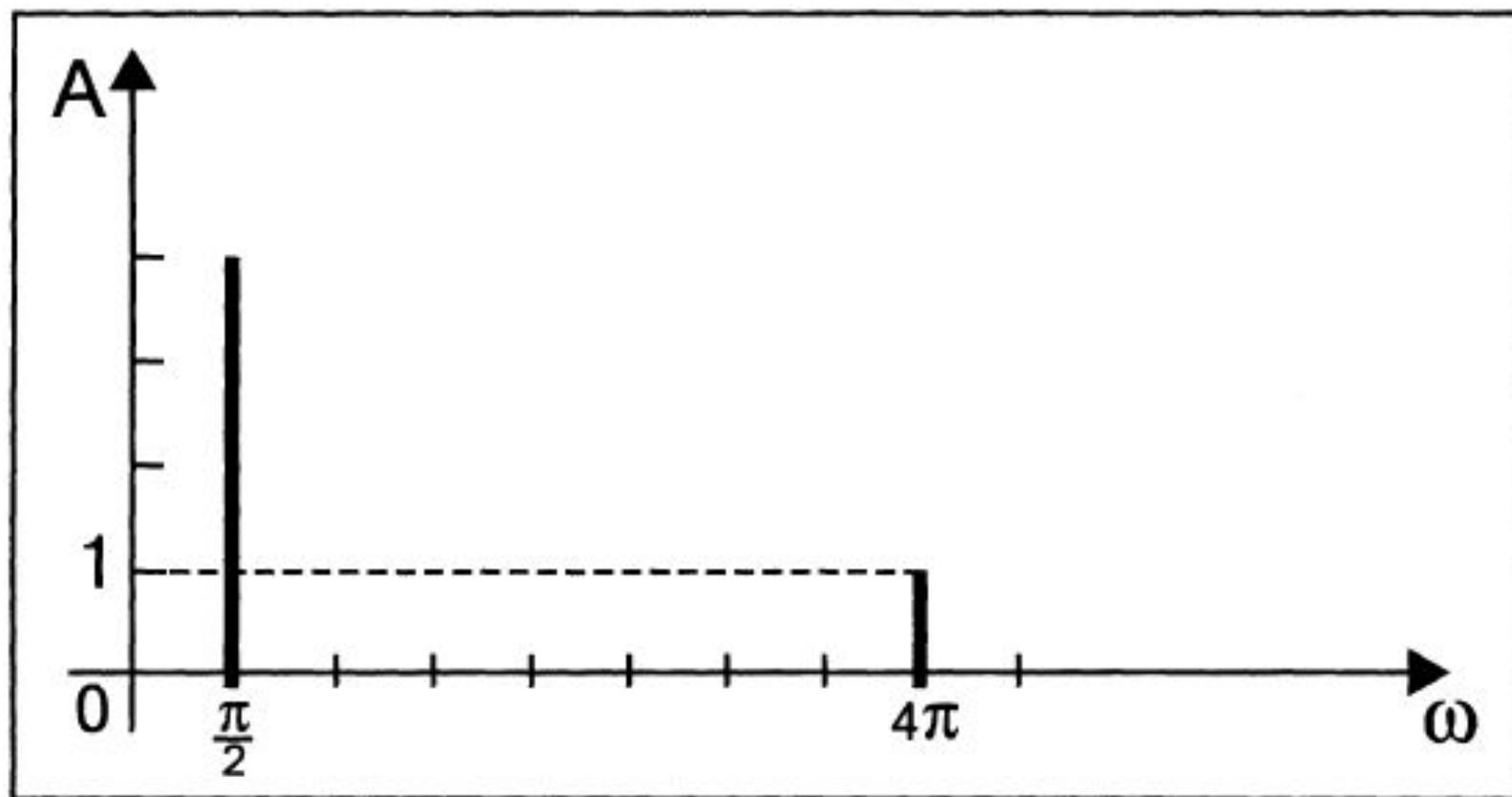
Амплитуды гармоник  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  определяются по специальным формулам (сегодня эти громоздкие формулы не нужно запоминать и использовать — амплитуды гармоник находят с помощью ЭВМ), и каждое сложное колебание имеет свой специфический, индивидуальный набор амплитуд и частот гармоник. Совокупность гармоник, представленная графически в осях амплитуда  $A$  — частота  $\nu$  (или циклическая частота  $\omega$ ), называется спектром сложного колебания. В общем случае он представляется так, как показано на рис. 1.8.



**Рис. 1.7.** Зависимость смещения  $S$  от времени  $t$  для некоторого сложного колебания с периодом  $T$ .



**Рис. 1.8.** Спектр сложного колебания:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — амплитуды гармоник;  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  — их циклические частоты.



**Рис. I.9.** Пример спектра сложного колебания, являющегося суммой двух гармонических колебаний.

Приведем пример. Пусть требуется нарисовать спектр сложного колебания, являющегося суммой двух гармонических  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ :  $S(t) = S_1(t) + S_2(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1 \cdot \sin(4\pi t)$ . Очевидно, что этот спектр будет включать две гармоники (рис. I.9).

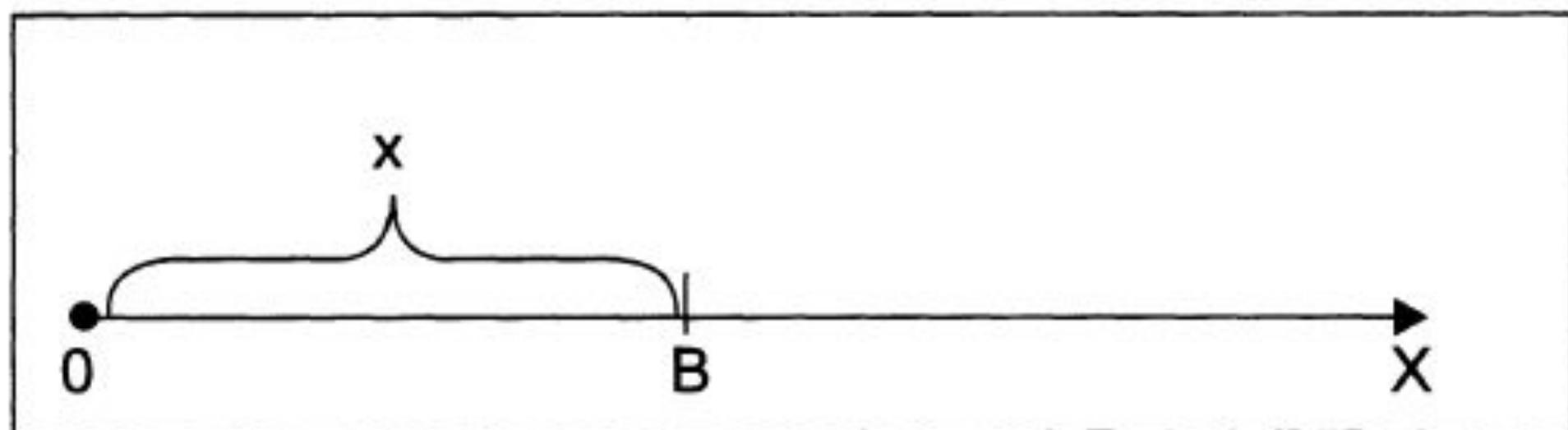
# Раздел II. Механические волны

## II.1. Кинематика волнового движения

Волной называют процесс распространения колебаний в некоторой среде. Первоначальное знакомство с механическими волнами удобно начать с волн на поверхности воды ввиду их особой наглядности. Волны на поверхности воды представляют собой чередующиеся гребни и впадины, перемещающиеся по ее поверхности с некоторой скоростью — она называется скоростью распространения волны. Опыт показывает, что, хотя гребни и впадины кажутся движущимися на поверхности воды, распространение волны не связано с переносом частиц жидкости: частицы среды, захваченные волновым процессом, колеблются, как маятники, относительно положений равновесия. Опыт показывает также, что частота волны определяется частотой колебаний ее источника.

