Кодирование информации в компьютере

Представление чисел

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использование особых знаковых систем, которые называют системами счисления.

Система счисления – совокупность приемов и правил записи чисел с помощью определенного набора символов.

Позиционные и непозиционные системы счисления

Все **системы счисления** делятся на две большие группы:

ПОЗИЦИОННЫЕ

Количественное значение каждой цифры числа зависит от того, в каком месте (позиции или разряде) записана та или иная цифра.

0,7
7
70

НЕПОЗИЦИОННЫЕ

Количественное значение цифры числа не зависит от того, в каком месте (позиции или разряде) записана та или иная цифра.

XIX

Позиционные системы счисления

Первая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была **шестидесятеричная**, т.е. в ней использовалось шестьдесят цифр!

В XIX веке довольно широкое распространение получила **двенадцатеричная** система счисления.

В настоящее время наиболее распространены **десятичная**, **двоичная**, **восьмеричная** и **шестнадцатеричная** системы счисления.

Основание системы счисления

Количество различных символов, используемых для изображения числа в позиционных системах счисления, называется основанием системы счисления.

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Соответствие систем счисления

Десятичная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Двоичная	**0**	**1**	**10**	**11**	**100**	**101**	**110**	**111**
Восьмеричная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Шестнадцатеричная	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Десятичная	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Двоичная	**1000**	**1001**	**1010**	**1011**	**1100**	**1101**	**1110**	**1111**	**10000**
Восьмеричная	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**20**
Шестнадцатеричная	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**10**

Двоичное кодирование текстовой информации

Для кодирования **одного символа** требуется **один байт** информации.

Учитывая, что каждый бит принимает значение 1 или 0, получаем, что с помощью 1 байта можно закодировать 256 различных символов.

$$\mathbf{2^8=256}$$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Чтобы перевести число из позиционной системы счисления с основанием р **в десятичную**, надо представить это число в виде суммы степеней р и произвести указанные вычисления в десятичной системе счисления.

Например, переведем число 1011_2 в десятичную систему счисления. Для этого представим это число в виде степеней двойки и произведем вычисления в десятичной системе счисления.

$1011_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*8 + 0*4 + 1*2 + 1*1 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}$

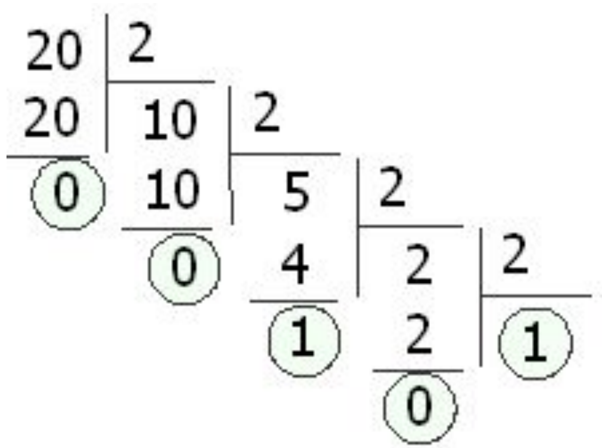
Рассмотрим еще один пример. Переведем число $52{,}74_8$ в десятичную систему счисления.

$52{,}74_8 = 5*8^1 + 2*8^0 + 7*8^{-1} + 4*8^{-2} = 5*8 + 2*1 + 7*1/8 +4*1/64 = 40 + 2 + 0{,}875 + 0{,}0625 = 42{,}9375_{10}$

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Перевод **из десятичной** системы счисления в систему счисления с основанием р осуществляется последовательным делением десятичного числа и его десятичных частных на р, а затем выписыванием последнего частного и остатков в обратном порядке.

Переведем десятичное число 20_{10} в двоичную систем счисления (основание системы счисления р=2). В итоге получили $20_{10} = 10100_2$.



Основная формула

В позиционной системе счисления с основанием *q* любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Здесь:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа;

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» *i*-го разряда.

