НАДЕЖНОСТЬ И ИСПЫТАНИЕ ЭКСПОЗИЦИОННО-РЕКЛАМНЫХ ОБЪЕКТОВ

Тема №2. Общие закономерности теории надежности

2.1 ***Случайные величины и их характеристики***

- Внезапные отказы определяются случайными неблагоприятными сочетаниями нескольких факторов. Случайность связана с тем, что причины событий остаются скрытыми. Рассеяние ресурсов по критерию усталости (оцениваемое отношением наибольшего ресурса к наименьшему) для подшипников достигает 40, для зубчатых передач 10...15. Рассеяние ресурсов по износу также весьма значительно. Существенное рассеяние имеют действующие нагрузки, механические характеристики материалов и деталей, зазоры и натяги, которые при изготовлении получаются как разности сопрягаемых размеров.
- Поэтому в расчетах надежности многие параметры должны рассматриваться случайными величинами, т. е. такими, которые могут принять то или иное значение, неизвестное заранее. Они могут быть непрерывного или прерывного (дискретного) типа.
- Для каждого числа x в диапазоне изменения случайной величины X существует определенная вероятность $P(X<x)$, что X не превосходит x. Эта зависимость $F(x) = P(X<x)$ называется *функцией распределения* или *функцией вероятности случайной величины X.*
- Функция $F(x)$ является неубывающей функцией x (монотонно возрастающей для непрерывных процессов и ступенчато возрастающей для дискретных процессов). В пределах изменения случайной величины X она изменяется от 0 до 1.
- *Случайной величиной X* называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем заранее неизвестное. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.
- *Дискретная случайная величина* – величина, принимающая только отделенные (разрозненные) друг от друга значения, которые можно заранее перечислить (например, число агрегатов, вышедших одновременно из работы).
- Если дискретная случайная величина X принимает значения $X1, X2, \ldots, X_m$ с заданными вероятностями $P1, P2, \ldots, P_m$, то соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения.*
- Для дискретных случайных величин закон распределения вероятностей наиболее просто задать с помощью таблиц распределения.
- *Непрерывная случайная величина* – величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток (интервал) – например, изменения нагрузки.

2.2 ***Общие зависимости***

- Параметры надежности используются в статистической трактовке для оценки состояния и в вероятностной трактовке для прогнозирования. Первые выражаются в дискретных числах, их в теории вероятностей и математической теории надежности называют *оценками.* При достаточно большом количестве испытаний они принимаются за истинные характеристики надежности.
- Рассмотрим проведенные для оценки надежности испытания или эксплуатацию значительного числа N элементов в течение времени t (или наработки в других единицах). Пусть к концу испытания или срока эксплуатации останется N_p работоспособных (неотказав-ших) элементов и n отказавших.
- Тогда относительное количество отказов

$$Q(t) = \frac{n}{N}$$

- Если испытание проводится как выборочное, то $Q(t)$ можно рассматривать как статистическую оценку вероятности отказа или, если N достаточно велико, как вероятность отказа.

Вероятность безотказной работы оценивается относительным количеством работоспособных элементов

$$P(t) = \frac{N_p}{N} = 1 - \frac{n}{N}.$$

Так как безотказная работа и отказ — взаимно противоположные события, то сумма их вероятностей равна 1.

Это же следует из приведенных выше зависимостей.

При t=0 n=0, $Q(t)$=0 и $P(t)$=1.

При t=∞ n=N, $Q(t)$=1 и $P(t)$=0.

Распределение отказов по времени характеризуется *функцией плотности распределения* $f(t)$ наработки до отказа. В статистической трактовке

$$f(t) = \frac{\Delta n}{N\Delta t} = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t},$$

в вероятностной трактовке

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt},$$

Здесь Δn и $\Delta Q(t)$ —приращение числа отказавших объектов и соответственно вероятности отказов за время Δt.

Вероятности отказов и безотказной работы в функции плотности $f(t)$ выражаются зависимостями

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt \text{; при } t=\infty,\ Q(t) = \int_0^\infty f(t)dt = 1;$$

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^\infty f(t)dt$$

Интенсивность отказов λ(t) в отличие от плотности распределения относится к числу объектов N_p, оставшихся работоспособным, а не к общему числу объектов. Соответственно статистической трактовке

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n}{N_p \Delta t}$$

в вероятностной трактовке, учитывая, что $P(t) = \frac{N_p}{N}$,

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$$

Получим выражение для вероятности безотказной работы в зависимости от интенсивности отказов.