Если внешнее воздействие на некоторую среду меняется по гармоническому закону, то вызванная им волна, распространяющаяся в среде, называется гармонической. Такие волны характеризуются частотой  $\nu$ , под которой понимают частоту колебаний частиц среды, амплитудой  $A$  (это амплитуда колебаний каждой из частиц среды) и скоростью распространения волны  $v$ .

Связь между различными характеристиками волны мы рассмотрим ниже, а пока займемся выводом уравнения плоской бегущей гармонической волны. Плоская волна — такая волна, в которой граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц среды, еще не начавших колебаться, имеет форму плоскости. Записать уравнение волны означает записать для каждой точки среды (охваченной волновым процессом) закон изменения ее смещения от положения равновесия как функцию времени. Если плоская волна распространяется вдоль оси  $X$ , то указанная зависимость будет функцией двух переменных — координаты  $x$  и времени  $t$  (см. рис. II.1).



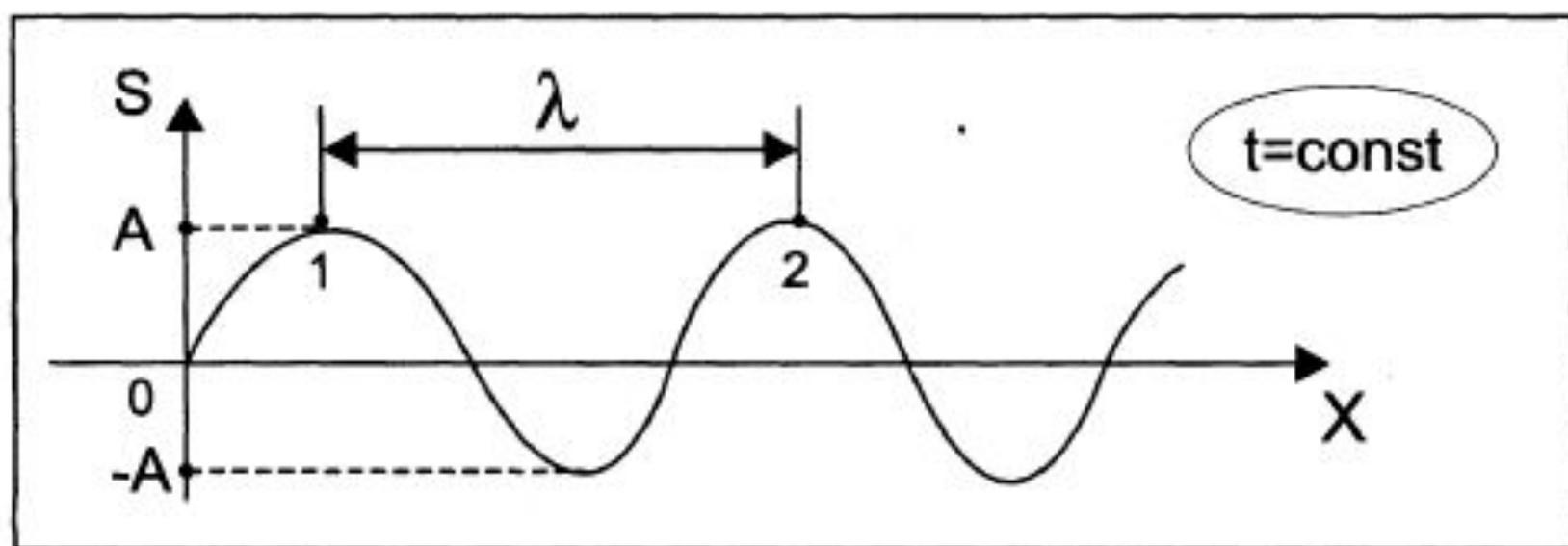
**Рис. II.1.** Пояснения в тексте.

Для вывода уравнения представим себе шнур и внешним воздействием заставим точку с координатой  $x = 0$  колебаться либо перпендикулярно оси  $X$  (такая волна будет называться поперечной), либо в направлении, параллельном оси  $X$  (такая волна будет называться продольной), по закону  $S(t) = A \cdot \sin \omega t$ .

По шнуру побежит волна. Спустя некоторое время  $\tau = \frac{x}{v}$  волновой процесс достигнет некоторой точки В с координатой  $x$  и вовлечет ее в колебательное движение. Если не учитывать затухания, то амплитуда колебаний в точке  $x$  будет такой же, как и в точке 0 (она равна  $A$ ), и в некоторый момент времени  $t$  точка с координатой  $x$  будет иметь такое же смещение от положения равновесия, как и точка 0 в более ранний момент времени  $t'$ :  $t' = t - \frac{x}{v}$ . Таким образом, смещение точки с координатой  $x$  в момент  $t'$  будет равно:

$$S(t) = A \cdot \sin \omega t' = A \cdot \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (\text{II.1})$$

Это и есть уравнение плоской гармонической волны, направление скорости которой совпадает с положительным направлением оси  $X$ . Графически она представлена на рис. II.2.



**Рис. П.2.** График зависимости смещения  $S$  от положения равновесия точек волны с различными координатами  $x$ ;  $\lambda$  — длина волны.

Для некоторого фиксированного момента времени данная формула будет отображать мгновенную картину распределения смещений от положения равновесия всех вовлеченных в колебательное движение точек оси  $X$ . Если рассматривать поперечную волну, то график данной функции будет совпадать с фотографией волны в тот фиксированный момент времени, о котором шла речь выше (см. рис. П.2).

Для продольных волн график на рис. II.2 не совпадает с фотографией и показывает, насколько и в какую сторону сместилась от положения равновесия частица среды с любым значением координаты  $x$ .

Рассмотрим теперь еще одну важную характеристику гармонической волны — длину волны  $\lambda$ , равную расстоянию между двумя ближайшими максимумами (см. рис. II.2). Если изобразить аналогичные фотографии в следующие за рассмотренным фиксированные моменты времени  $t < t_1 < t_2 < \dots$ , то можно увидеть, что смещения точек 1 и 2 (см. рис. II.2) будут всегда одинаковыми. Спустя время, равное периоду колебаний  $T$  каждой точки, они обе вновь окажутся в состоянии наибольшего смещения от положения равновесия, а линия, отделяющая участвующие и не участвующие в колебаниях частицы среды, переместится за это время вправо ровно на расстояние  $\lambda$ . Если скорость распространения волны равна  $v$ , то по формуле прямолинейного равномерного движения для длины волны получим выражение:

$$\lambda = v \cdot T. \tag{II.2}$$

Как уже было показано в разделе I, период колебаний  $T$  и частота  $\nu$  связаны формулой  $\nu = \frac{1}{T}$ . Тогда можно получить важное соотношение:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (\text{II.3})$$

Эта формула справедлива не только для механических волн и в дальнейшем изложении будет многократно использоваться.

Подчеркнем еще раз, что частота гармонической волны зависит от частоты колебаний источника, а скорость определяется упругими свойствами среды и ее плотностью. Так, например, в случае сплошной однородной среды для скорости продольной волны справедлива формула:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{II.4})$$

где  $E$  — модуль упругости среды,  $\rho$  — ее плотность.

Из формулы (II.3) очевидно, что длина волны будет определяться обоими факторами: и частотой колебаний источника, и свойствами среды.

## II.2. Некоторые энергетические характеристики механической волны

При распространении механической волны в пространстве с течением времени в колебательное движение вовлекается все больший объем среды и волна переносит энергию от источника колебаний ко все более удаленным точкам среды.

Количество энергии, переносимой волной за единицу времени через некоторую произвольную поверхность, называют потоком энергии через эту поверхность:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (\text{II.5})$$

Это скалярная величина, размерность которой совпадает с размерностью мощности — ваттом:  $1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}}$ .

