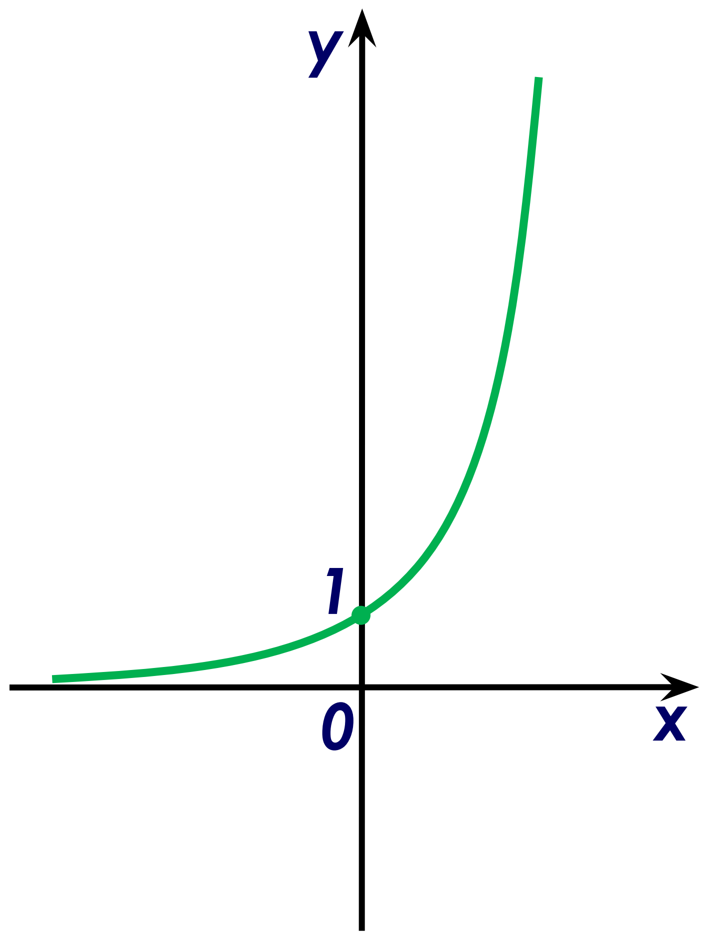
Показательные неравенства

Решение показательных неравенств основано на свойствах показательной функции.

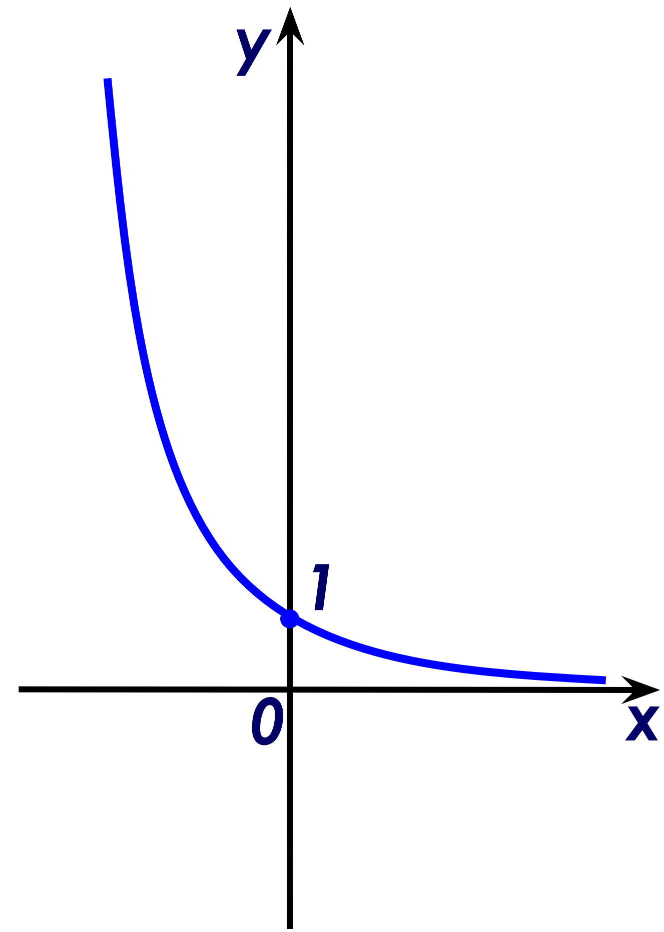
График показательной функции

$y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

$y = a^x$, $a > 1$



$y = a^x$, $0 < a < 1$



Свойства сравнения выражений вида a^x, $a \neq 1$, $a > 0$

1. Если $0 < a < 1$ или $a > 1$, то равенство $a^r = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $r = s$.

2. Если $0 < a < 1$, то
а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow$ $x < 0$;
б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow$ $x > 0$.

3. Если $a > 1$, то
а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow$ $x > 0$;
б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow$ $x < 0$.

4. Если $a > 1$, то
а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow$ $f(x) > h(x)$;
б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow$ $f(x) < h(x)$.

5. Если $0 < a < 1$, то
а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow$ $f(x) < h(x)$;
б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow$ $f(x) > h(x)$.

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$ | $0 < a < 1$

$$f(x) > g(x) \qquad f(x) < g(x)$$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$2^{2x-4} > 64$

$2^{2x-4} > 2^6$

$т.к.\ функция\ \ y = 2^t\ \ монотонно$

$возрастает\ на\ R,\ то$

$2x - 4 > 6$

$x > 5$

$Ответ:\ \ (5; +\infty)$

Пример 2

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$

$т.к.\ функция\ \ y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

$монотонно\ \ убывает\ на\ R,\ то$

$2x - 3,5 > 0,5$

$x > 2$

$Ответ:\ \ (2; +\infty)$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 3

$$0{,}5^{x^2-3x} \le 0{,}5^{3x-8}$$

т.к. функция $y=(0{,}5)^t$

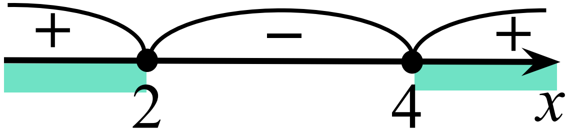
монотонно убывает на R, то

$$x^2-3x \ge 3x-8$$

$$x^2-6x+8 \ge 0$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$



$$x \in (-\infty;\,2] \cup [4;\,+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;\,2] \cup [4;\,+\infty)$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \Big| : \left(3^{3x}\right), \ т.к. \ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

$$Пусть \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \ где \ t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$$т.к. \ t^2 + t + 2 > 0 \ для \ любых \ t, \ то \ t - 1 > 0$$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4 (продолжение)

$$\textit{Вернемся к исходной переменной}:$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$$\text{т.к. } a = \frac{2}{3} < 1, \text{ то функция } y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \text{ убывает на } R$$

$$x < 0$$

$$\text{Ответ}: (-\infty;\ 0).$$