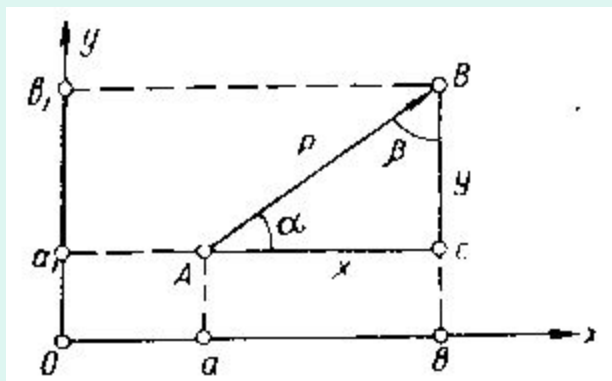


## Проекция силы на ось

- Силу на плоскости можно определить аналитически, если известны проекции этой силы на две взаимно перпендикулярные оси: на этих осях откладываются проекции сил.

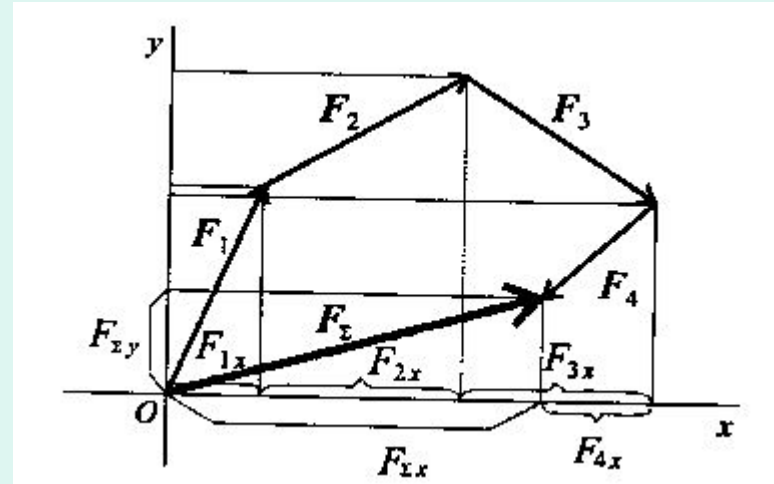
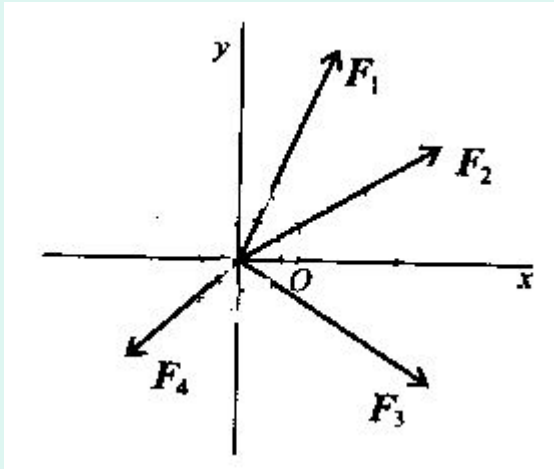


- Проекция силы на ось** определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы.
- Таким образом, проекция силы имеет знак: положительный при одинаковых направлениях вектора силы и оси и отрицательный при направлении в сторону отрицательной полуоси.
- Если обозначить проекции на оси  $x$  и  $y$  соответственно через  $X$  и  $Y$ , то равнодействующая определится как гипотенуза прямоугольного треугольника:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

причем,  $X = P \cdot \cos \alpha$  и  $Y = P \cdot \sin \alpha$

## Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом



- Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси и сложим эти проекции отдельно по каждой из осей:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x};$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y};$$

- Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям :

