Однородные координаты

1. Вводные замечания

В аналитической геометрии
под «координатами»
геометрического объекта
понимается
любая совокупность чисел,
позволяющая
однозначно определить этот объект.

Примеры

1) Точка определяется своими *прямоугольными* координатами x, y или своими *полярными* координатами r, φ.

Примеры

1) Точка определяется своими *прямоугольными* координатами x, y или своими *полярными* координатами r, ϕ.
2) Треугольник определяется координатами трех вершин (шесть координат).

Примеры

1) Точка определяется своими <u>*прямоугольными*</u> координатами x, y или своими <u>*полярными*</u> координатами r, ϕ.
2) Треугольник определяется координатами трех вершин (шесть координат).
3) Прямая линия в плоскости x, y – это геометрическое место всех точек P(x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.

Примеры

1) Точка определяется своими <u>*прямоугольными*</u> координатами x, y или своими <u>*полярными*</u> координатами r, ф.
2) Треугольник определяется координатами трех вершин (шесть координат).
3) Прямая линия в плоскости x, y – это геометрическое место всех точек P(x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.
   Поэтому три числа a, b, c можно назвать «координатами» этой прямой.

Примеры

1) Точка определяется своими <u>*прямоугольными*</u> координатами x, y или своими <u>*полярными*</u> координатами r, ф.
2) Треугольник определяется координатами трех вершин (шесть координат).
3) Прямая линия в плоскости x, y – это геометрическое место всех точек P(x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.
   Поэтому три числа a, b, c можно назвать «координатами» этой прямой.
4) Конические сечения: окружность, эллипс...

То есть, отталкиваемся от множества чисел x,
всевозможных пар чисел (x, y),
троек чисел (x, y, z) и т.д.

То есть, отталкиваемся от множества чисел x,
всевозможных пар чисел (x, y),
троек чисел (x, y, z) и т.д.

Каждый такой элемент (число, пару, тройку...)
называем точкой и можем,
при необходимости,
наглядно интерпретировать.

То есть, отталкиваемся от множества чисел x,
всевозможных пар чисел (x, y),
троек чисел (x, y, z) и т.д.

Каждый такой элемент (число, пару, тройку...) называем точкой и можем, при необходимости, наглядно интерпретировать.

Приходим к тому, что в физике называют ***фазовым пространством***.

То есть, отталкиваемся от множества чисел x,
всевозможных пар чисел (x, y),
троек чисел (x, y, z) и т.д.

Каждый такой элемент (число, пару, тройку...) называем точкой и можем, при необходимости, наглядно интерпретировать.

Приходим к тому, что в физике называют ***фазовым пространством***.

То есть, мы можем уходить из чисто геометрического пространства.

2. Однородные координаты

Обыкновенная аналитическая геометрия:

прямоугольные координаты точки на плоскости – это снабжённые знаками расстояния точки от двух взаимно перпендикулярных осей.

Обыкновенная аналитическая геометрия:

прямоугольные координаты точки на плоскости – это снабжённые знаками расстояния точки от двух взаимно перпендикулярных осей.

В такой системе координат нет места для несобственных точек проективной плоскости.

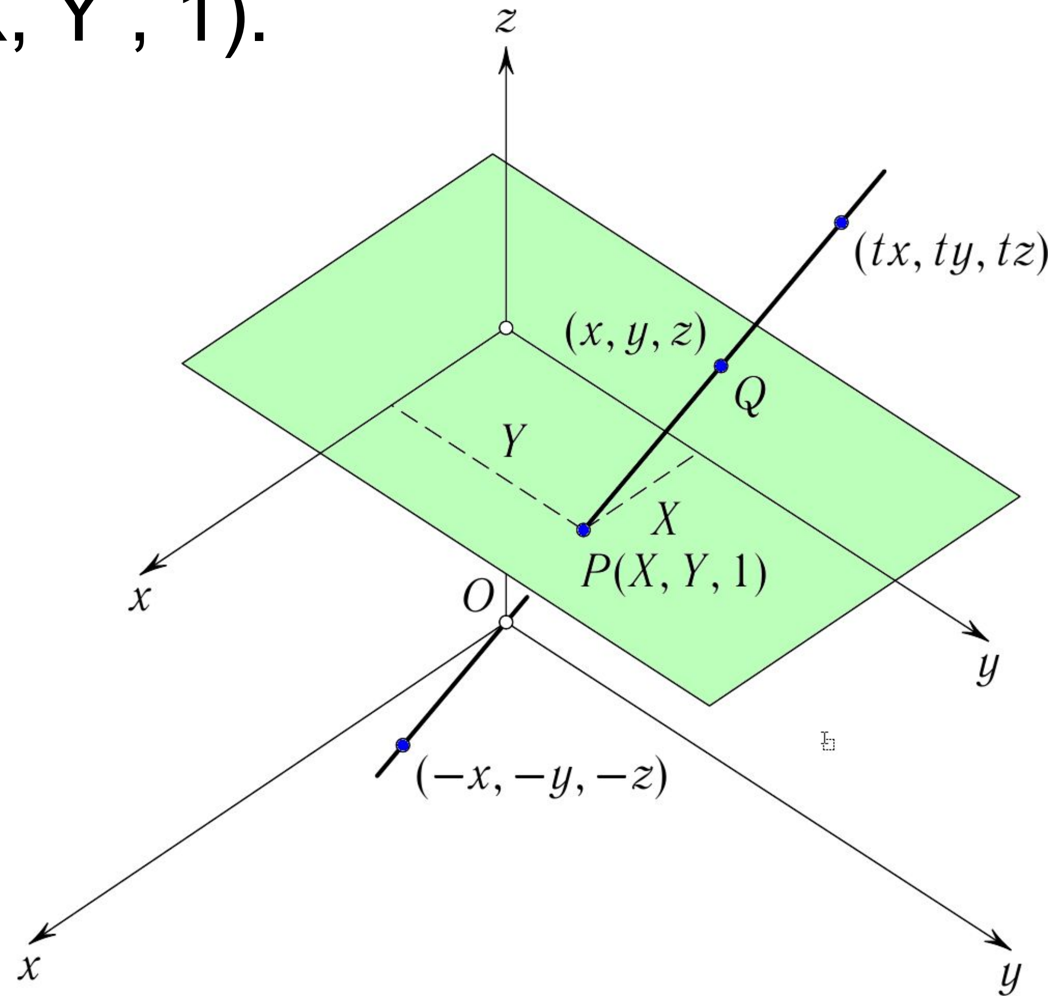
Обыкновенная аналитическая геометрия:

прямоугольные координаты точки на плоскости – это снабжённые знаками расстояния точки от двух взаимно перпендикулярных осей.

В такой системе координат нет места для несобственных точек проективной плоскости.