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$$

Это соотношение является одним из основных уравнений теории надежности.

К числу важнейших общих зависимостей надежности относятся зависимости надежности систем от надежности элементов.

Рассмотрим надежность простейшей расчетной модели системы из последовательно соединенных элементов (рис. 1), у которой отказ каждого элемента вызывает отказ системы, а отказы элементов принимаются независимыми.

Используем известную теорему умножения вероятностей, согласно которой *вероятность произведения, т. е. совместного проявления независимых событий, равно произведению вероятностей этих событий.* Следовательно, вероятность безотказной работы системы равна произведению вероятностей безотказной работы отдельных элементов, т. е.

$$P_{cm}(t)=P_1(t)P_2(t)...P_n(t).$$

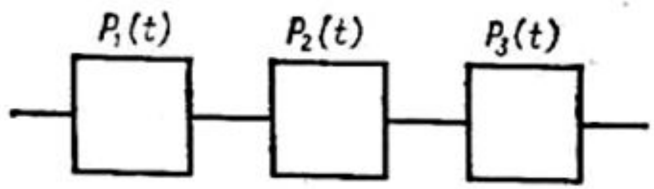

Рис. 1 - Последовательная система

Если $P_1(t)=P_2(t)=\ldots=P_n(t)$, то $P_{cm}(t)=P_1^n(t)$. Поэтому надежность сложных систем получается низкой. Например, если система состоит из 10 элементов с вероятностью безотказной работы 0,9, то общая вероятность получается 0,35.

Обычно вероятность безотказной работы элементов достаточно высокая, поэтому, выразив $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$ через вероятности отказов и пользуясь теорией приближенных вычислений, получаем

$$P_{cm}(t)=1-(Q_1(t)\cdot Q_2(t)\cdot\ldots\cdot Q_n(t))$$

так как произведениями двух малых величин можно пренебречь. При $Q_1(t)=Q_2(t)=\ldots=Q_n(t)$ получаем $P_{cm}(t)=1-nQ_1(t)$. Пусть в системе из шести одинаковых последовательных элементов $P_1(t)$=0,99. Тогда $Q_1(t)$=0,01 и $P_{cm}(t)$=0,94.

Вероятность безотказной работы нужно уметь определять для любого промежутка времени. По теореме умножения вероятностей

$$P(t)=\frac{P(T+t)}{P(T)},$$

где $P(T)$ и $P(T+t)$ — вероятности безотказной работы за время T и $T+t$ соответственно;

$P(t)$ — условная вероятность безотказной работы за время t (термин «условная» здесь введен, поскольку вероятность определяется в предположении, что изделия не имели отказа до начала интервала времени или наработки).

2.3 ***Надежность в период нормальной эксплуатации***

В этот период постепенные отказы еще не проявляются и надежность характеризуется внезапными отказами. Эти отказы вызываются неблагоприятным стечением многих обстоятельств и поэтому имеют постоянную интенсивность, которая не зависит от возраста изделия:

$$\lambda(t) = \lambda = const,$$

где $\lambda = \frac{1}{m_t}$; m_t —средняя наработка до отказа (обычно в часах). Тогда λ выражается числом отказов в час.

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Она подчиняется экспоненциальному закону распределения времени безотказной работы и одинакова за любой одинаковый промежуток времени в период нормальной эксплуатации.

Экспоненциальным законом распределения можно аппроксимировать время безотказной работы широкого круга объектов (изделий): особо ответственных машин, эксплуатируемых в период после окончания приработки и до существенного проявления постепенных отказов.

Существенное достоинство экспоненциального распределения — его простота: оно имеет только один параметр.