Это скалярная величина, размерность которой совпадает с размерностью мощности — ваттом:  $1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}}$ .

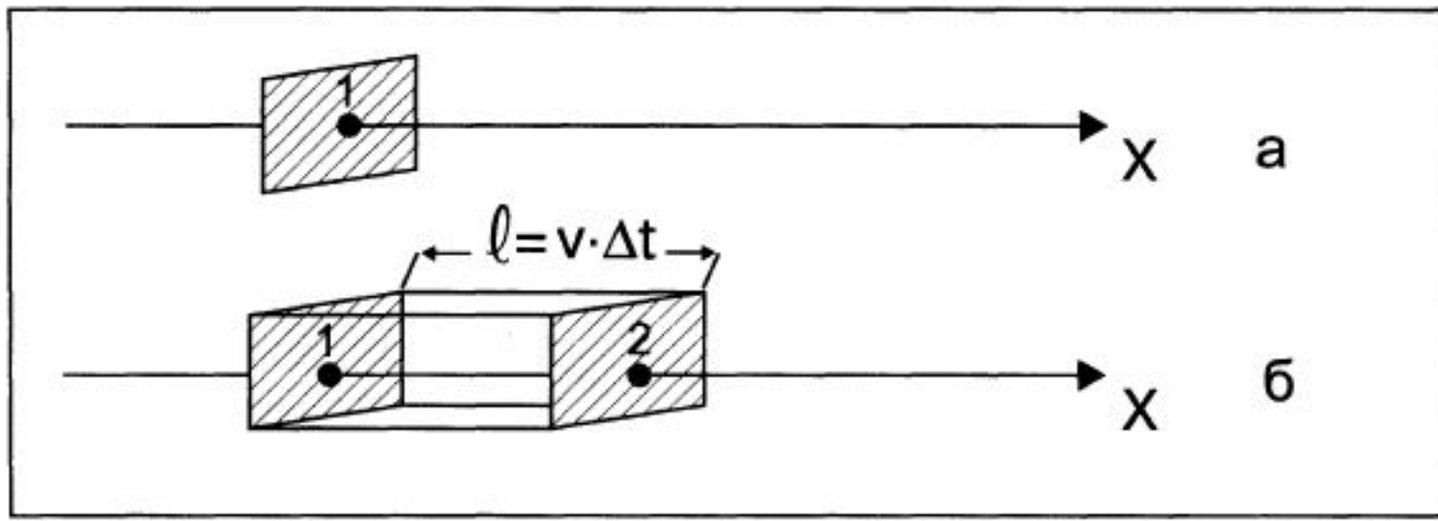
Количество энергии, переносимое волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, называют плотностью потока энергии. Она вычисляется по формуле:

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S}. \quad (\text{II.6})$$

Это также скалярная величина, единицей измерения которой является 1 ватт на 1 квадратный метр.

Количество энергии, заключенное в единице объема среды, частицы которой вовлечены в волновое движение, называют объемной плотностью энергии. Она находится по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta V}. \quad (\text{II.7})$$



**Рис. II.3.** Пояснения в тексте.

Найдем теперь связь между величинами  $j$  и  $\epsilon$ . Пусть вдоль оси  $X$  (рис. II.3) распространяется плоская волна, фронт\* которой к некоторому моменту времени достиг точки 1 (см. рис. II.3, а). Спустя время  $\Delta t$  этот фронт переместился вправо на расстояние  $\Delta \ell = v \cdot \Delta t$  (см. рис. II.3, б) и достиг точки 2. Следовательно, за это время в колебательное движение включились частицы, заключенные внутри изображенного параллелепипеда. Тогда для плотности потока энергии волны получим:

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S} = \frac{\Delta W \cdot v}{v \cdot \Delta t \cdot \Delta S}. \quad (\text{II.8})$$

(числитель и знаменатель одновременно умножены на скорость волны  $v$ ).

Величина в знаменателе, очевидно, равна объему параллелепипеда  $\Delta V = v \cdot \Delta t \cdot \Delta S$ , а отношение  $\frac{\Delta W}{\Delta V}$  есть средняя объемная плотность энергии  $\epsilon_{\text{ср}}$ . Тогда для плотности потока энергии волны получим:

$$\dot{j} = \epsilon_{\text{ср}} \cdot v. \quad (\text{II.9})$$

Рассматривая скорость волны как вектор  $\vec{v}$ , можно придать векторный смысл и плотности потока энергии и соотношение (II.6) переписать в виде:

$$\vec{j} = \epsilon_{\text{ср}} \cdot \vec{v}. \quad (\text{II.10})$$

Этот вектор был впервые введен выдающимся русским физиком, основателем учения о движении энергии Н. А. Умовым (1846—1915) и носит его имя.

Можно показать, что для величины  $\epsilon_{\text{ср}}$  в случае гармонической волны справедливо выражение:

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\rho \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2}, \quad (\text{II.11})$$

где  $\rho$  — плотность среды;  $A$  — амплитуда волны;  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды. Тогда для вектора Умова будет справедливым выражение:

$$\vec{j} = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2} \vec{v}. \quad (\text{II.12})$$

Среднюю энергию, переносимую волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, называют интенсивностью волны. Очевидно, что ее единицей измерения (как и у плотности потока энергии) является 1 ватт на 1 квадратный метр.

# Раздел III. Звуковые и ультразвуковые волны

## III.1. Звуковые волны и их использование в медицине

Распространяющиеся в воздухе упругие волны, достигнув человеческого уха, вызывают специфическое ощущение звука, если частота этих волн лежит в пределах от 16 Гц до 20 000 Гц. Такие волны называют звуковыми. В узком смысле слова акустикой называют учение о звуке. Однако в настоящее время акустика занимается и теми механическими волнами, которые не воспринимаются ухом человека и могут распространяться не только в воздухе, но и в любой другой среде. Упругие волны с частотой менее 16 Гц называют инфразвуком, волны с частотой, превышающей 20 000 Гц, называют ультразвуком. Звуковые волны в жидкостях и газах могут быть только продольными.

Рассмотрим характеристики звуковой волны. Среди них выделим характеристики, не зависящие от особенностей восприятия звука человеком (их можно назвать объективными), и такие, которые, наоборот, основываются на восприятии звука (их можно назвать субъективными). Между этими типами характеристик существует определенная, не совсем простая связь.

**Объективные характеристики звука.** К ним относятся физические величины, которые описывают любой механический волновой процесс:

- частота звука  $\nu$ , измеряемая числом колебаний в секунду частиц среды, участвующих в волновом процессе;
- средняя плотность потока энергии (или интенсивность звука), измеряемая как средняя энергия, переносимая звуковой волной за 1 с через площадку в  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Интенсивность гармонического звукового сигнала пропорциональна квадрату частоты и квадрату амплитуды колебаний частиц среды и вычисляется по формуле:

$$I = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot v. \quad (\text{III.1})$$

Этой формуле можно придать иной вид, используя понятия амплитуды избыточного давления  $P_0$ , возникающего при распространении в среде звуковой волны, и акустического сопротивления  $Z$ :

$$I = \frac{P_0^2}{2Z}. \quad (\text{III.2})$$

Спектр звука указывает, из колебаний каких частот «составлен» данный звук и как распределены амплитуды между отдельными составляющими. Говоря о спектрах, мы могли бы повторить все изложенное по этому поводу в разделе I.

Добавим лишь то, что, например, гласный звук имеет линейчатый спектр, а согласный звук или шум – сплошной (непрерывный).