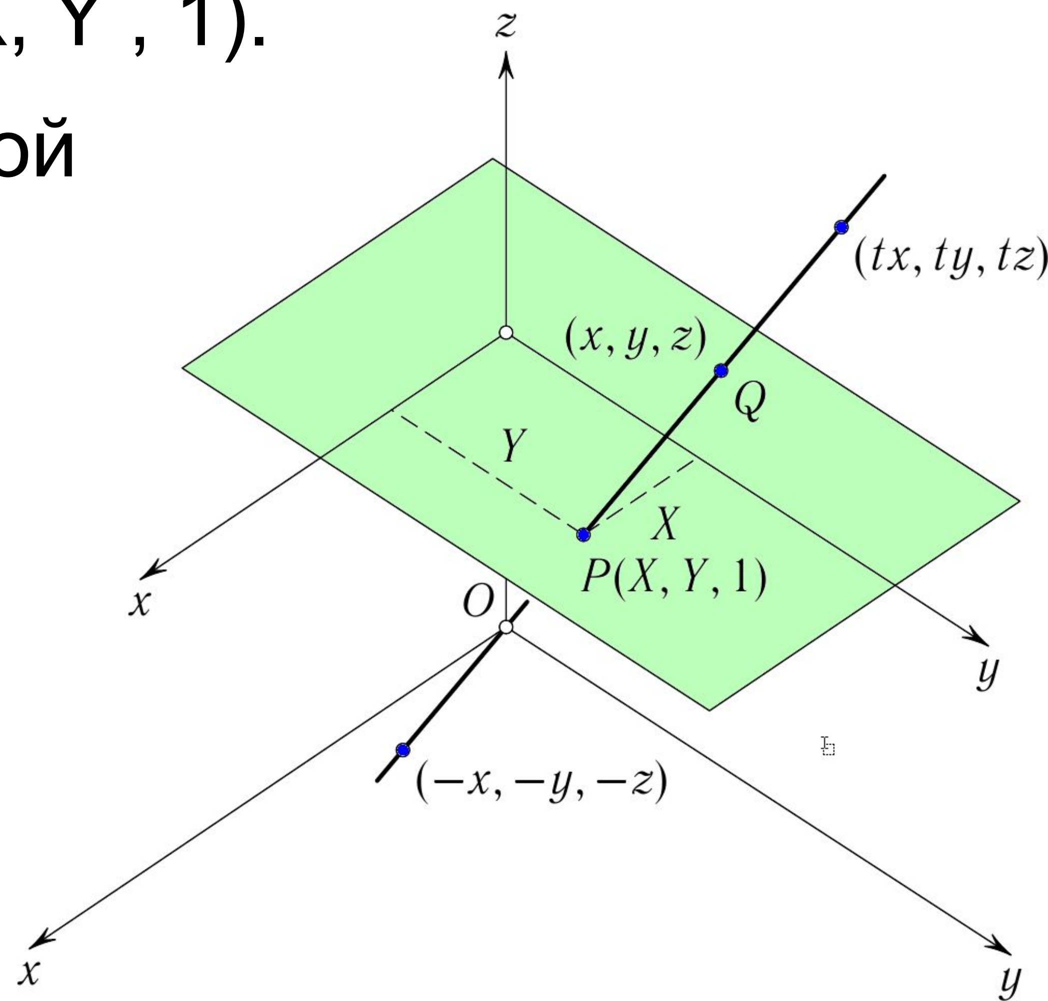
Поэтому для использования аналитических методов в проективной геометрии необходимо найти координатную систему, которая включает несобственные точки наравне с обыкновенными.

Пусть плоскость π <u>*параллельна*</u> координатной плоскости x, y и находится на расстоянии 1 от неё.
Тогда трёхмерные координаты точки P в плоскости π будут (X, Y , 1).



Пусть плоскость π <u>*параллельна*</u> координатной плоскости x, y и находится на расстоянии 1 от неё.
Тогда трёхмерные координаты точки P в плоскости π будут (X, Y , 1).

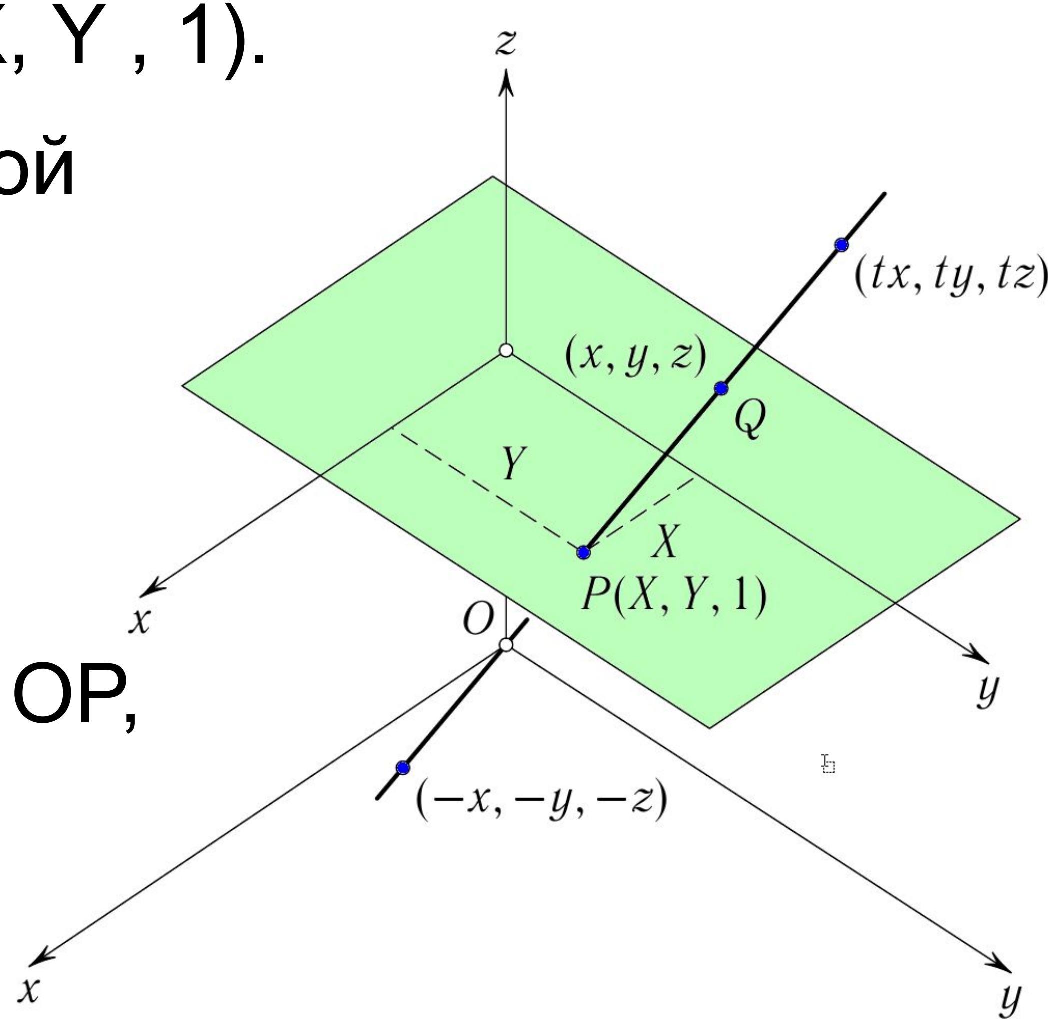
Начало O координатной системы есть центр проектирования.