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}$$

## Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

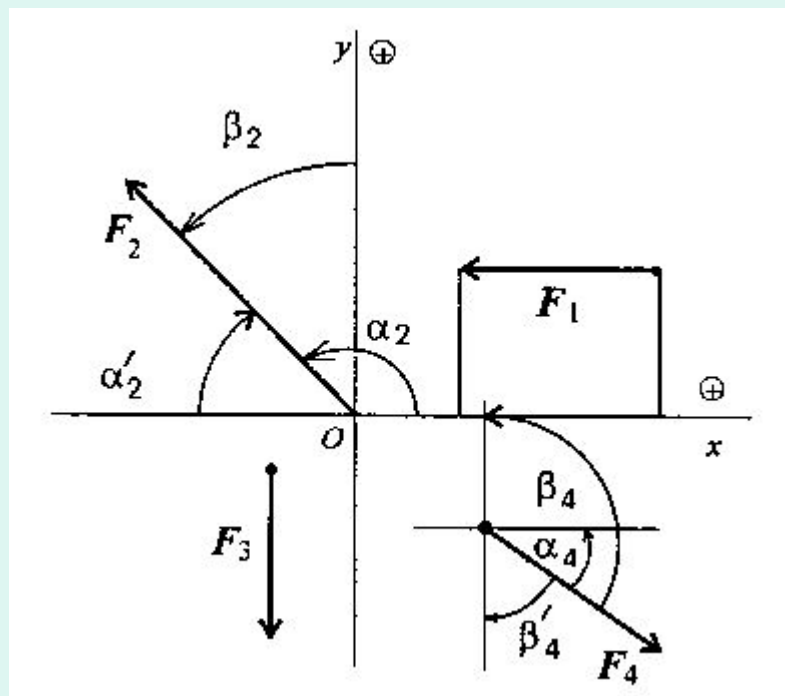
- Исходя из того, что в условиях равновесия равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_{\Sigma} = 0 \quad F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \Rightarrow \begin{cases} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx} = 0 \\ F_{\Sigma y} = \sum F_{ky} = 0 \end{cases}$$

- Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.***
- Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил :

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0 \\ \sum_0^n F_{ky} = 0 \end{cases}$$

**Пример 1.** Определить величины и знаки проекций представленных на рис. сил.



**Решение**

$$F_{1x} = -F_1 \cos 0^\circ < 0;$$

$$F_{1y} = F_1 \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \alpha'_2;$$

$$\alpha'_2 = 180^\circ - \alpha_2;$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \beta_2 > 0;$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{3y} = F_3 \cos \beta_3 = F_3 \cos 180^\circ;$$

$$F_{3y} = -F_3 < 0;$$

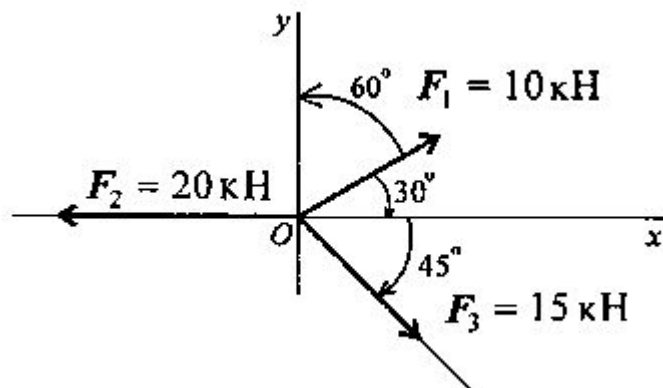
$$F_{4x} = F_4 \cos \alpha_4 > 0;$$

$$F_{4y} = F_4 \cos \beta_4 = -F_4 \cos \beta'_4;$$

$$F_{4y} < 0.$$

**Пример 2.** Определить величину и направление равнодействующей плоской системы сходящихся сил аналитическим способом.

**Решение**



1. Определяем проекции всех сил системы на  $Ox$  :

$$F_{1x} = 10 \cdot \cos 30^\circ;$$

$$F_{1x} = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = 20 \cdot \cos 180^\circ = -20 \text{ кН};$$

$$F_{3x} = 15 \cdot \cos 45^\circ;$$

$$F_{3x} = 15 \cdot 0,707 = 10,6 \text{ кН}.$$

Сложив алгебраически проекции, получим проекцию равнодействующей на ось  $Ox$ .