Если, как обычно, λt <0,1, то формула для вероятности безотказной работы упрощается в результате разложения в ряд и отбрасывания малых членов:

$$P(t) = 1 - \lambda t$$

Плотность распределения (в общем случае)

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

Значения вероятности безотказной работы в зависимости от $\lambda(t)t = \dfrac{t}{m_t}$ (рис. 2):

$\lambda(t)t$............	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$P(t)$.............	0,368	0,9	0,99	0,999	0,9999

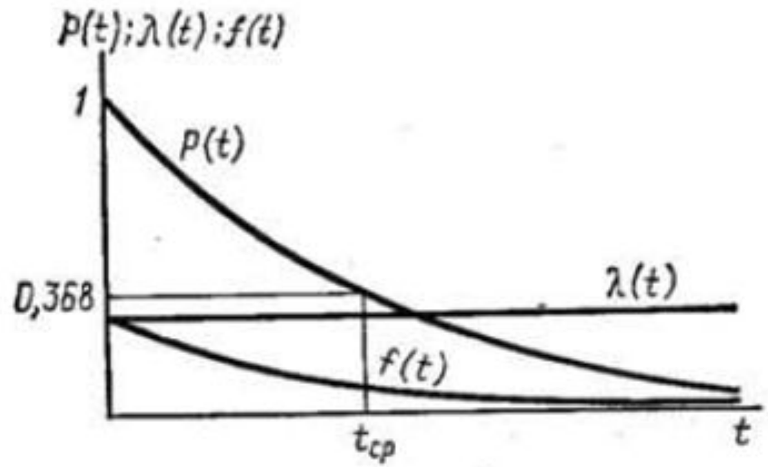

Рис. 2 - Функции вероятности *P(t)* безотказной работы, плотности вероятности *f(t)* и интенсивности *λ(t)* отказов экспоненционального распределения

Так как при $\dfrac{t}{m_t} = 1$ вероятность P(t)≈0,37, то 63% отказов возникает за время $t<.m_t$ и только 37% позднее. Из приведенных значений следует, что для обеспечения требуемой вероятности безотказной работы 0,9 или 0,99 можно использовать только малую долю среднего срока службы (соответственно 0,1 и 0,01).

Если работа изделия происходит при разных режимах, а следовательно, и интенсивностях отказов λ_1 (за время t_1) и λ_2 (за время t_2), то

$$P(t) = e^{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}$$

Эта зависимость следует из теоремы умножения вероятностей.

Для определения на основании опытов интенсивности отказов оценивают среднюю наработку до отказа

$$m_t = \frac{1}{N} \sum t_i$$

где N — общее число наблюдений.

2.4 ***Надежность в период постепенных отказов***

- Для постепенных отказов нужны законы распределения времени безотказной работы, которые дают вначале низкую плотность распределения, затем максимум и далее падение, связанное с уменьшением числа работоспособных элементов.
- В связи с многообразием причин и условий возникновения отказов в этот период для описания надежности применяют несколько законов распределений, которые устанавливают путем аппроксимации результатов испытаний или наблюдений в эксплуатации.
- Нормальное распределение является наиболее универсальным, удобным и широко применяемым для практических расчетов (рис. 3, 4).
- ***Распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение случайной величины оказывают влияние многие примерно равнозначные факторы.***