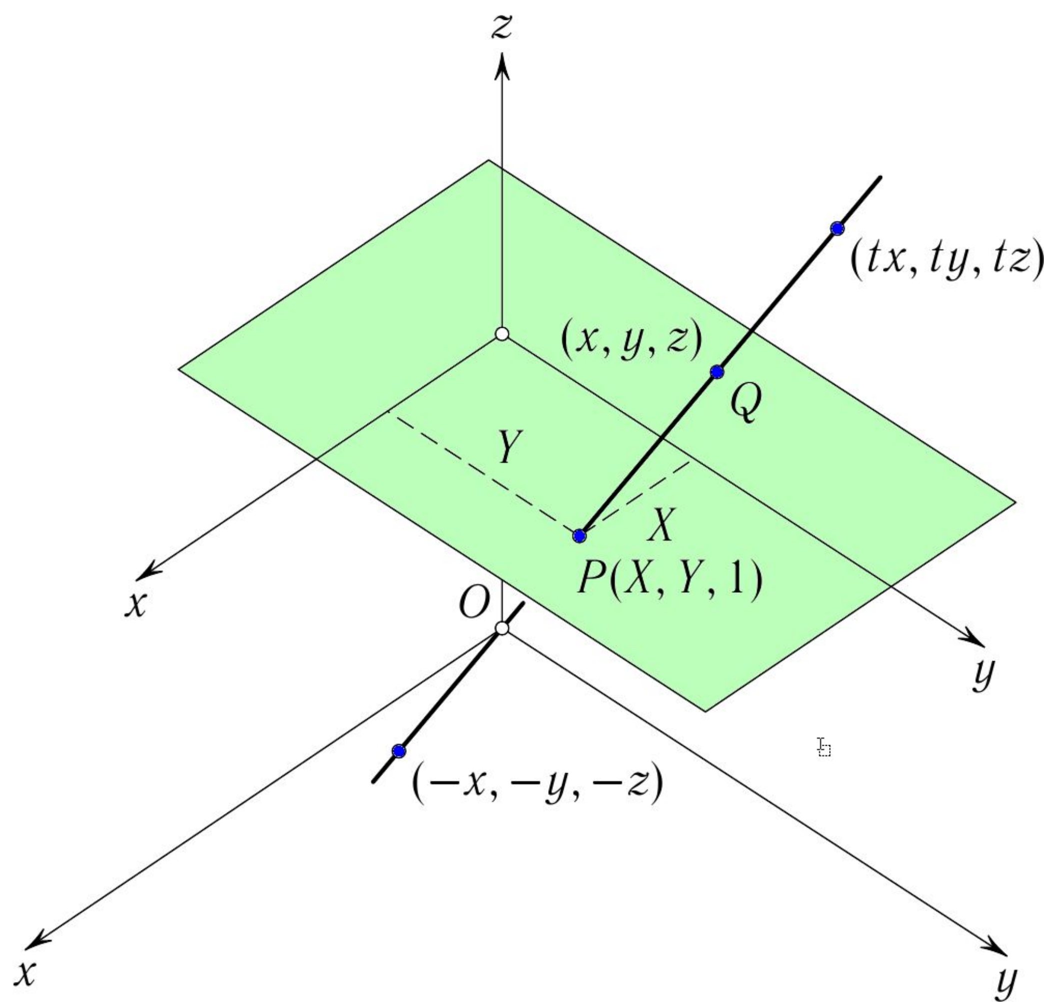
Пусть плоскость π <u>*параллельна*</u> координатной плоскости x, y и находится на расстоянии 1 от неё.
Тогда трёхмерные координаты точки P в плоскости π будут (X, Y , 1).

Начало O координатной системы есть центр проектирования.

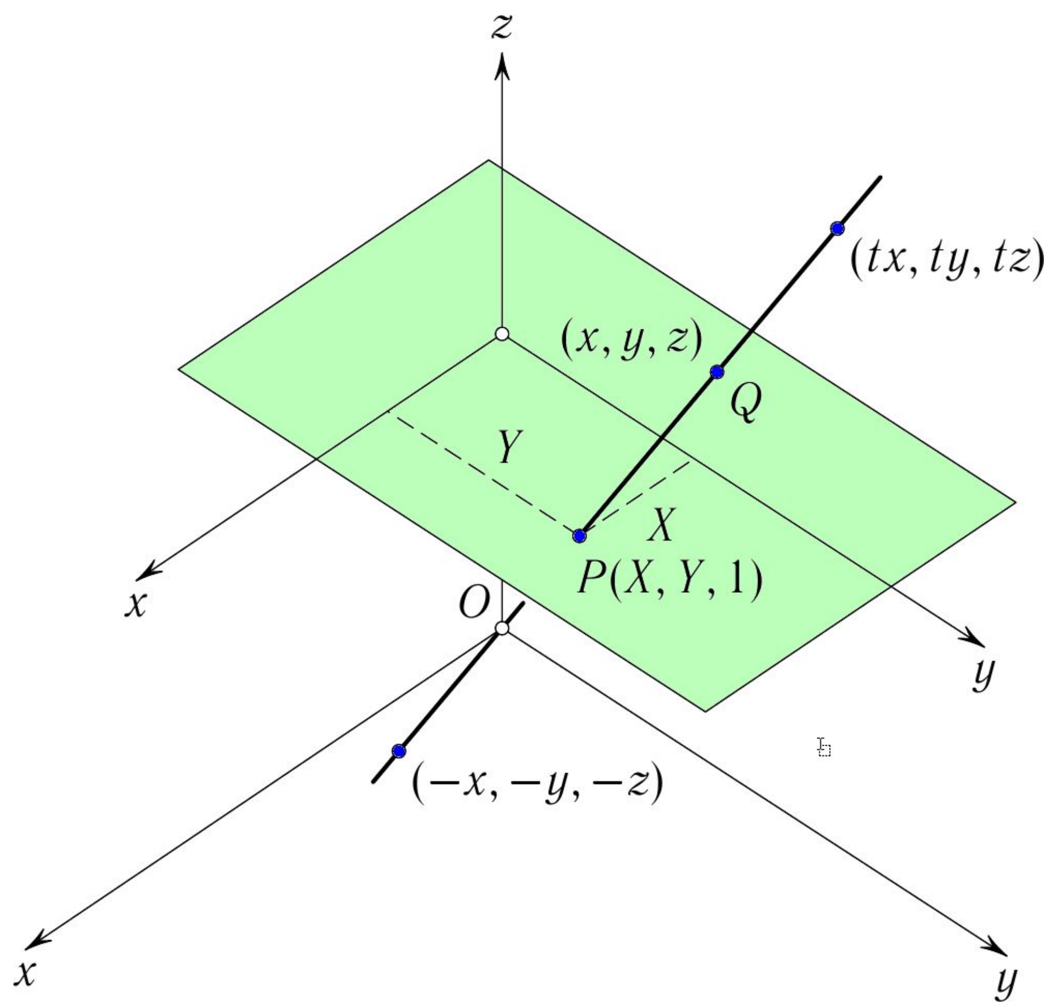
Тогда всякой точке P взаимно однозначно соответствует прямая OP, проходящая через начало координат.



Несобственным точкам плоскости π соответствуют прямые, проходящие через O параллельно π.