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{\Sigma x} = 8,66 - 20 + 10,6 = -0,735 \text{ кН}$$

2. Определяем проекции всех сил на ось  $Oy$  значения проекций, получим величину проекции  $Oy$ .

$$F_{1y} = 10 \cdot \cos 60^\circ; \quad F_{1y} = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$F_{2y} = 20 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{3y} = 15 \cdot \cos 135^\circ; \quad F_{3y} = -15 \cdot 0,707 = -10,6 \text{ кН}.$$

Сложив алгебраически значения проекций, получим величину проекции равнодействующей на ось  $Oy$ .

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$

$$F_{\Sigma y} = 5 - 10,6 \text{ кН} = -5,6 \text{ кН}.$$

3. Определяем модуль равнодействующей по величинам проекций:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2};$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{0,735^2 + 5,6^2} = 5,65 \text{ кН}.$$

**Пример 3.** Система трех сил находится в равновесии. Известны проекции двух сил системы на взаимно перпендикулярные оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 10 \text{ кН}; & F_{2x} &= 5 \text{ кН}; \\ F_{1y} &= -2 \text{ кН}; & F_{2y} &= 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Определить, чему равна и как направлена третья сила системы.

### Решение

1. Из уравнений равновесия системы определяем:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} &= 0; & 10 + 5 + F_{3x} &= 0; & F_{3x} &= -15 \text{ кН}. \\ \sum F_{ky} &= 0; & F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} &= 0; & -2 + 6 + F_{3y} &= 0; & F_{3y} &= -4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

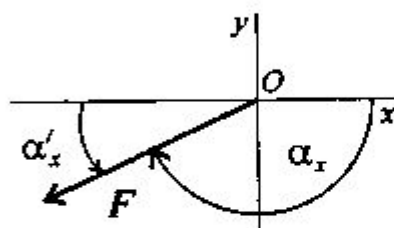


Рис. 3.8

2. По полученным величинам проекций определяем модуль силы:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2}; \quad F_3 = \sqrt{15^2 + 4^2} = 15,52 \text{ кН}.$$

3. Направление вектора силы относительно оси  $Ox$  (рис. 3.8):

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{3x}}{F_3}; \quad \cos \alpha_x = -\frac{15}{15,52} = -0,966 \implies \alpha'_x = 14^\circ 50'.$$

Угол с осью  $Ox$  будет равен

$$\alpha_x = 180^\circ - \alpha'_x = 165^\circ 10'.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Запишите выражение для расчета проекции силы  $F$  на ось  $Oy$  (рис. 3.9).

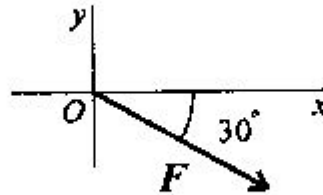


Рис. 3.9

2. Определите сумму проекций сил системы на ось  $Ox$  (рис. 3.10).

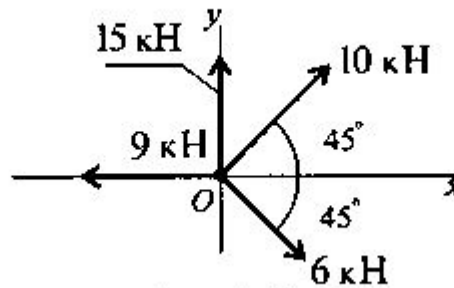


Рис. 3.10

3. Определите величину силы по известным проекциям:

$$F_x = 3 \text{ кН}; \quad F_y = 4 \text{ кН}.$$



4. Груз находится в равновесии (рис. 3.11). Какая система уравнений равновесия для шарнира  $A$  записана верно?

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_2 \cos 60^\circ - F = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = R_1 \cos 60^\circ - R_2 \cos 30^\circ = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 60^\circ + F = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = -R_1 \cos 30^\circ + R_2 \cos 60^\circ = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 30^\circ - F = 0. \end{cases} \quad (3)$$

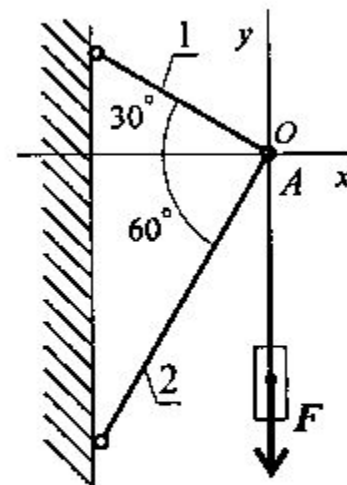


Рис. 3.11

У к а з а н и я.