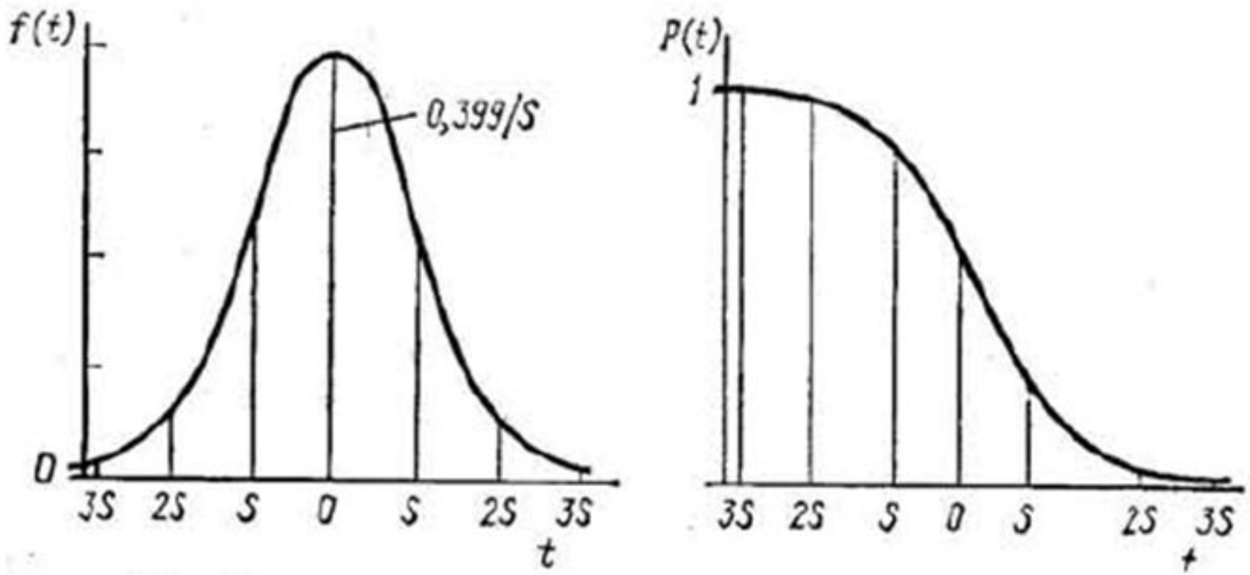

Рис. 3 - Функция плотности вероятности и интегральная функция вероятности нормального распределения

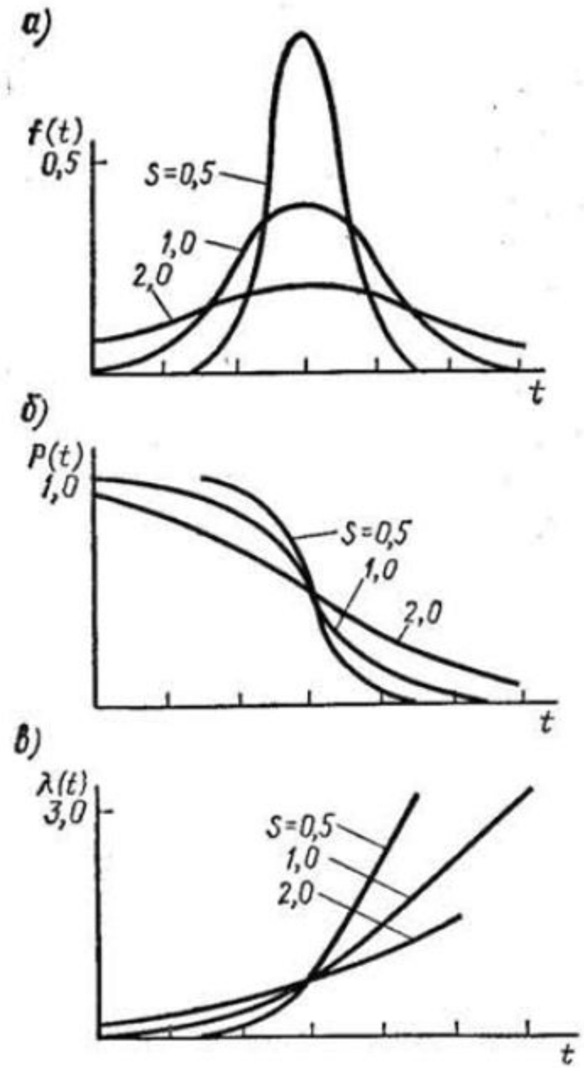

Рис. 4 - Основные характеристики нормального распределения при разных значениях среднего квадратического отклонения:
а — плотность вероятности; б—вероятность безотказной работы; в—интенсивность отказов

Нормальному распределению подчиняется наработка до отказа многих восстанавливаемых и невосстанавливаемых изделий, размеры и ошибки измерений деталей и т.д.

Плотность распределения

$$f(t)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2S^2}}$$

Распределение имеет два независимых параметра: математическое ожидание m_t и среднее квадратическое отклонение S. Значения параметров m_t и S оценивают по результатам испытаний по формулам

$$m_t \approx \bar{t}=\sum\frac{t_i}{N}$$

$$S\approx s=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(t_i-\bar{t}\right)^2}$$

где $\bar{t}$ и s — оценки математического ожидании и среднего квадратического отклонения.