Говоря об объективных характеристиках звука, отметим, что человеческое ухо воспринимает довольно широкий диапазон интенсивностей звука, например на частоте 1 кГц от  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> или  $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па (порог слышимости) до  $I_{\max} = 10$  Вт/м<sup>2</sup> или  $P_{\max} = 60$  Па (порог болевого ощущения). Отношение этих интенсивностей равно  $10^{13}$ , поэтому удобнее использовать логарифмические единицы и логарифмическую шкалу, вводя величину *уровня интенсивности*. Шкала уровней интенсивностей звука создается следующим образом: значение  $I_0$  принимают за нулевой уровень шкалы, любую другую интенсивность  $I$  выражают через десятичный логарифм ее отношения к  $I_0$ :

$$L_I = \lg \left( \frac{I}{I_0} \right). \quad (\text{III.3})$$

В этой формуле уровень интенсивности измеряется в беллах. При использовании децибелов соответственно имеем:

$$L_I = 10 \cdot \lg \left( \frac{I}{I_0} \right). \quad (\text{III.4})$$

Построим теперь две шкалы и на первой представим отношение  $\frac{I}{I_0}$ , а на второй — соответствующие уровни интенсивности в децибеллах (рис. III.1).

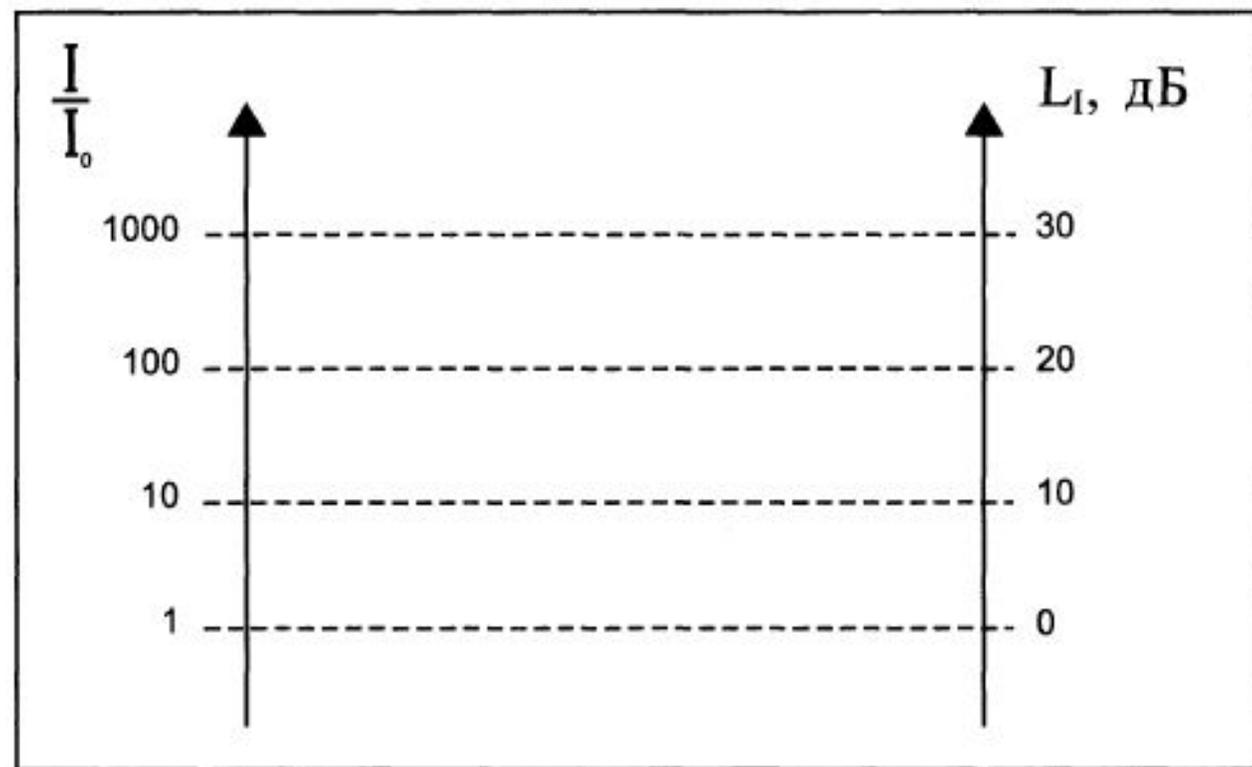


Рис. III.1. Пояснения в тексте.

На шкале слева представлены различные значения отношения интенсивности некоторого звукового сигнала  $I$  к интенсивности  $I_0$ , соответствующей порогу слышимости на частоте 1000 Гц; на шкале справа — соответствующие значения уровня интенсивности.

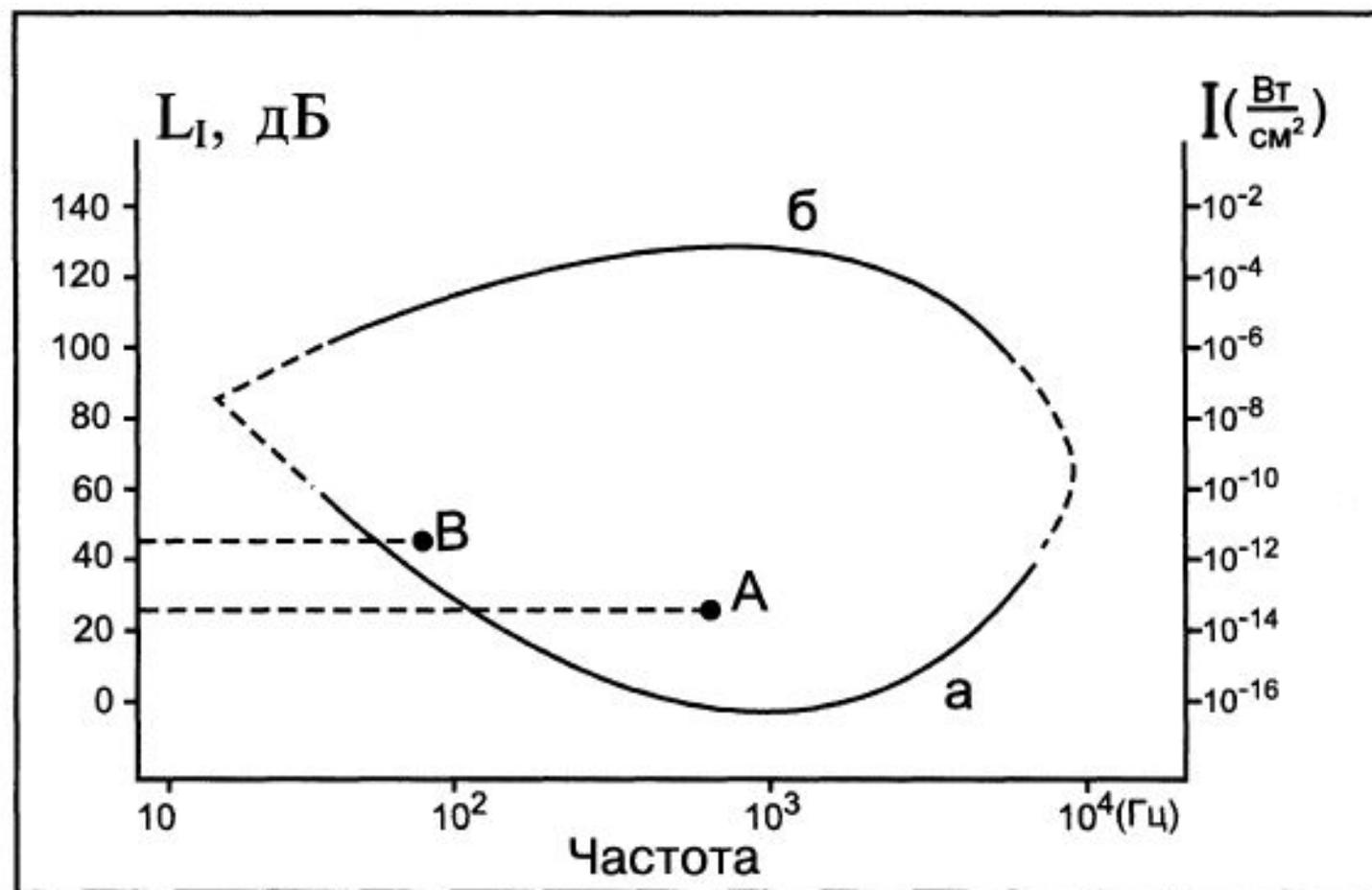
Из сравнения шкал видно, что увеличению интенсивности в 10 раз (с любого начального уровня) соответствует повышение уровня интенсивности на 10 дБ.