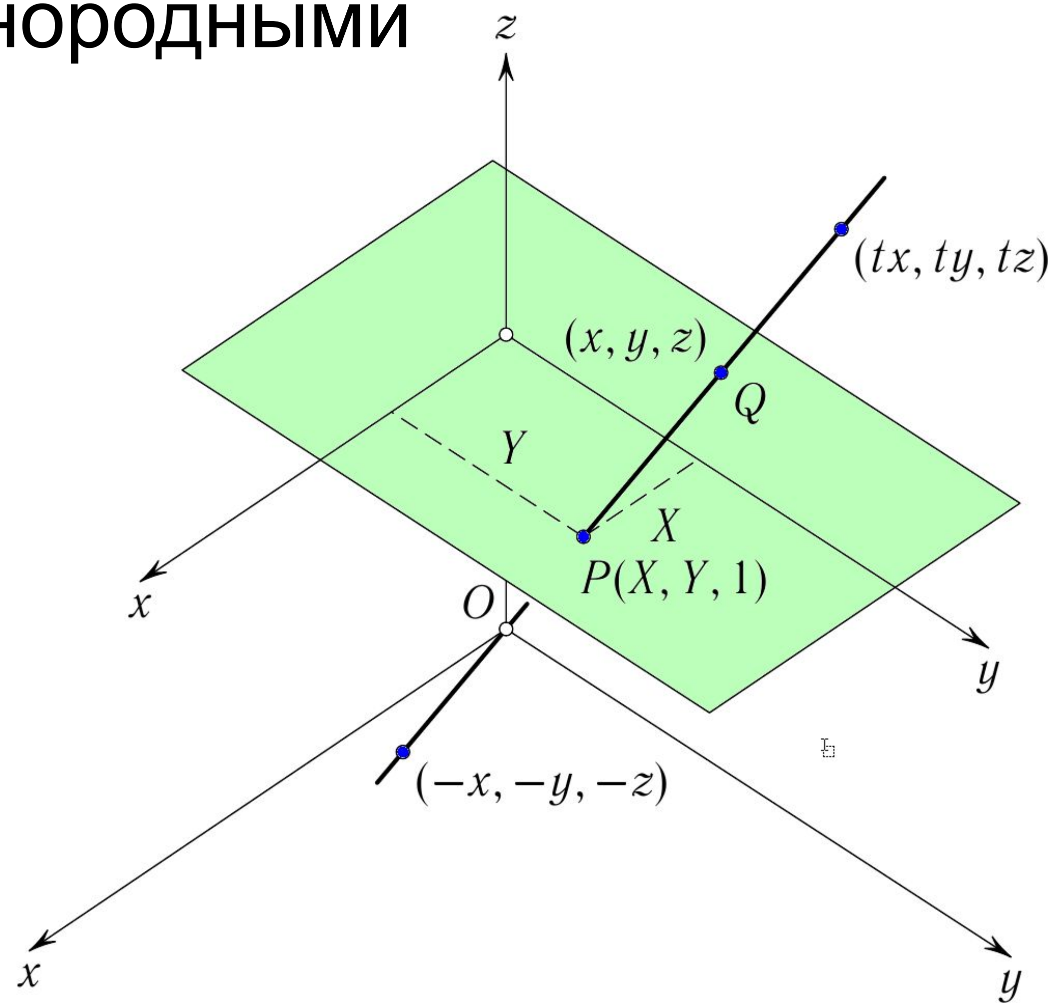


На прямой OP выберем произвольную точку Q, отличную от O.



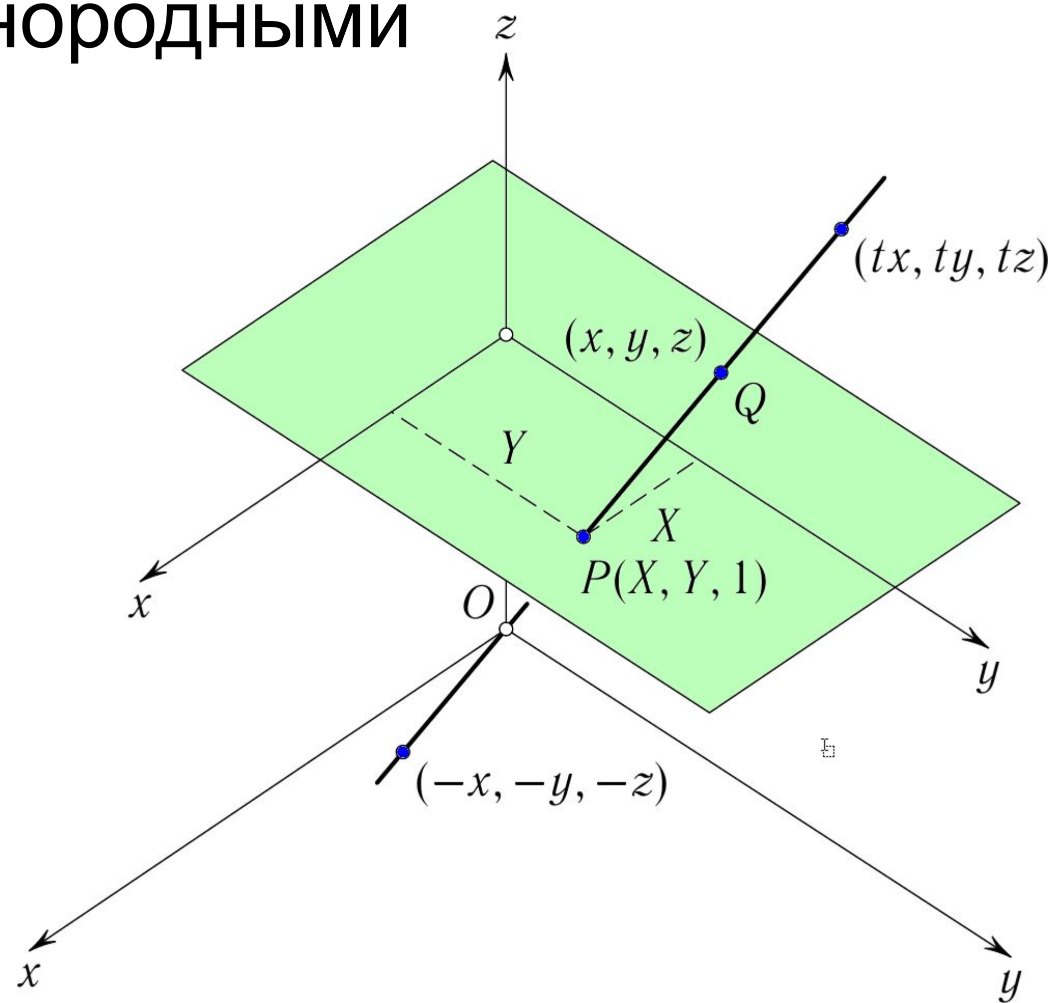
На прямой OP выберем произвольную точку Q, отличную от O.

Обыкновенные трехмерные координаты x, y, z точки Q считаются однородными координатами точки P в плоскости π.

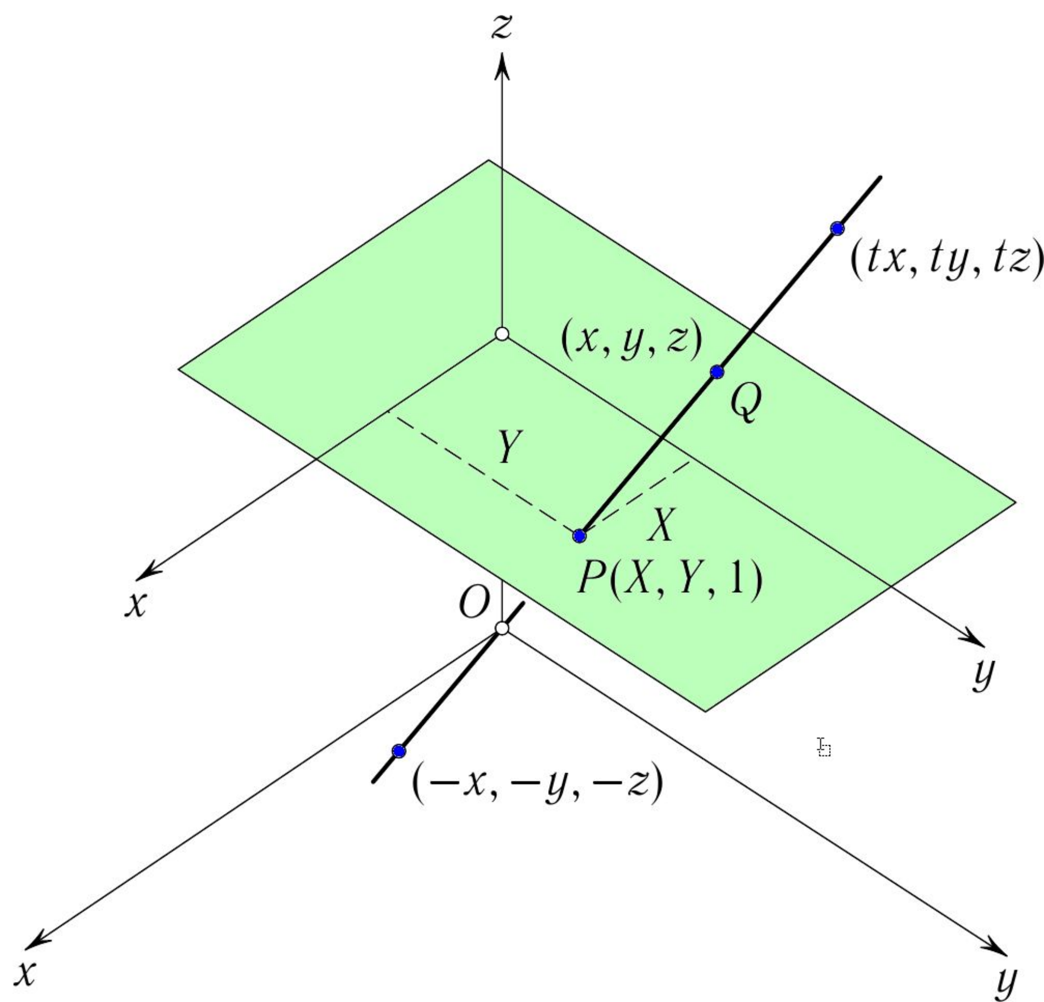


На прямой OP выберем произвольную точку Q, отличную от O.