Сближение параметров и их оценок увеличивается с увеличением числа испытаний.

Иногда удобнее оперировать с дисперсией $D=S^2$.

Математическое ожидание определяет на графике (см. рис. 3) положение петли, а среднее квадратическое отклонение — ширину петли.

Кривая плотности распределения тем острее и выше, чем меньше S. Она начинается от $t=-\infty$ и распространяется до $t=+\infty$. Это не является существенным недостатком, особенно если $m_t\geq 3S$, так как площадь, очерченная уходящими в бесконечность ветвями кривой плотности, выражающая соответствующую вероятность отказов, очень мала. Так, вероятность отказа за период времени до m_t—3S составляет всего 0,135% и обычно не учитывается в расчетах. Вероятность отказа до m_t—2S равна 2,175%. Наибольшая ордината кривой плотности распределения равна 0,399/S.

Интегральная функция распределения $F(t) == \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$.

Вероятность отказа и вероятность безотказной работы соответственно *Q(t)=F(t); P(t)=1-F(t).*

Вычисление интегралов заменяют использованием таблиц.

Распределение суммы независимых случайных величин *U*=X+У+Z, называемое *композицией распределений,* при нормальном распределении слагаемых также является нормальным распределением.

Математическое ожидание и дисперсия композиции соответственно равны

$$m_u = m_x + m_y + m_z; \; S_u^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2,$$

где m_x, m_y, m_z — математические ожидания случайных величин X, *Y, Z;*

S_x^2, S_y^2, S_z^2 — дисперсия тех же величин.

Усеченное нормальное распределение получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины. Оно, в частности, вносит уточнение в расчеты надежности по сравнению с нормальным распределением при больших значениях коэффициента вариации $v=S/m_i$.

Функция плотности распределения записывается так же, как плотность нормального распределения, но с коэффициентом пропорциональности *c:*

$$f(t)=\frac{c}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2S^2}}$$

где t_0 — значение случайной величины, соответствующее максимуму $f(t)$ и называемое модой.

Коэффициент c для распределения, ограниченного пределами изменения t от a до b, определяется из условия

$$\int_a^b f(t)dt=1=c[F(b)-F(a)]$$

где $F(b)$ и $F(a)$— значения функции нормального распределения для предельных значений t Отсюда

$$c=\frac{1}{F(b)-F(a)}$$

Пользуясь функцией F_0 нормального распределения нормированной и центрированной случайной величины, запишем:

$$c=\frac{1}{F_0\left(\frac{b-t_0}{S}\right)-F_0\left(\frac{a-t_0}{S}\right)}$$

Основное применение усеченное нормальное распределение имеет с параметрами $a=0$ и $b=\infty$, отражающее в задачах надежности невозможность отказов при отрицательных значениях времени. Тогда

$$c = \frac{1}{F_0\left(\frac{t_0}{S}\right)}$$

Значения c можно выбрать в зависимости от t_0/S:

t_0/S	1	2	3
c	1,189	1.023	1,001

Таким образом, при $t_0>2S$ коэффициент c очень близок к единице. Вероятность безотказной работы

$$P(t) = cF_0\left(\frac{t_0 - t}{S}\right)$$

Средний ресурс

$$m_t = t_0 + S \cdot f^*\left(\frac{t_0}{S}\right)$$

где f^*—функция, которая определяется по таблице для анализа и контроля надежности.

Примером усеченных распределений может быть распределение параметра качества изделий после отбраковки части изделий по этому параметру.

В логарифмически нормальном распределении логарифм случайной величины распределяется по нормальному закону. Как распределение положительных величин, оно несколько точнее, чем нормальное, описывает наработку до отказа деталей, в частности, по усталости.

Логарифмически нормальное распределение удобно для случайных величин, представляющих собой произведение значительного числа случайных исходных величин, подобно тому, как нормальное распределение удобно для суммы случайных величин.

Плотность распределения описывается зависимостью

$$f(t)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2S^2}}$$

где μ и S — параметры, оцениваемые по результатам испытаний.

Так, при испытаниях N изделий до отказа

$$\mu\approx\mu^*=\frac{\sum\ln t_i}{N};\ S\approx s=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(\ln t_i-\mu^*)^2}$$

где μ* и s — оценка параметров μ и *S*.