Перейдем к **субъективным характеристикам звука.**

Первой из них является **высота** — субъективная оценка частоты звукового сигнала: чем больше частота, тем выше тон воспринимаемого звука.

**Громкость** — также субъективная оценка интенсивности звука. Однако восприятие интенсивности зависит от частоты звука. Звук большей интенсивности одной частоты может восприниматься как менее громкий, чем звук меньшей интенсивности другой частоты.

Опыт показывает, что для каждой частоты в области слышимых звуков ( $20-20 \cdot 10^3$  Гц) имеется так называемый порог слышимости. Это минимальная интенсивность, при которой ухо еще реагирует на звук. Кроме того, для каждой частоты имеется так называемый порог болевых ощущений, т.е. то значение интенсивности звука, которое вызывает боль в ушах (повышение интенсивности звука выше порога болевых ощущений опасно для уха). Совокупности точек, отвечающих порогу слышимости, и точек, соответствующих порогу болевых ощущений, образуют на диаграмме ( $L_1, \nu$ ) две кри-



**Рис. III.2.** Кривая порога слышимости (а) и кривая порога боли (б). Пояснения в тексте.

вые (рис. III.2), которые пунктиром экстраполированы до пересечения.

Справа обозначены интенсивности, а слева — соответствующие уровни интенсивности.

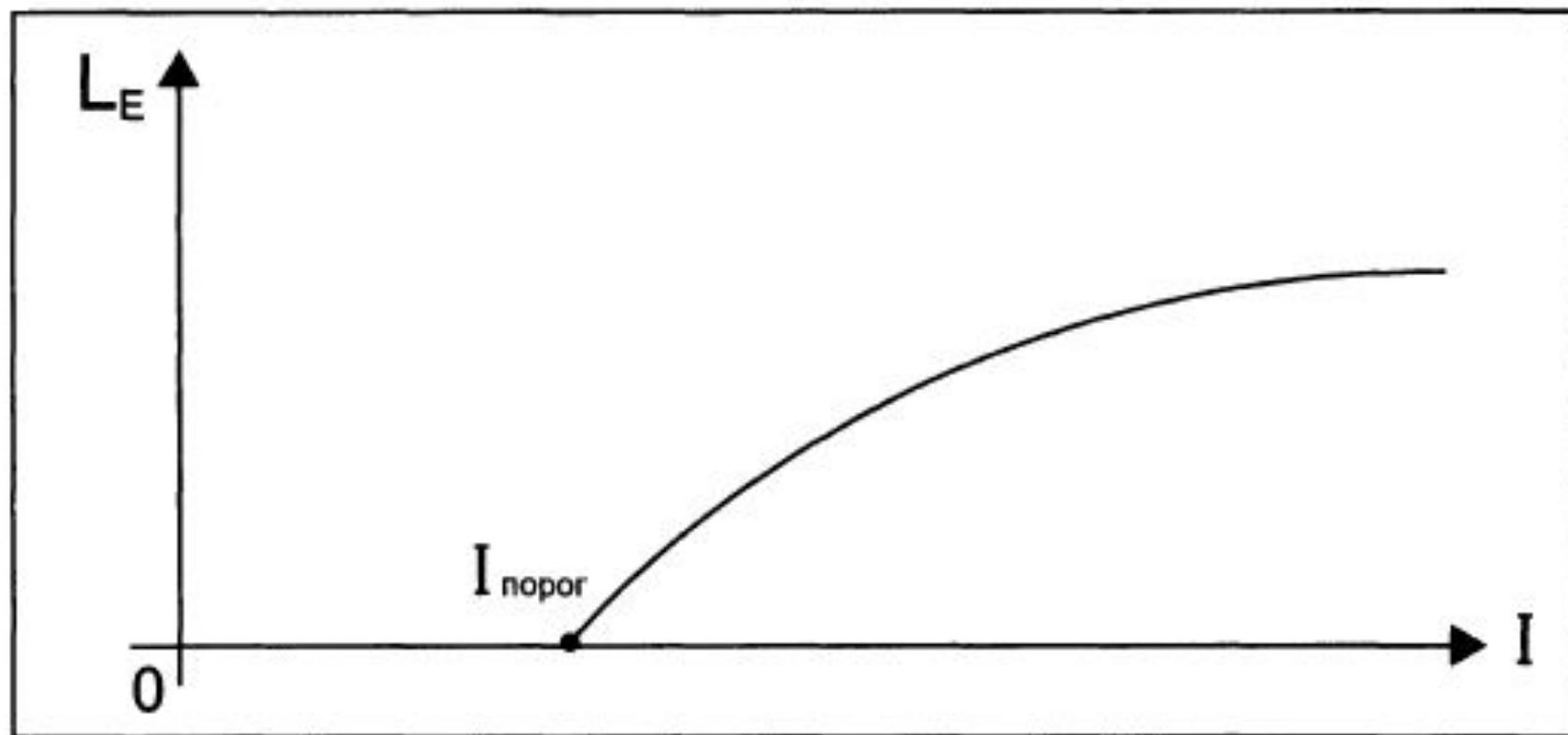
Область, ограниченная этими кривыми, называется областью слышимости. Из приведенной диаграммы, в частности, видно, что менее интенсивный звук, соответствующий точке А, будет восприниматься более громким, чем звук более интенсивный, соответствующий точке В, так как точка А более удалена от порога слышимости, чем точка В (подробнее об этом будет рассказано ниже).

Обсудим подробнее зависимость громкости от интенсивности.

При фиксированной частоте (это установлено экспериментально) громкость  $L_E$  выражается следующим соотношением:

$$L_E = k \cdot \lg \frac{I}{I_{\text{порог}}}, \quad (\text{III.5})$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $I$  — интенсивность исследуемого звука,  $I_{\text{порог}}$  — пороговая интенсивность звука на обсуждаемой частоте ( $I_{\text{порог}} = I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$  при частоте 1 кГц). Из соответ-



**Рис. III.3.** Зависимость громкости звука  $L_E$  от интенсивности  $I$  при фиксированной частоте: пока  $I < I_{\text{порог}}$ , громкость равна нулю, при  $I > I_{\text{порог}}$  громкость возрастает по логарифмическому закону.

стствующего графика (рис. III.3) видно, что чем больше интенсивность, тем меньше скорость возрастания громкости при увеличении интенсивности (кривая возрастает все более плавно).

Если же не задаваться фиксированной частотой, то громкость звука можно оценить по так называемым кривым равной громкости, схематично представленным на рис. III.4.