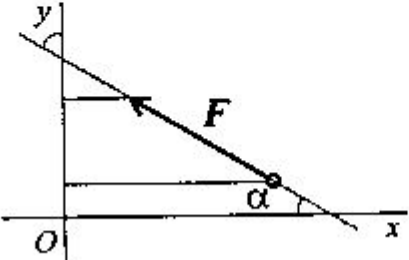
1. При ответе на вопросы 1 и 2 необходимо знать, что в выражение для величины проекции силы на ось подставляется угол между вектором силы и положительной полуосью координат. Не забыть, что определяется алгебраическая сумма.

2. При ответе на вопрос 4 сначала следует определить возможные направления реакций в стержнях, мысленно убирая по очереди

стержни и рассматривая возможные перемещения (см. лекцию 1). Затем записать алгебраические суммы проекций сил на оси  $Ox$  и  $Oy$ . Полученные уравнения сравнить с приведенными.

5. Ответьте на вопросы тестового задания.

### Проекция силы на ось

В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
<p>1. Выбрать выражение для расчета проекции силы <math>F</math> на ось <math>Oy</math>.</p> 	$F \cos \alpha$	1
	$F \cos (180^\circ - \alpha)$	2
	$F \sin \alpha$	3
	$-F \cos \alpha$	4

<p>2. Выбрать выражение для расчета проекции силы <math>F_2</math> на ось <math>Ox</math>.</p> 	$F_2 \cos 30^\circ$	1
	$F_2 \cos 150^\circ$	2
	$F_2 \cos 60^\circ$	3
	$-F_2 \cos 150^\circ$	4

3. Рассчитать сумму проекций всех сил системы на ось  $Oy$  (см. рис. к вопросу 2), если  $F_1 = 28$  кН,  $F_2 = 15$  кН,  $F_3 = 8$  кН,  $F_4 = 24$  кН,  $F_5 = 30$  кН.

2,5 кН

1

14 кН

2

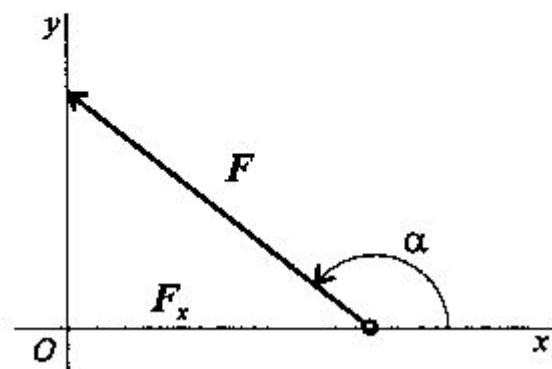
18,5 кН

3

60,5 кН

4

4. Определить угол между заданной силой и осью  $Ox$ , если известны величина силы и ее проекции на ось  $Ox$ :  $F_x = -21$  кН,  $F = 30$  кН.



$30^\circ$

1

$45^\circ$

2

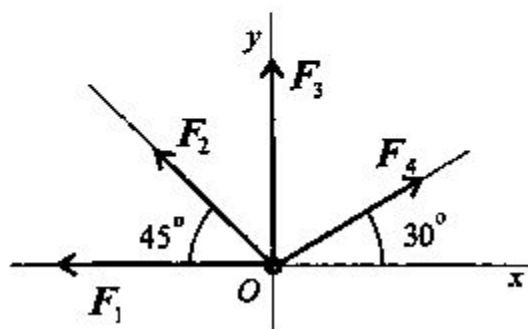
$135^\circ$

3

$150^\circ$

4

5. Рассчитать сумму проекций системы сходящихся сил на ось  $Ox$ .  $F_1 = 30$  кН,  $F_2 = 10$  кН,  $F_3 = 15$  кН,  $F_4 = 24$  кН.



-1 кН

1

-16,3 кН

2

34 кН

3

79 кН

4