Обыкновенные трехмерные координаты x, y, z точки Q считаются однородными координатами точки P в плоскости π. Координаты (X, Y , 1) самой точки P также являются её однородными координатами.

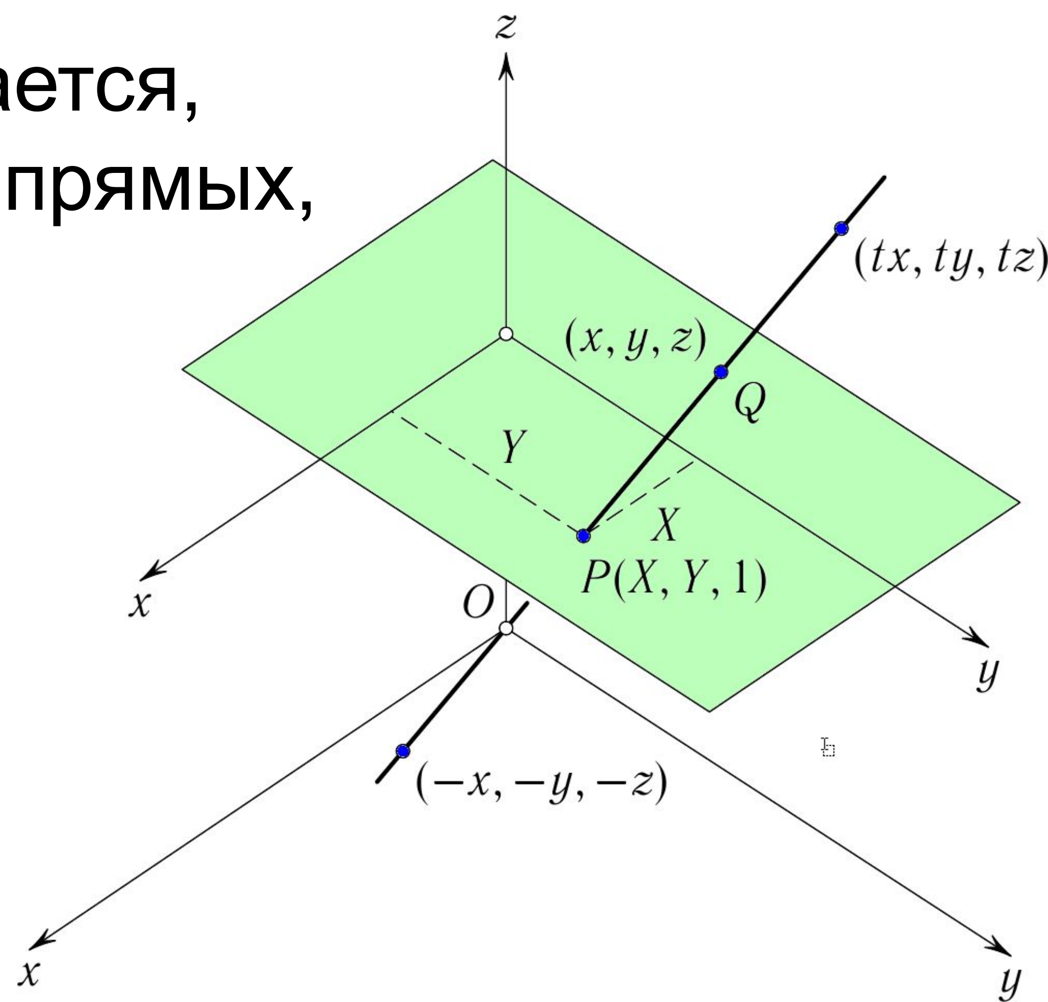


Итак, однородными координатами служат любые числа (tX, tY , t), где $t \neq 0$,
так как координаты всех точек прямой OP (кроме O) имеют такой вид.



Итак, однородными координатами служат любые числа (tX, tY , t), где t ≠ 0, так как координаты всех точек прямой OP (кроме O) имеют такой вид.

Точка (0, 0, 0) исключается, т.к. она лежит на всех прямых, проходящих через O, и не может служить для их различения.



В системе однородных координат нужны три числа вместо двух для определения точки.

В системе однородных координат нужны три числа вместо двух для определения точки.

Координаты точки определяются не однозначно, а с точностью до постоянного множителя.

В системе однородных координат нужны три числа вместо двух для определения точки.

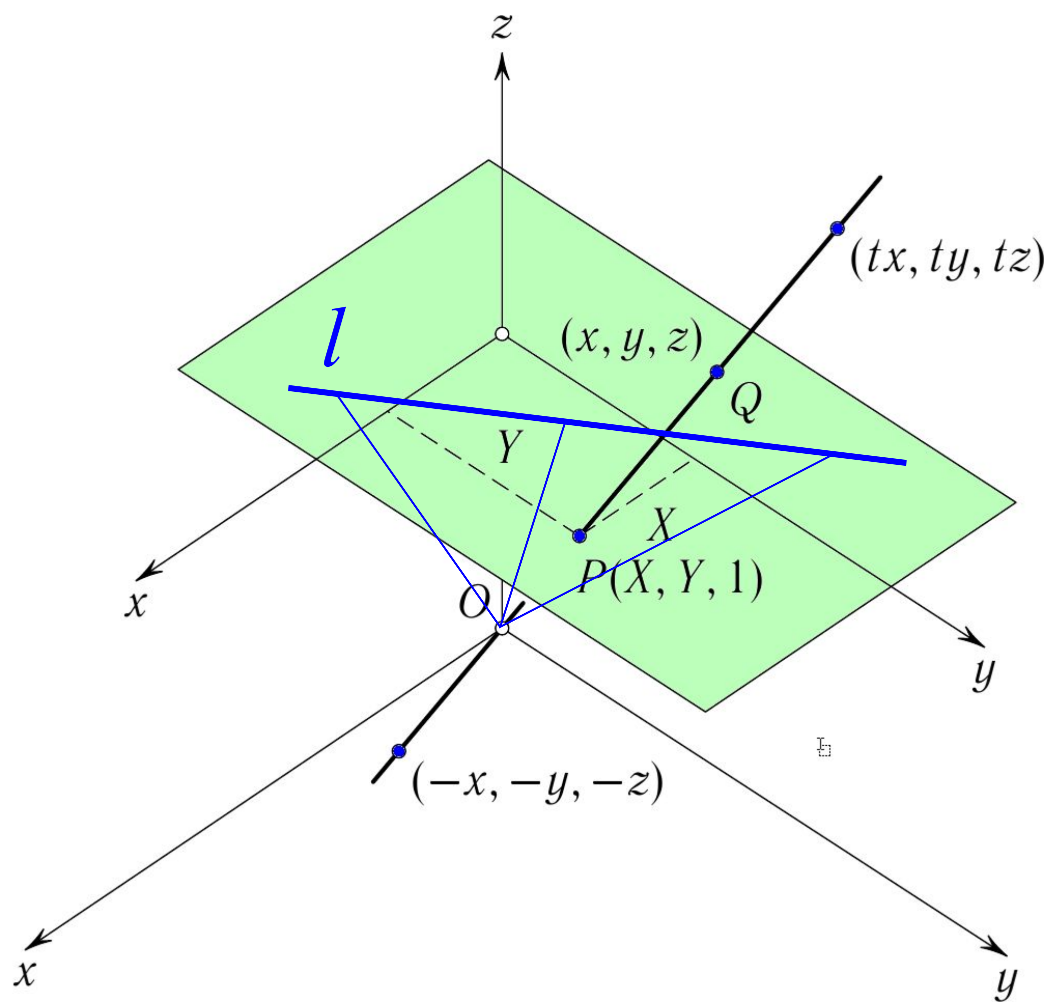
Координаты точки определяются не однозначно, а с точностью до постоянного множителя.