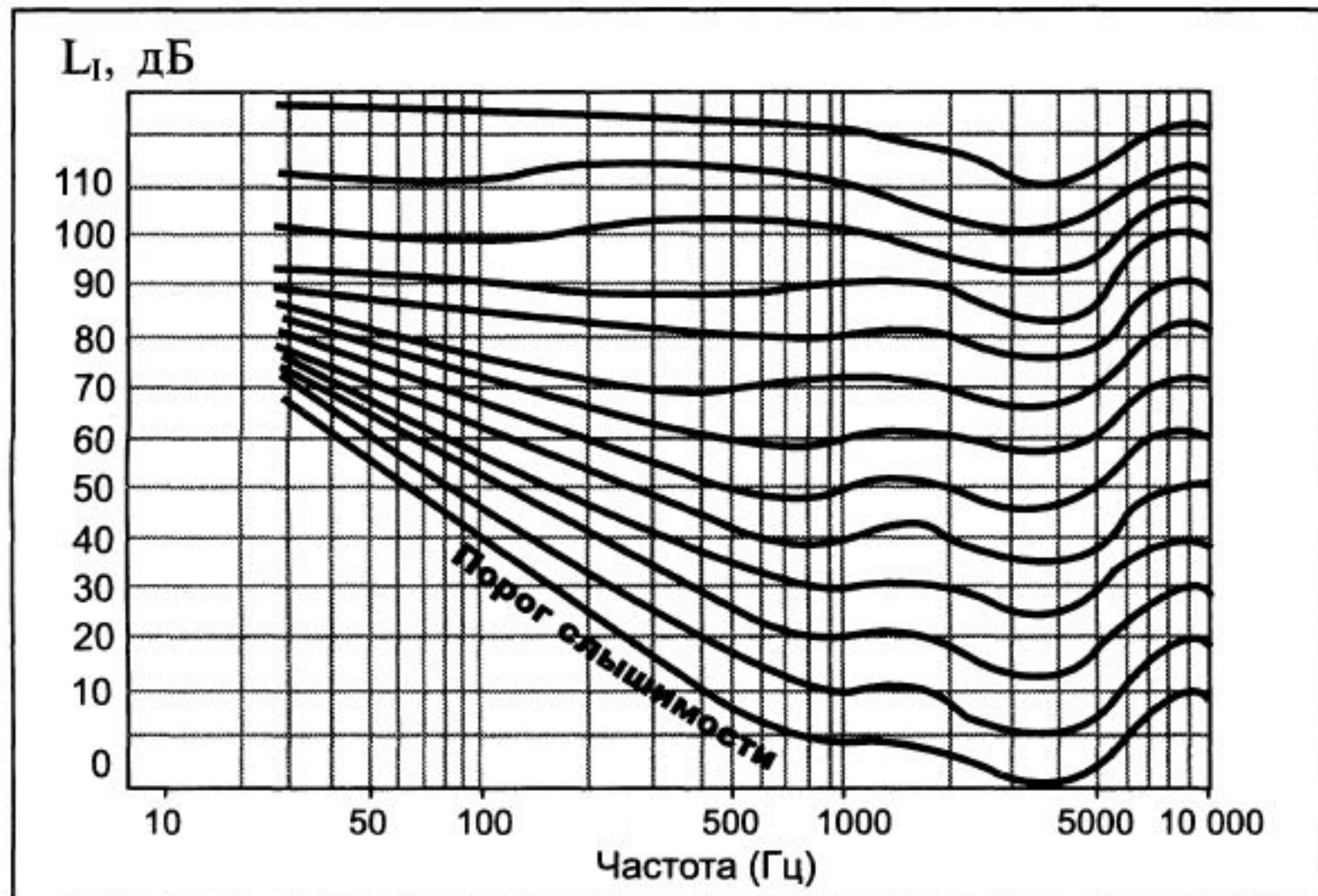


Рис. III.4. Кривые равной громкости. Пояснение в тексте.

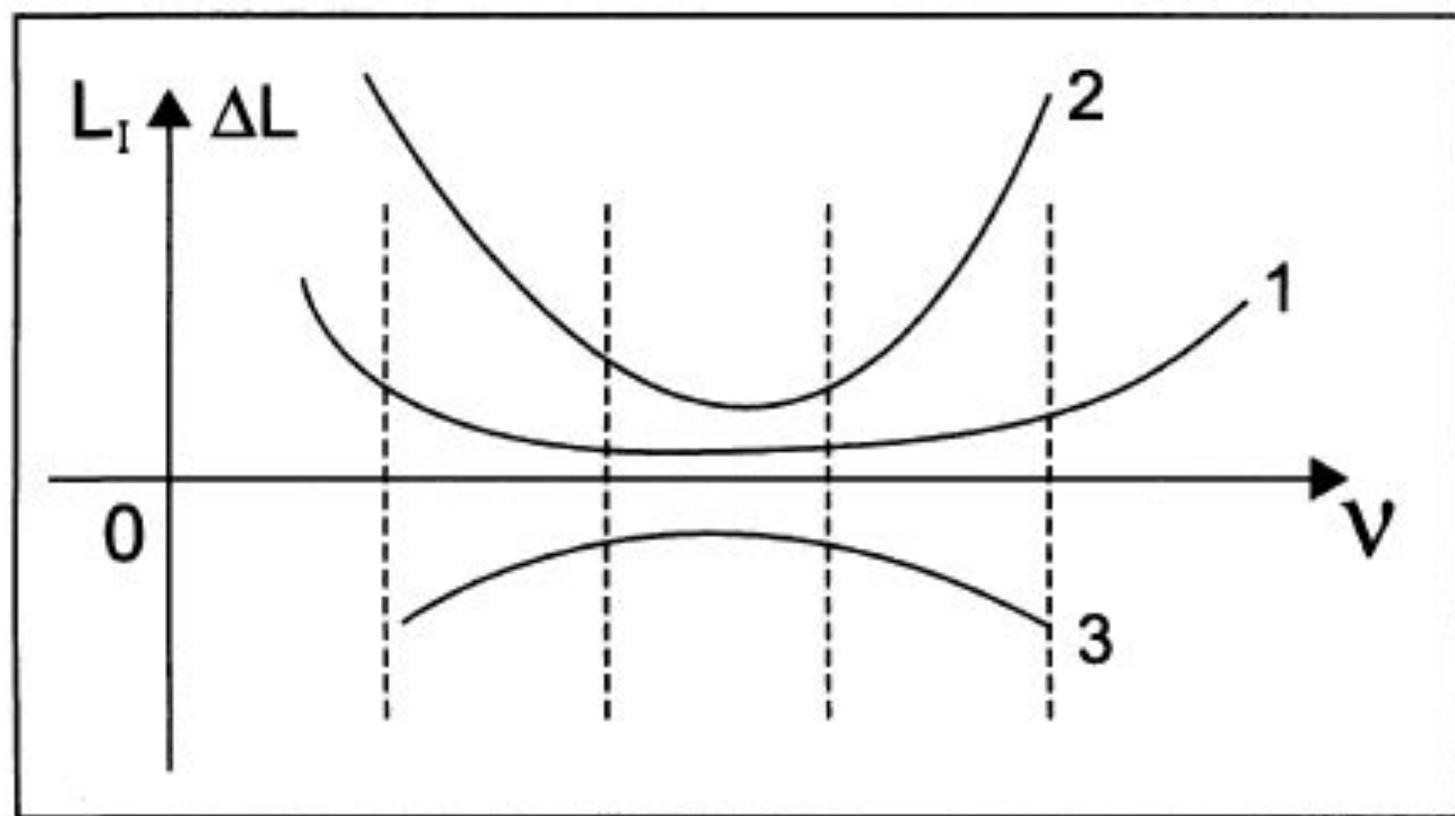
Все кривые объединяют звуки одной и той же громкости, измеряемой в фонах. При этом видно, что громкость любого звука, выраженная в фонах, совпадает с уровнем интенсивности равногромкого звука (в децибелах) на частоте 1 кГц.

Из представленного графика, в частности, понятно, почему громкость более интенсивного звука В будет меньше громкости менее интенсивного звука А. Они показаны на рис. III.3: если провести через точки А и В кривые равной громкости, то первая окажется выше второй.

Наконец, третьей субъективной характеристикой является тембр звука. Это субъективная оценка спектрального состава звука. Наиболее простым звуком является чистый тон (чистый звук). Под этим понимают слуховое ощущение, получаемое от простого гармонического (синусоидального) колебания.

