Сложение вероятностей

Теорема 1. **Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.**

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

● Пусть событиям A и B, связанным с некоторым испытанием, благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A+B$ будут благоприятствовать $k+l$ исходов.

По определению вероятности

$$P(A)=\frac{k}{n},\ P(B)=\frac{l}{n},\ P(A+B)=\frac{k+l}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n},$$

откуда следует равенство (1). ○

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2)$$

● События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Но $A + \overline{A} = U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A + \overline{A}) = P(U) = 1$, т. е. $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. ○

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ I способ. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\overline{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно,

что $P(C) = \frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Задача 2 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень, равна 0,8. Какова вероятность того, что, выстрелив по мишени один раз, этот стрелок промахнётся?

► Если событие A — попадание в цель при одном выстреле, то по условию $P(A) = 0{,}8$. Противоположное событию A событие $\overline{A}$ — промах, его вероятность $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Ответ 0,2. ◁

Задача 3 В группе спортсменов 10 лыжников и 7 велосипедистов. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных из этой группы пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист?

▶ Пусть событие A — среди выбранных пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист, тогда событие $\overline{A}$ — среди выбранных спортсменов нет ни одного велосипедиста (т. е. все — лыжники). В данном случае вероятность события $\overline{A}$ найти проще, чем $P(A)$. Найдём $P(\overline{A})$.

Число всех способов выбрать из имеющихся 17 спортсменов пятерых равно числу сочетаний из 17 по 5, т. е. $n = C_{17}^5$. Благоприятствующими событию $\overline{A}$ будут все пятерки спортсменов, выбранных из 10 лыжников. Их число $m = C_{10}^5$. Таким образом,

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^5}{C_{17}^5} = \frac{\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}}{\dfrac{17!}{12!\cdot 5!}} = \frac{10!\cdot 12!}{5!\cdot 17!} =$$

$$= \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17} = \frac{9}{221}.$$

Теперь находим $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{221} = \frac{212}{221}$.

Ответ $\frac{212}{221}$. ◁

Упражнения

1134 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) либо дама, либо валет; 2) либо шестёрка, либо туз; 3) либо семёрка треф, либо карта бубновой масти; 4) либо туз красной масти, либо карта трефовой масти? Решить задачу двумя способами.

1135 В ящике находятся 3 белых, 4 синих и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) цветной; 2) либо белый, либо красный; 3) либо белый, либо синий? Решить задачу двумя способами.

1136 В папке находятся 15 билетов спортивной лотереи, 20 билетов художественной лотереи и 30 билетов денежно-вещевой лотереи. Найти вероятность того, что наугад вынутый из этой пачки один билет окажется билетом: 1) либо спортивной, либо денежно-вещевой лотереи; 2) либо спортивной, либо художественной лотереи; 3) либо художественной, либо денежно-вещевой лотереи. Решить задачу двумя способами.

Независимые события. Умножение вероятностей

О п р е д е л е н и е. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

- Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$.

  Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n=36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m=1$. Таким образом, $P(AB)=\frac{1}{36}=$ $=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ○

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(AB) = 0{,}1$;

2) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(AB) = \frac{2}{9}$.

▶ 1) Так как $P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 = P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◁

Задача 2 Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события: A — названо чётное число, B — названо число, кратное пяти. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

▶ Среди десяти чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10 чётных чисел 5, а кратных пяти — 2, поэтому $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Событие AB состоит в названии числа, кратного как числу 2, так и числу 5, т. е. числу 10. Среди первых десяти натуральных чисел таким является одно число 10, поэтому $P(AB) = \frac{1}{10}$. Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = P(AB)$, то события A и B являются независимыми. ◁

Задача 3 За офисом наблюдают две независимые друг от друга видеокамеры. Вероятность того, что в течение суток первая видеокамера выйдет из строя, равна 0,001, а вероятность того, что выйдет из строя вторая, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

▶ Пусть событие A — выход из строя в течение рассматриваемых суток первой видеокамеры, B — выход из строя в течение тех же суток второй камеры. Согласно условию задачи $P(A) = 0{,}001 = 10^{-3}$, $P(B) = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Событие AB — выход из строя в течение суток обеих видеокамер. Считая события A и B независимыми, находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ $5 \cdot 10^{-7}$. ◁

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

▶ Пусть событие A — попадание в цель хотя бы одним орудием, а противоположное ему событие $\overline{A}$ наступает при промахе как первого, так и второго орудия. Вероятность промаха первого орудия равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность промаха второго равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Считая промахи орудий при стрельбе по цели независимыми событиями, находим $P(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, значит, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Ответ 0,94. ◁

1145 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{10}{13}$, $P(AB) = \frac{4}{13}$;

2) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}2$, $P(AB) = 0{,}15$;

3) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$, $P(AB) = 0{,}6$;

4) $P(A) = \frac{3}{14}$, $P(B) = \frac{7}{12}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$.

1146 Наугад называется: 1) одно из первых двенадцати натуральных чисел; 2) одно из первых тринадцати натуральных чисел. Рассматриваются события: A — названное число является чётным, B — названное число кратно трём. Установить, являются ли события A и B независимыми.

1147 Бросаются две игральные кости и рассматриваются события: 1) A — на первой кости выпало число 6, B — на второй кости выпало чётное число; 2) A — на первой кости выпало нечётное число, B — на второй кости выпало число, кратное 3. Убедиться с помощью формулы (1) в независимости событий A и B.