Но эта система охватывает обыкновенные и несобственные точки плоскости π.

Несобственной точке P
соответствует прямая,
проходящая через O параллельно π.
Любая точка Q на этой прямой
имеет координаты вида (x, y, 0).

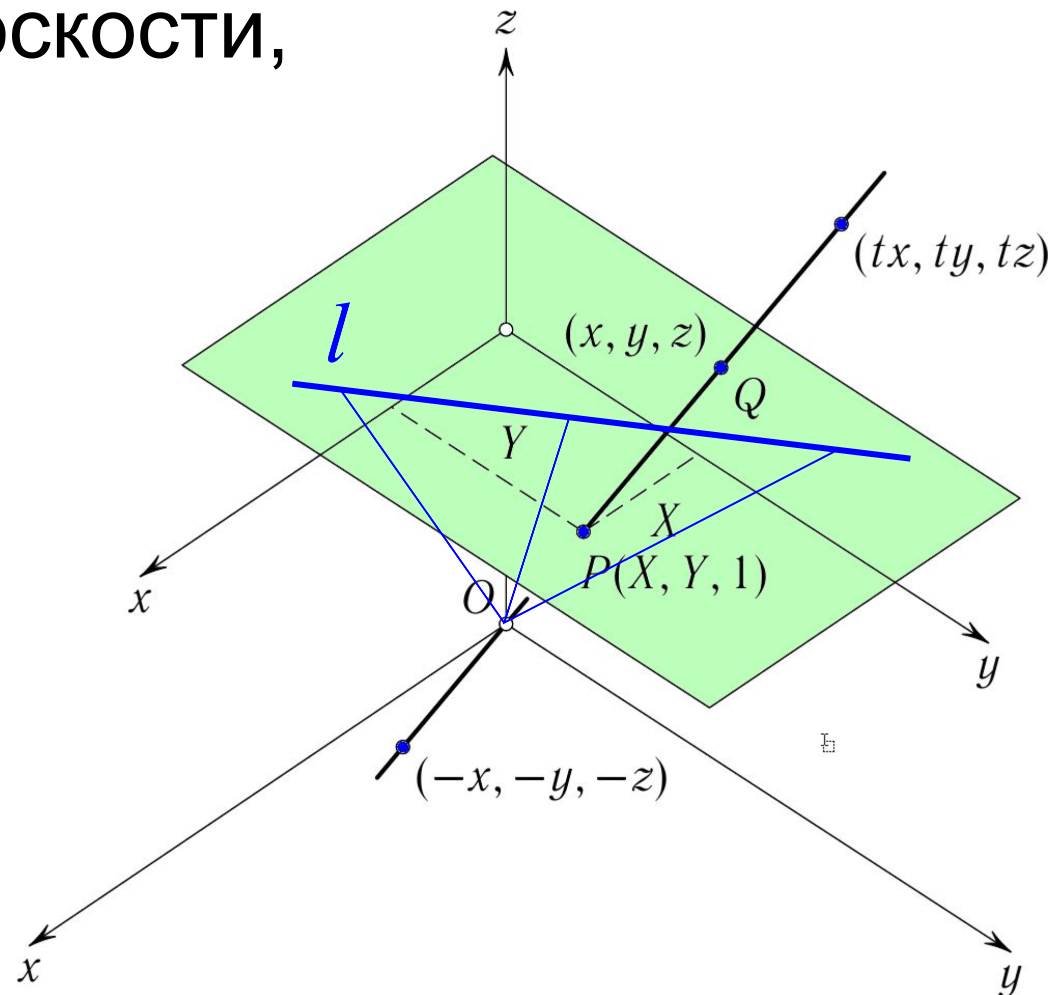
Это значит, что однородные координаты
несобственных точек плоскости π
имеют вид (x, y, 0).

Уравнение прямой на плоскости π, выраженное в однородных координатах



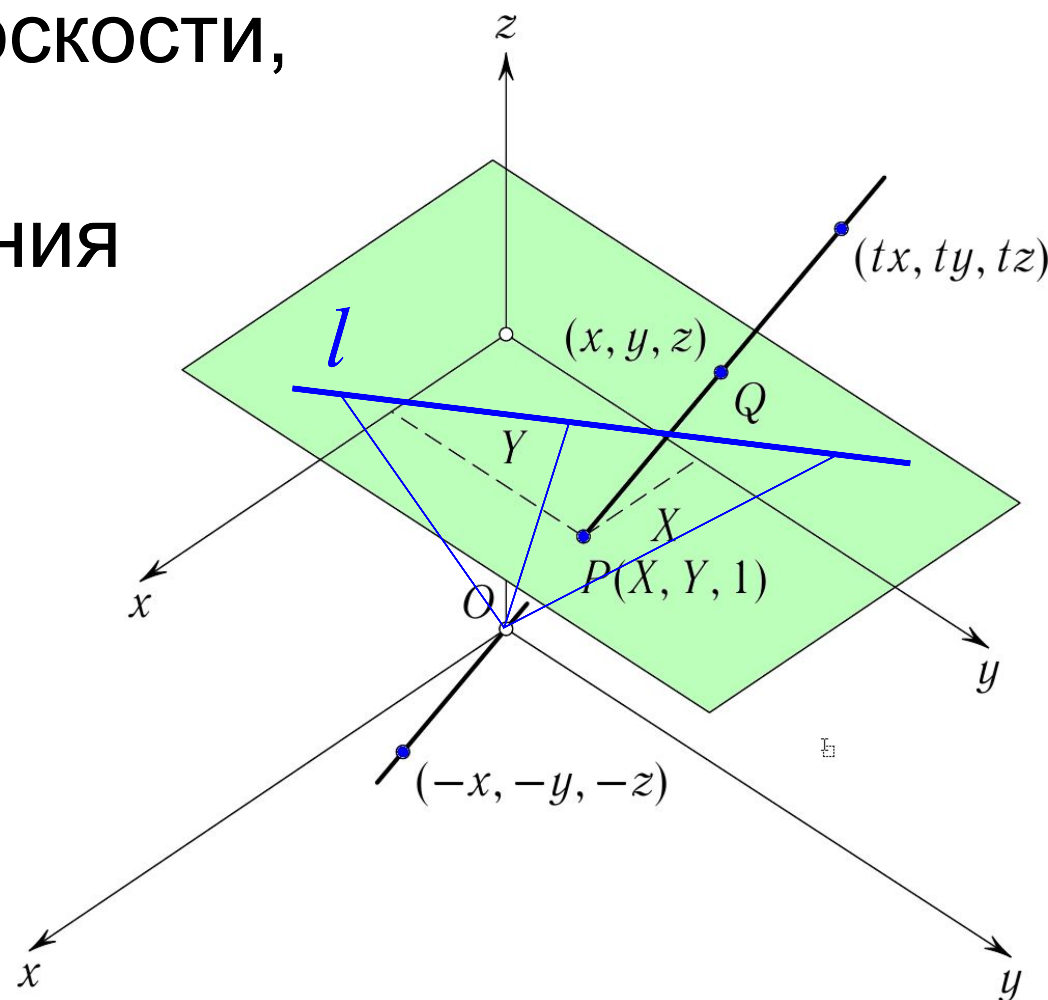
Уравнение прямой на плоскости π, выраженное в однородных координатах

Видно, что прямые, соединяющие О с точками прямой l, лежат в плоскости, проходящей через О.