Более сложные звуки (сложные тоны) являются «смесью» тонов, результатом суперпозиции чистых тонов с частотами  $\nu$ ,  $2\nu$ ,  $3\nu$ , ... . Высота звука при этом определяется основной частотой  $\nu$ . Гармоники (обертоны) с частотами  $2\nu$ ,  $3\nu$ , ... создают тембровую окраску звукового сигнала.

Остановимся на одном важном медицинском приложении, связанном с обсуждаемой темой. Это метод оценки потери слуха. Его суть заключается в том, что в осях ( $L_1 - \nu$ ) строят график стандартного порога слышимости и график порога слышимости обследуемого пациента (рис. III.5). Затем на нескольких частотах находят разность  $\Delta L = L_{\text{ст}} - L_{\text{паци}}$ , она и называется потерей слуха. Соответствующий график приведен на рис. III.5.



**Рис. III.5.** Построение кривой потери слуха: 1 – стандартный порог слышимости; 2 – индивидуальный порог слышимости; 3 – кривая потери слуха.

## **III.2. Ультразвук и его применение в медицине**

Ультразвук — механическая волна с частотой большей 20 кГц и соответственно длиной волны меньшей, чем у звуковой волны. Для получения ультразвука используют обратный пьезоэлектрический эффект, магнитострикцию и электрострикцию.

Обратный пьезоэлектрический эффект состоит в том, что пластинка, вырезанная определенным образом из кристалла кварца (или другого анизотропного кристалла), под действием электрического поля сжимается или удлиняется в зависимости от направления поля. Если поместить такую пластинку между обкладками плоского конденсатора, на которые подается переменное напряжение, то пластинка придет в вынужденные колебания. Эти колебания приобретают наибольшую амплитуду, когда частота изменений электрического напряжения совпадает с частотой собственных колебаний пластинки. Колебания пластинки передаются частицам окружающей среды (воздуха или жидкости), что и порождает ультразвуковую волну.

Явление магнитострикции состоит в том, что ферромагнитные стержни (сталь, железо, никель и их сплавы) изменяют свои линейные размеры под действием магнитного поля, направленного по оси стержня. Поместив такой стержень в переменное магнитное поле (например, внутрь катушки, по которой течет переменный ток), мы вызовем в стержне вынужденные колебания, амплитуда которых будет особенно велика при резонансе. Колеблющийся торец стержня создает в окружающей среде ультразвуковые волны, интенсивность которых находится в прямой зависимости от амплитуды колебаний торца.

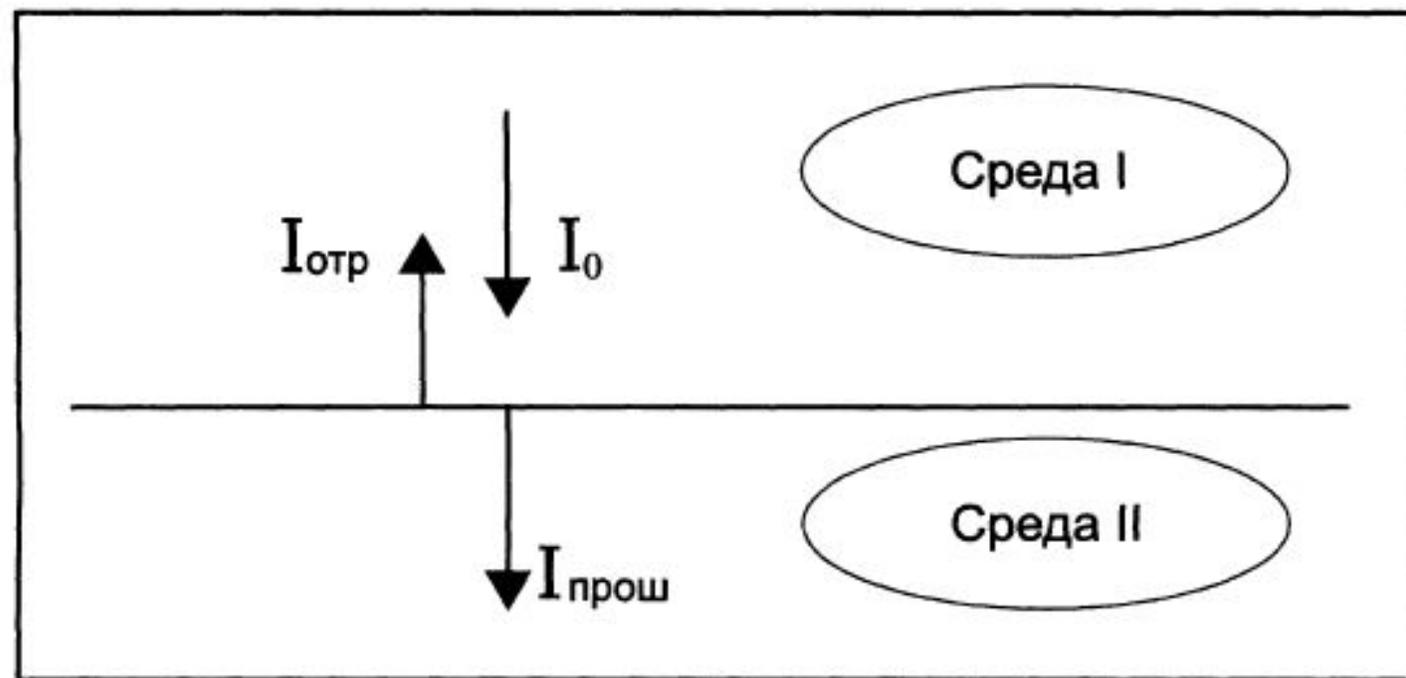
Некоторые материалы (например, керамики) способны изменять свои размеры в электрическом поле. Это явление, получившее название электрострикции, внешне отличается от обратного пьезоэлектрического эффекта тем, что изменение размеров зависит только от напряженности приложенного поля, но не зависит от его знака. К числу подобных материалов относятся титанат бария и титанат-цирконат свинца.

Преобразователи, в которых используются описанные выше явления, называют соответственно пьезоэлектрическими, магнито-стрикционными и электрострикционными. Последние нашли наибольшее применение в практике.

Ультразвук регистрируют приемным преобразователем, действие которого основано либо на прямом пьезоэлектрическом эффекте, либо на явлении, обратном электрострикции. При сжатии кварцевой пластинки (или пластинки из керамики) на ее параллельных плоскостях создается разность потенциалов, которая зависит от сжимающего давления. Действие кварцевого и электрострикционного керамического приемного преобразователя таково: ультразвуковые волны оказывают переменное давление на поверхность пластинки, что приводит к появлению на ее поверхности переменной разности потенциалов, которая и фиксируется электрической частью приемного устройства.

Рассмотрим свойства ультразвука, обуславливающие его широкое диагностическое и лечебное применение. Это прежде всего отражение ультразвуковой волны от границы раздела двух сред с различными свойствами, что схематично представлено на рис. III.6.

Для количественной характеристики процесса вводят понятие коэффициента отражения  $R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_0}$ , где  $I_{\text{отр}}$  – интенсивность отраженной ультразвуковой волны;  $I_0$  – интенсивность падающей;  $I_{\text{прош}}$  – интенсивность волны, прошедшей из первой во вторую среду. Очевидно, что это безразмерная величина, меняющаяся в интервале от нуля (отсутствие отражения) до единицы (полное отражение).



**Рис. III.6.** Отражение ультразвука от границы раздела двух сред: интенсивность падающей волны  $I_0$  равна сумме  $I_{\text{отр}}$  и  $I_{\text{прош}}$  – это, соответственно интенсивности отраженной от границы раздела и прошедшей через нее волны.