Вероятность безотказной работы можно определить по таблицам для нормального :пределения.

Математическое ожидание наработки до отказа

$$m_t=e^{\mu+S^2/2}$$

среднее квадратическое отклонение

$$S_t=\sqrt{e^{2\mu+S^2}\left(e^{S^2}-1\right)}$$

коэффициент вариации

$$v_t=\frac{S_t}{m_t}=\sqrt{\left(e^{S^2}-1\right)}$$

При $v_t<0{,}3$ полагают $v_t=S_t$, при этом ошибка $<1\%$.

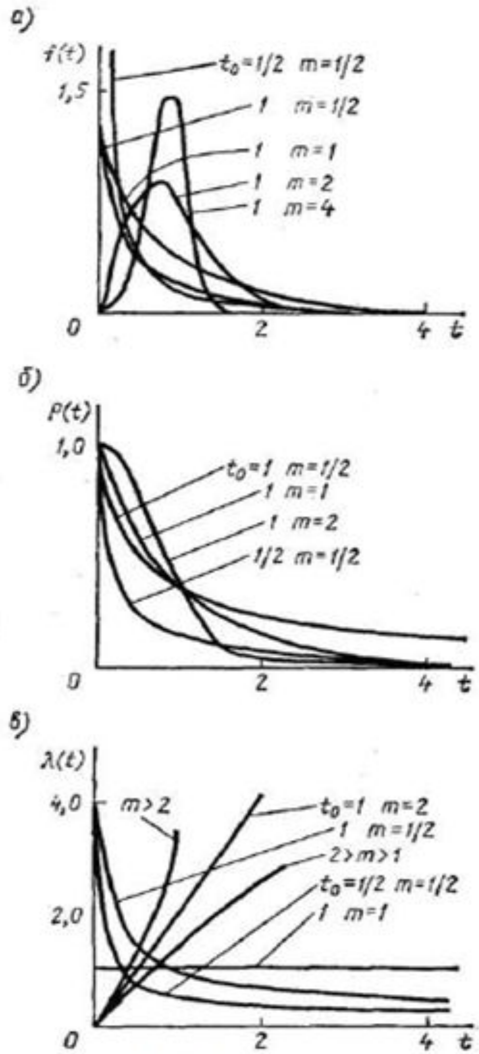

Рис. 5 - Характеристики распределения Вейбулла при разных параметрах t_0 и m

Распределение Вейбулла довольно универсально, охватывает путем варьирования параметров широкий диапазон случаев изменения вероятностей. Наряду с логарифмически нормальным распределением оно удовлетворительно описывает наработку деталей по усталостным разрушениям. Используется для оценки надежности деталей и узлов машин. Применяется также для оценки надежности по приработочным отказам.

Распределение характеризуется следующей функцией вероятности безотказной работы (рис. 5)

$$P(t) = e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

Интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1}$$

плотность распределения

$$f(t) = \frac{m}{t_0} t^{m-1} e^{-\frac{t^m}{t_0}}$$

Распределение Вейбулла имеет также два параметра: параметр формы $m>0$ и параметр масштаба $t_0>0$.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно

$$m_t = b_m t_0^{1/m}; \; S_t = c_m t_0^{1/m}$$

где b_m и c_m — коэффициенты.

Если в течение времени t^* отказы не наступают, то формулы для характеристик надежности несколько модифицируются. Так, вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\frac{(t-t^*)^m}{t_0}}$$

Возможности и универсальность распределения Вейбулла видны из следующих пояснений (рис. 5).

При $m<1$ функции $\lambda(t)$ и $f(t)$ от наработки до отказа убывающие.

При $m=1$ распределение превращается в экспоненциальное $\lambda(t)=\text{const}$ и $f(t)$ — убывающая функция.

При $m>1$ функция $f(t)$ — одновершинная, функция $\lambda(t)$ непрерывно возрастающая при $1<m<2$ с выпуклостью вверх, а при $m>2$ — с выпуклостью вниз.

При $m=2$ функция $\lambda(t)$ является линейной и распределение Вейбулла превращается в так называемое распределение Рэлея.

При $m=3,3$ распределение Вейбулла близко к нормальному.