Такая запись числа называется **развёрнутой формой записи.**

Развёрнутая форма

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Примеры записи чисел в развёрнутой форме:

$$2012 = 2\times10^3 + 0\times10^2 + 1\times10^1 + 2\times10^0$$

$$0{,}125 = 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3}$$

$$14351{,}1 = 1\times10^4 + 4\times10^3 + 3\times10^2 + 5\times10^1 + 1\times10^0 + 1\times10^{-1}$$

Двоичная система счисления

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием ***2***.

Двоичный алфавит: 0 и 1.

Для целых двоичных чисел можно записать:

$$\mathbf{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = a_{n-1}\times 2^{n-1} + a_{n-2}\times 2^{n-2} + \ldots + a_0\times 2^0}$$

Например:

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления

$$\frac{a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\ldots a_1\times 2^1+a_0}{2} = a_{n-1}\times 2^{n-2}+\ldots+a_1 \text{ (остаток } a_0)$$

$$\frac{a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\ldots a_1}{2} = a_{n-1}\times 2^{n-3}+\ldots+a_2 \text{ (остаток } a_1)$$

$$\frac{a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\ldots a_2}{2} = a_{n-1}\times 2^{n-4}+\ldots+a_3 \text{ (остаток } a_2)$$

. . .

На *n*-м шаге получим набор цифр: $\mathbf{a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}}$

Правило перевода целых десятичных чисел в систему счисления с основанием *q*

1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, равное нулю;

2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;

3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего полученного остатка.

Цифровые весы

Ôàéë "SWF"

Каждый знает, что дроби бывают обыкновенные и десятичные.
Обыкновенная дробь представляет собой отношение целого числа к натуральному.
Поэтому ее перевод в другую систему счисления трудности не представляет:
надо отдельно перевести в новую систему счисления числитель и знаменатель, затем записать их отношение.
Запись числа десятичной дробью — это распространение позиционного принципа вправо от разряда единиц.
Вспомните: при переходе на один разряд влево «вклад» цифры увеличивается в 10 раз, а при переходе на один разряд вправо уменьшается в 10 раз.
Так что запись 1,38054 обозначает число: 1 · 100+3 · 10−1+8 · 10−2+0 · 10−3+5 · 10−4+4 · 10−5.
Легко понять, что и здесь вместо числа 10 можно использовать любое другое натуральное число b, большее 1.
Скажем, 1,38054b=1 · b0+3 · b−1+8 · b−2+0 · b−3+5 · b−4+4 · b−5.
По аналогии с десятичными дробями будем называть такую запись дробного числа **b-ичной дробью**.
Так же как и для целых чисел, каждая цифра, используемая в записи **b-ичной дроби**, должна быть меньше b.
Как же переводить десятичную дробь в **b-ичную**?
Для того что-бы найти алгоритм, запишем **b-ичную дробь** c=0,a1a2...an в виде суммы разрядных слагаемых: c=a1 · b−1+a2 · b−2+...+an−1 · bn−1+an · b−n.

Вот пример перевода десятичной дроби 0,36 в пятеричную систему:

$$
\begin{array}{r|l}
\times\; 0, & 36 \\
 & 5 \\
\hline
\times\; 1, & 80 \\
 & 5 \\
\hline
4, & 00
\end{array}
$$

Ответ: 0,14.

А теперь попытаемся перевести ту же дробь
в семеричную систему счисления:

$$
\begin{array}{cr|l}
\times & 0, & 36 \\
 & & 7 \\
\hline
\times & 2, & 52 \\
 & & 7 \\
\hline
\times & 3, & 64 \\
 & & 7 \\
\hline
\times & 4, & 48 \\
 & & 7 \\
\hline
\times & 3, & 36 \\
 & & 7 \\
\hline
\times & 2, & 52 \\
 & & 7 \\
\hline
 & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Обратите внимание: после четвертого умножения мы снова получили дробь 0,36.
Это значит, что дальше процесс будет повторяться и никогда не закончится!
Тем самым после перевода числа 0,36 в семеричную систему счисления получается бесконечная периодическая дробь:
0,23432343...7= 0,(2343)7. При переводе конечной **b-ичной дроби** в десятичную систему тоже может получиться бесконечная дробь.
К примеру, запись 0,13 представляет одну треть и, следовательно, в десятичной системе будет выглядеть как бесконечная десятичная дробь 0,33333...=0,(3).