В случае, представленном на рис. III.6, этот коэффициент может быть найден по формуле:

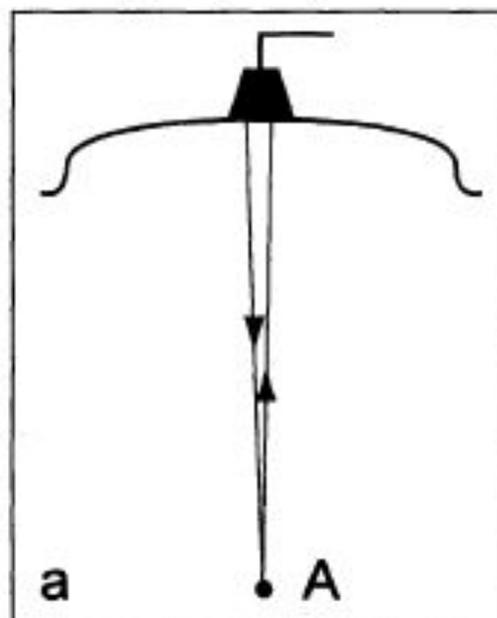
$$R = \left( \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} \right)^2,$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности первой и второй среды соответственно;  $v_1$  и  $v_2$  — скорости ультразвука в этих средах.

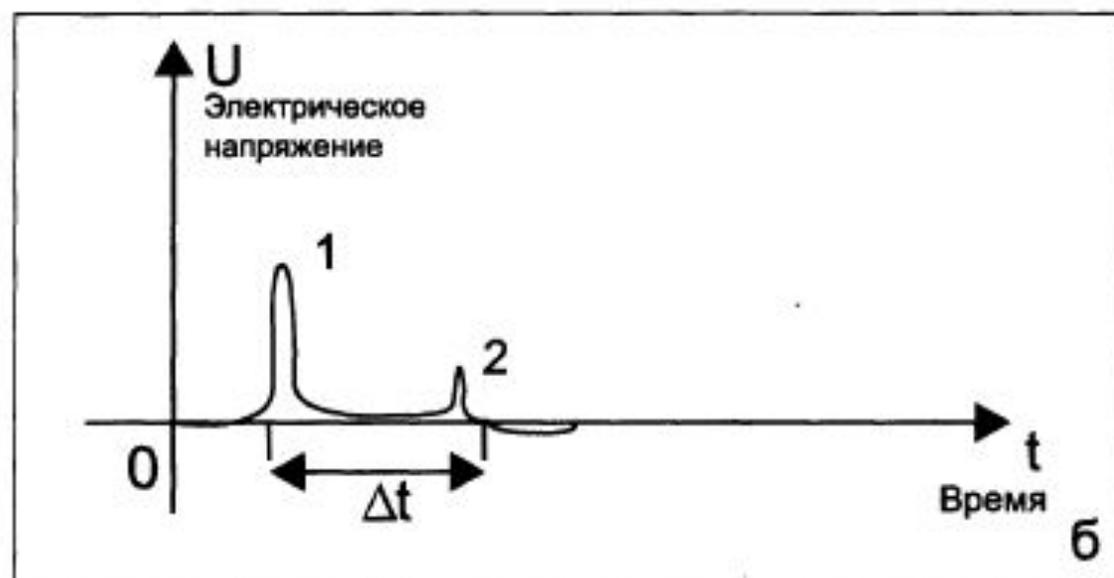
На явлении отражения ультразвука от границы раздела сред основана эхолокация — метод локализации неоднородностей в средах (рис. III.7).

Источник ультразвука посылает ультразвуковой сигнал в импульсном режиме. В паузе источник «ожидает» прихода отраженной волны. На экране локатора фактически представлена зависимость электрического напряжения, соответствующего посланному и зарегистрированному после отражения ультразвуковому сигналу. Зная интервал времени  $\Delta t$  (см. рис. III.7) между импульсом посланки и отраженным импульсом и скорость волны, можно найти расстояние от источника до границы отражения.

Источник и приемник  
ультразвука



Картина на экране  
эколокатора



**Рис. III.7.** Эхолокация: **а** – устройство, являющееся одновременно и источником, и приемником ультразвука. Стрелками показаны две волны: падающая на некоторый объект **А** внутри тела человека и отраженная от этого объекта и направляющаяся к приемнику; **б** – график зависимости регистрируемого приемником-источником электрического напряжения от времени: 1 – импульс послышки; 2 – отраженный импульс;  $\Delta t$  – интервал времени между ними.

В настоящее время ультразвук очень широко применяется в медицине и фармации. Так, ультразвук оказывает стерилизующее действие (это широко используется в стоматологии): он уничтожает многие вирусы, бактерии и грибы.

Под действием ультразвука повышается проницаемость мембран клеток кожи, поэтому его можно использовать для введения через кожу различных лекарственных веществ. Известен также ультразвуковой массаж, осуществляемый на клеточном уровне: при «облучении» ультразвуком увеличивается циркуляция цитоплазмы в клетках, уменьшается толщина малоподвижных примембранных слоев, улучшаются условия метаболизма.

Ультразвук высокой интенсивности применяют в хирургии для разрушения злокачественных опухолей, разрезания тканей (ультразвуковой скальпель), распиливания и сварки костей.

Ультразвук обуславливает интенсивное колебательное движение частиц жидкости (в каждой точке фазы уплотнения чередуются с фазами разрежения среды). Иногда в такой жидкости происходят разрывы сплошности среды и образуются микрополости (в фазе разрежения), которые быстро заполняются насыщенным паром окружающей жидкости. Время жизни полости, или пузырька, очень мало, так как в волне вслед за разрежением быстро наступает сжатие и давление на пузырек со стороны окружающей жидкости резко возрастает (оно может в несколько тысяч раз превышать атмосферное давление), что приводит к схлопыванию полости. Когда полости схлопываются, образуются сильные ударные волны. Это, в частности, используется для разрушения оболочек растительных и животных клеток и извлечения из них биологически активных веществ.

Ультразвук используют для размельчения, диспергирования частиц среды при изготовлении коллоидных растворов, лекарственных эмульсий.

Известно также тепловое действие ультразвука — поглощаемая средой энергия механической волны обуславливает нагревание среды. Этот эффект в простейшем случае описывается формулой:

$$I = I_0 \cdot e^{-k\ell}, \quad (\text{III.6})$$

где  $I$  — интенсивность ультразвуковой волны, прошедшей расстояние  $\ell$  в среде;  $I_0$  — начальная интенсивность,  $k$  — коэффициент поглощения ультразвука в среде.

Тепловое действие ультразвука используется в физиотерапии.

Ультразвук большой интенсивности обуславливает ускорение некоторых химических реакций, особенно окислительных.

Вспомним и об одном исследовательском применении ультразвука. Оно основано на эффекте Допплера; если при покоящихся друг относительно друга источнике и приемнике некоторой волны (например, ультразвуковой) частота изучаемой волны и регистрируемой одинакова, то при относительном сближении регистрируемая приемником частота волны будет больше той частоты, которую зафиксировал источник. При относительном удалении все происходит наоборот.

Специальная формула позволяет по сдвигу (разности) частот излучаемой и регистрируемой волн  $\Delta\nu$  оценить скорость относительного движения приемника и источника  $v$ .

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{c+v}{c-v}, \quad (\text{III.7})$$

где  $c$  — скорость ультразвука в среде;  $v$  — относительная скорость движения приемника и источника ультразвука;  $\nu_0$  — частота излучаемой волны.

Это обстоятельство, в частности, используют тогда, когда по доплеровскому сдвигу частоты оценивают скорость кровотока в сосуде. При этом можно оценить величину скорости и определить ее направление. На экране дисплея компьютера одно из возможных направлений окрашивается в красный цвет, а противоположное — в синий; интенсивность окраски указывает на величину скорости кровотока.

На основе ультразвукового эффекта Доплера можно также определить параметры движения клапанов и стенок сердца. Этот метод назван доплеровской эхокардиографией.