2.5 Совместное действие внезапных и постепенных отказов

Вероятность безотказной работы изделия за период t, если до этого оно проработало время T, по теореме умножения вероятностей равна

$$P(t) = P_B(t)P_n(t)$$

где $P_B(t) = e^{-\lambda t}$ и $P_n(t) = \dfrac{P_n(T+t)}{P_n(T)}$ — вероятности отсутствия внезапных и соответственно постепенных отказов.

Для системы из последовательно соединенных элементов вероятность безотказной работы за период t равна

$$P_{CT}(t) = e^{-t\sum \lambda_i} \prod \frac{P_{ni}(T+t)}{P_{ni}(T)}$$

где знаки $\sum$ и $\prod$ означают сумму и произведение.

Для новых изделий T=0 и $P_{ni}(T)=1$.

На рис. 6 показаны кривые вероятности отсутствия внезапных отказов, постепенных отказов и кривая вероятности безотказной работы при совместном действии внезапных и постепенных отказов.

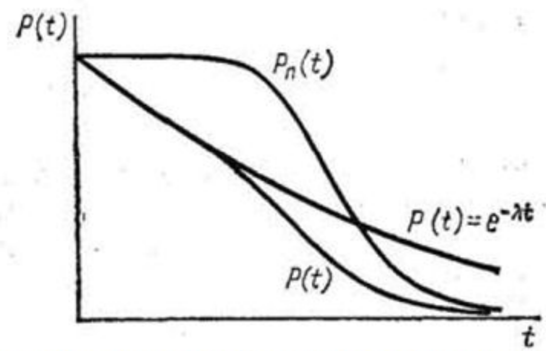

Рис. 6 - Совместное действие внезапных и постепенных отказов, где верхняя кривая *P(t)* для внезапных отказов

Вначале, когда интенсивность постепенных отказов низка, кривая соответствует кривой $P_B(t)$, а потом резко снижается. В период постепенных отказов их интенсивность, как правило, многократно выше, чем внезапных.

2.6 ***Особенности надежности восстанавливаемых изделий***

У невосстанавливаемых изделий рассматриваются первичные отказы, у восстанавливаемых — первичные и повторные. Все рассуждения и термины для невосстанавливаемых изделий распространяются на первичные отказы восстанавливаемых изделий.

Для восстанавливаемых изделий показательны графики эксплуатации рис. 1.11, *а* и работы рис. 1.11, *б* восстанавливаемых изделий. Первые показывают периоды работы, ремонта и профилактики (осмотров), вторые — периоды работы. С течением времени периоды работы между ремонтами становятся короче, а периоды ремонта и профилактики возрастают.

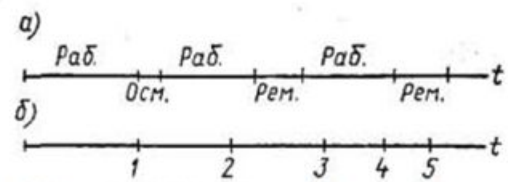

Рис. 7 - Графики эксплуатации *(а)* и работы *(б)*

У восстанавливаемых изделий свойства безотказности характеризуются величиной $\overline{m}(t)$ — средним числом отказов за время t

$$\overline{m}(t) = \frac{1}{N}\sum n_i$$

где N — число испытуемых изделий; n_i — число отказов изделия за время t.

В статистической трактовке параметр потока отказов $\Lambda(t)$ характеризует среднее число отказов, ожидаемых в малом интервале времени:

$$\Lambda = \frac{\Delta\overline{m}(t)}{\Delta t}$$

где $\Delta\overline{m}(t)$ — приращение среднего числа отказов за время Δt, *т.е.* среднее число отказов от момента t до момента $t+\Delta t$.

В вероятностной трактовке параметр потока отказов

$$\Lambda = \frac{d\overline{m}(t)}{dt}$$

При внезапных отказах изделия закон распределения наработки до отказа экспоненциальный с интенсивностью λ.

Если изделие при отказе заменяют новым (восстанавливаемое изделие), то образуется поток отказов, параметр которого $\Lambda(t)$ не зависит от t, т. е. $\Lambda(t)=\Lambda=const$ и равен интенсивности λ.