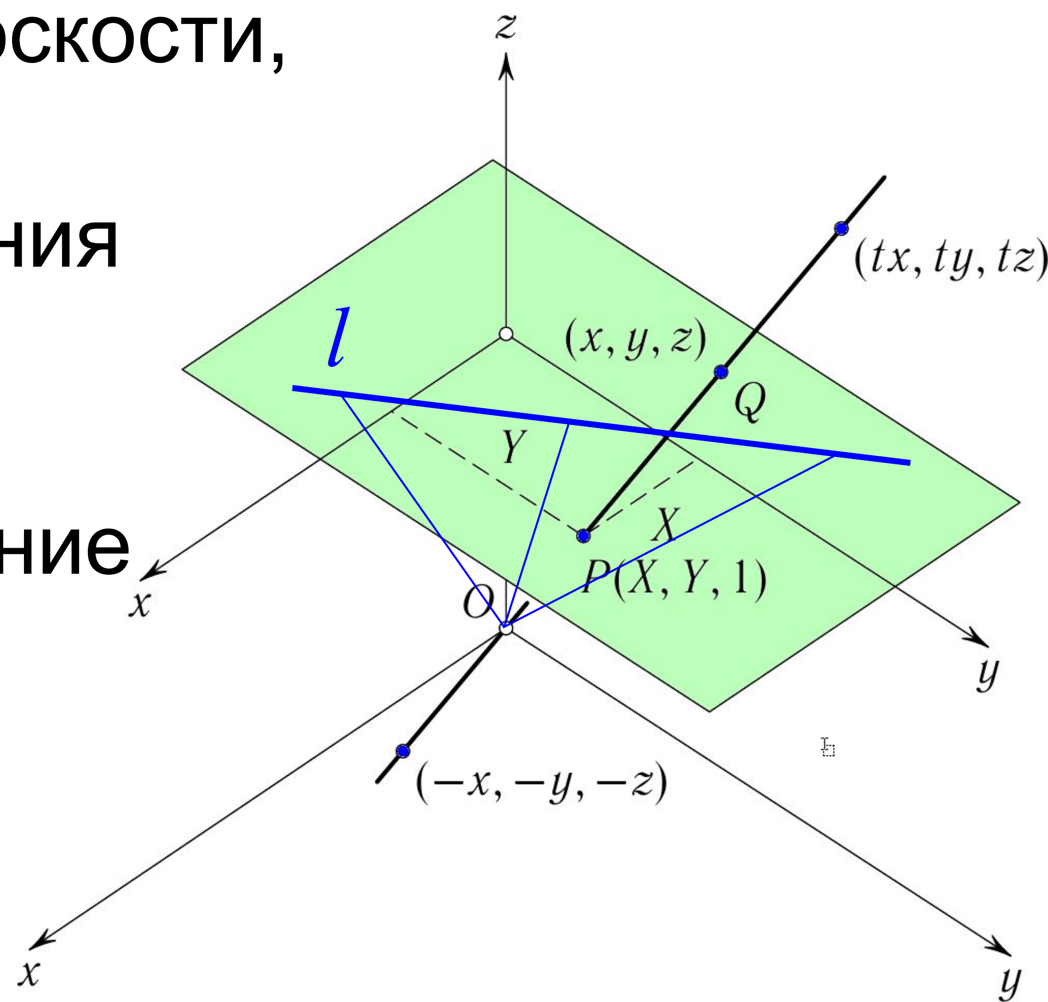
Уравнение прямой на плоскости π, выраженное в однородных координатах

Видно, что прямые, соединяющие O с точками прямой l, лежат в плоскости, проходящей через O.
Известен вид уравнения такой плоскости:
$ax + by + cz = 0$.



Уравнение прямой на плоскости π, выраженное в однородных координатах

Видно, что прямые, соединяющие O с точками прямой l, лежат в плоскости, проходящей через O.
Известен вид уравнения такой плоскости:
$ax + by + cz = 0.$
Это же есть и уравнение прямой l
в однородных координатах.



Рассмотрим ***чисто аналитическое*** определение проективной плоскости.

Рассмотрим ***чисто аналитическое*** определение проективной плоскости.

1) **Точка** есть тройка действительных чисел (x, y, z), из которых ***не все*** равны нулю.

Рассмотрим ***чисто аналитическое*** определение проективной плоскости.

1) **Точка** есть тройка действительных чисел (x, y, z), из которых ***не все*** равны нулю.

2) Две такие тройки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяют одну и ту же точку, если существует такое $t \neq 0$, что

$$x_2 = tx_1, y_2 = ty_1, z_2 = tz_1.$$

Рассмотрим ***чисто аналитическое*** определение проективной плоскости.

1) **Точка** есть тройка действительных чисел (x, y, z), из которых ***не все*** равны нулю.

2) Две такие тройки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяют одну и ту же точку, если существует такое $t \neq 0$, что

$$x_2 = tx_1, y_2 = ty_1, z_2 = tz_1.$$

Потому эти координаты называются ***однородными***.

Рассмотрим ***чисто аналитическое*** определение проективной плоскости.

1) **<u>Точка</u>** есть тройка действительных чисел (x, y, z), из которых ***не все*** равны нулю.

2) Две такие тройки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяют одну и ту же точку, если существует такое $t \neq 0$, что

$$x_2 = tx_1, y_2 = ty_1, z_2 = tz_1.$$

Потому эти координаты называются ***однородными***.

3) Точка (x, y, z) обыкновенная, если $z \neq 0$, и несобственная, если $z = 0$.

Прямая линия в плоскости π состоит из всех точек (x, y, z), удовлетворяющих уравнению вида

$$ax + by + cz = 0,$$

где a, b, c – постоянные числа, не все равные нулю.

Прямая линия в плоскости π
состоит из всех точек (x, y, z),
удовлетворяющих уравнению вида

$$ax + by + cz = 0,$$

где a, b, c – постоянные числа,
не все равные нулю.

Несобственные точки плоскости π
удовлетворяют уравнению $z = 0$.

Прямая линия в плоскости π
состоит из всех точек (x, y, z),
удовлетворяющих уравнению вида

$$ax + by + cz = 0,$$

где a, b, c – постоянные числа,
не все равные нулю.

Несобственные точки плоскости π
удовлетворяют уравнению z = 0.

Это уравнение несобственной прямой.

При произвольном $t \neq 0$ тройка чисел (ta, tb, tc) есть координаты той же прямой, поскольку уравнение

$$(ta)x + (tb)y + (tc)z = 0$$

удовлетворяется теми же координатными тройками (x, y, z), что и уравнение

$$ax + by + cz = 0.$$

Эти определения полностью симметричны между точкой и прямой:
они обе определяются тройкой чисел – однородными координатами (u, v, w).

Эти определения полностью симметричны между точкой и прямой:
они обе определяются тройкой чисел – однородными координатами (u, v, w).

Условие того, что точка (x, y, z) лежит на прямой (a, b, c), выражается равенством

$$ax + by + cz = 0.$$

Эти определения полностью симметричны между точкой и прямой:
они обе определяются тройкой чисел – однородными координатами (u, v, w).

Условие того, что точка (x, y, z)
лежит на прямой (a, b, c),
выражается равенством

$$ax + by + cz = 0.$$

Это же есть условие того,
что точка с координатами (a, b, c)
лежит на прямой с координатами (x, y, z).

Например, тождество

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0$$

означает, что точка (3, 4, 2)
лежит на прямой (2, 1, −5),
и что точка (2, 1, −5) лежит на прямой (3, 4, 2).

Например, тождество

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0$$

означает, что точка (3, 4, 2)
лежит на прямой (2, 1, −5),
и что точка (2, 1, −5) лежит на прямой (3, 4, 2).