Перевод целых десятичных чисел в любую другую системы счисления осуществляется делением числа на основание новой системы счисления до тех пор, пока в остатке не останется число меньшее основания новой системы счисления. Новое число записывается в виде остатков деления, начиная с последнего.

Перевод правильной десятичной дроби в другую ПСС осуществляется умножением только дробной части числа на основание новой системы счисления до тех пор пока в дробной части не останутся все нули или пока не будет достигнута заданная точность перевода. В результате выполнения каждой операции умножения формируется одна цифра нового числа начиная со старшего.

Перевод неправильной дроби осуществляется по 1 и 2 правилу. Целую и дробную часть записывают вместе, отделяя запятой.

Пример перевода из двоичной в десятичную систему счисления.

$1010010{,}101_2 = 1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3} =$
$= 64+0+16+0+0+2+0+0.5+0+0.125 = 82.625_{10}$

Пример перевода из восьмеричной в десятичную систему счисления.

$108.5_8 = 1*\cdot8^2+0\cdot8^1+8\cdot8^0 + 5\cdot8^{-1} = 64+0+8+0.625 = 72.625_{10}$

Еще раз повторим алгоритм перевода чисел из одной системы счисления в другую ПСС

1. Из десятичной системы счисления:
    1. разделить число на основание переводимой системы счисления;
    2. найти остаток от деления целой части числа;
    3. записать все остатки от деления в обратном порядке;
2. Из двоичной системы счисления
    1. Для перевода в десятичную систему счисления необходимо найти сумму произведений основания 2 на соответствующую степень разряда;
    2. Для перевода числа в восьмеричную необходимо разбить число на триады.
       Например, $1000110 = 1\ 000\ 110 = 106_8$
    3. Для перевода числа из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную необходимо разбить число на группы по 4 разряда.
       Например, $1000110 = 100\ 0110 = 46_{16}$

Для перевода смешанного числа в десятичную систему из любой другой следует пронумеровать разряды числа, начиная с нуля, справа налево от младшего целого разряда. Разряды дробной части нумеруются слева направо от -1 в убывающем порядке. Теперь представим число в виде суммы произведений его цифр на основание системы в степени разряда числа и ответ готов.

Переведите число 105,4 из восьмеричной системы в десятичную.

Решение:

Пронумеруем целые разряды числа справа налево от 0, дробные – слева направо от -1 :

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5, & 4_8 \end{array}$$

Посчитаем сумму произведений цифр числа на 8 (основание системы) в степени разряда числа:

$$4 \cdot 8^{-1} + 5 \cdot 8^0 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 = 0,5 + 5 + 0 + 64 = 69,5_{10}$$

$$69,5_{10}$$

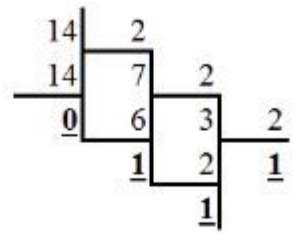
Переведите десятичное число 0,816 в двоичную систему с точностью до сотых.
Решение:
Умножаем дробь 0,816, а затем дробную часть произведения (0,632) на 2 и выписываем целые части, начиная с первой:

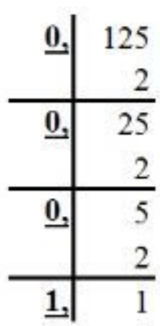
0,	816
	2
1,	632
	2
1,	264

$$0,11_2$$

$$0,816_{10} = 0,11_2$$

Переведем целую часть числа в двоичную систему:





Переведем дробную часть числа в двоичную систему:

Соединим целую и дробную части:

$$14,125_{10} = 1110,001_2$$

Спасибо за внимание