Поток внезапных отказов предполагают *стационарным,* т. е. среднее число отказов в единицу времени постоянно, *ординарным,* при котором одновременно возникает не более одного отказа, и *без последействия,* что означает взаимную независимость появления отказов в разные (непересекающиеся) промежутки времени.

Для стационарного, ординарного потока отказов $\Lambda(t)=\Lambda=\frac{1}{\overline{T}}$, где $\overline{T}$ — средняя наработка между отказами.

Самостоятельное рассмотрение постепенных отказов восстанавливаемых изделий представляет интерес, потому что время восстановления после постепенных отказов обычно существенно больше, чем после внезапных.

При совместном действии внезапных и постепенных отказов параметры потоков отказов складываются.

Поток постепенных (износовых) отказов становится стационарным при наработке t, значительно большей среднего значения $\bar{T}$. Так, при нормальном распределении наработки до отказа интенсивность отказов возрастает монотонно, а параметр потока отказов $\Lambda(t)$ сначала возрастает, потом начинаются колебания, которые затухают на уровне $\frac{1}{\bar{T}}$ (рис. 8). Наблюдаемые максимумы $\Lambda(t)$ соответствуют средней наработке до отказа первого, второго, третьего и т. д. поколений.

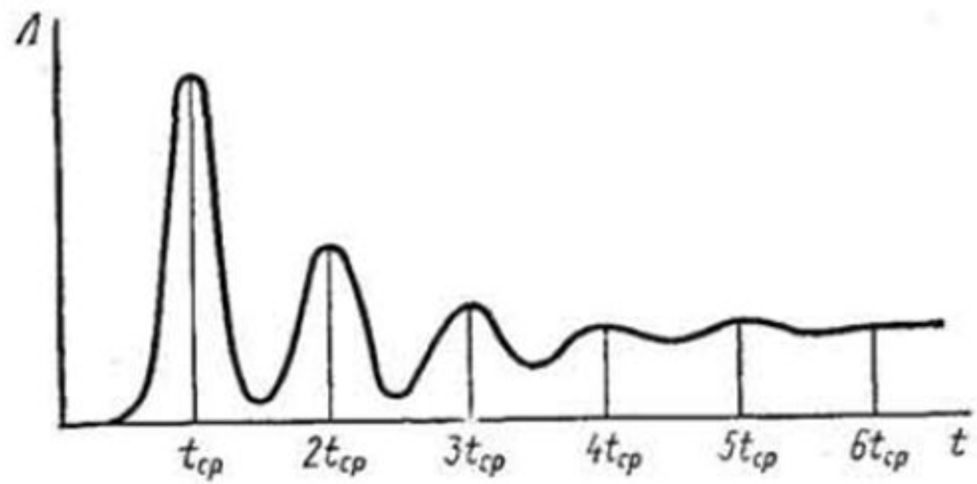

Рис. 8 - График частоты отказа объектов с последовательной заменой после отказа

В сложных изделиях (системах) параметр потока отказов рассматривается как сумма параметров потоков отказов. Составляющие потоки можно рассматривать по узлам или по типам устройств, например механическим, гидравлическим, электрическим, электронным и другим

$$\Lambda(t) = \Lambda_1(t) + \Lambda_2(t) + \ldots$$

Соответственно средняя наработка между отказами изделия (в период нормальной эксплуатации)

$$\bar{T} = \frac{1}{\Lambda} \text{ или } \frac{1}{\bar{\bar{T}}} = \frac{1}{\bar{\bar{T}}_1} + \frac{1}{\bar{\bar{T}}_2} + \ldots$$

Вероятность безотказной работы от момента T до $T+\ t$ подчиняется экспоненциальному распределению

$$P(t) = e^{-\Lambda/t}$$

Для системы из последовательно соединенных элементов

$$P_{CT} = e^{-t\sum \Lambda_i}$$

Одним из основных комплексных показателей надежности восстанавливаемого изделия является *коэффициент технического использования*

$$\eta = \frac{\bar{T}_H}{\bar{T}_H + \bar{T}_n + \bar{T}_{рет}}$$

где $\bar{T}_P, \bar{T}_n, \bar{T}_{рет}$— средние значения наработки, простоя и ремонта.