Эта симметрия есть основа двойственности «**точка** ↔ **прямая**» в проективной геометрии:

Например, тождество

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0$$

означает, что точка (3, 4, 2)
лежит на прямой (2, 1, −5),
и что точка (2, 1, −5) лежит на прямой (3, 4, 2).

Эта симметрия есть основа двойственности «**точка** ↔ **прямая**» в проективной геометрии: **всякое соотношение между точками и прямыми становится некоторым соотношением между прямыми и точками, если координаты точек считать координатами прямых, а координаты прямых – координатами точек.**

Замечание:

В евклидовой плоскости X, Y о двойственности не может быть речи, т.к. уравнение прямой в обыкновенных координатах

$$aX + bY + c = 0$$

несимметрично относительно X, Y и a, b, c.

Замечание:

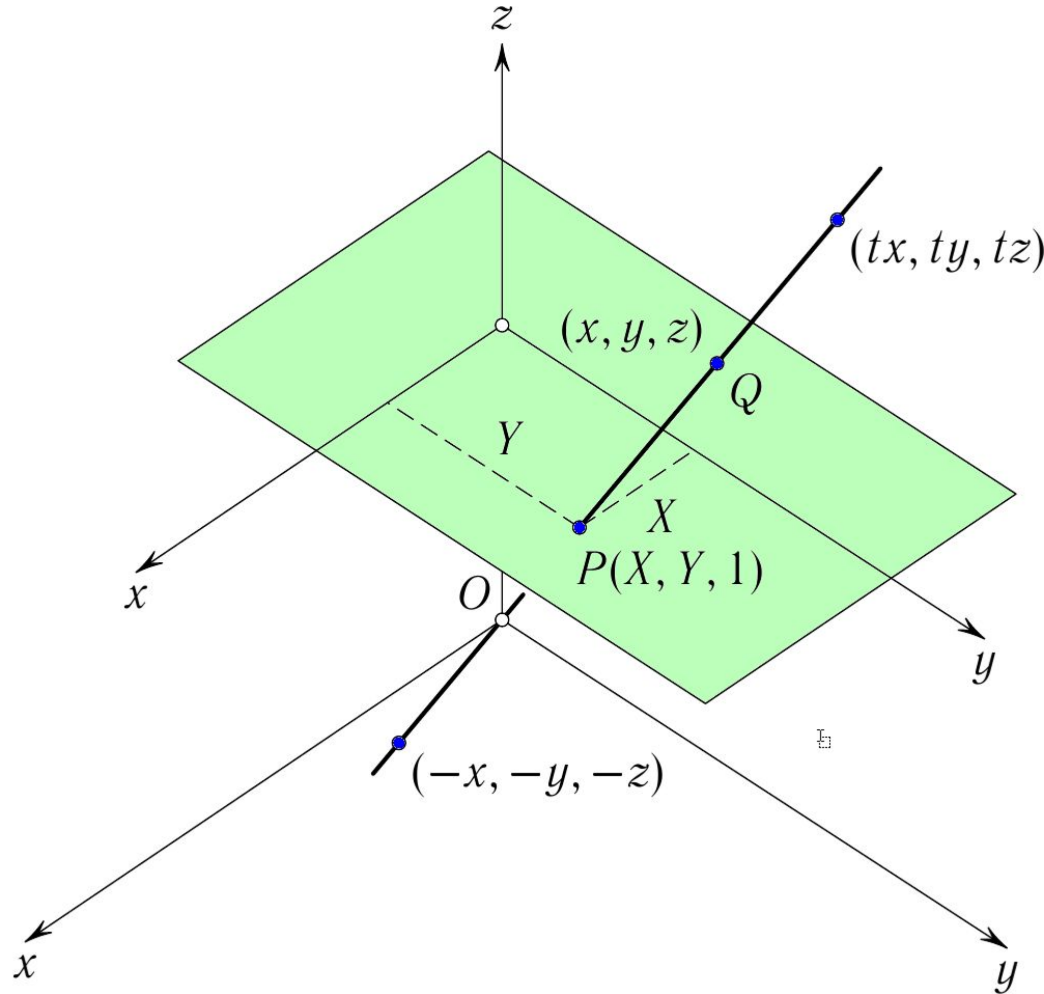
В евклидовой плоскости X, Y о двойственности не может быть речи, т.к. уравнение прямой в обыкновенных координатах

$$aX + bY + c = 0$$

несимметрично относительно X, Y и a, b, c.

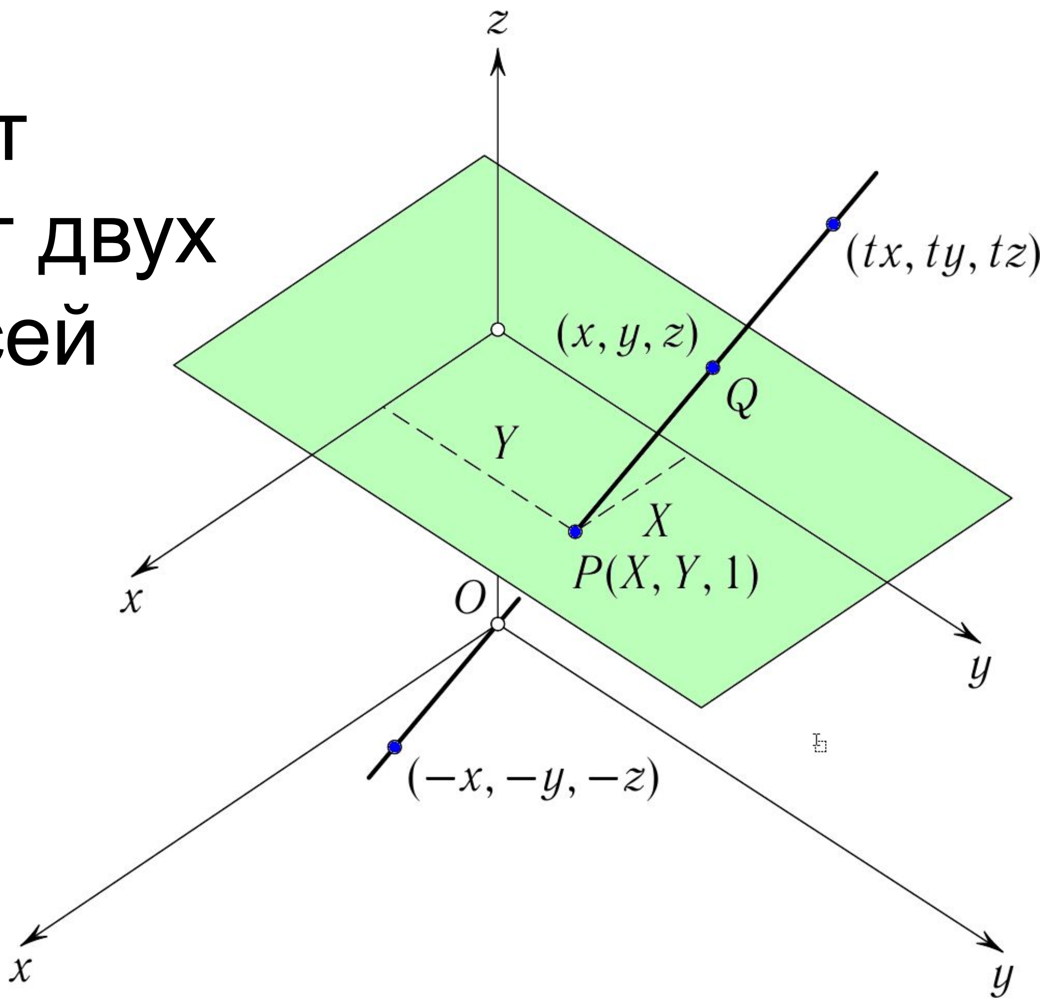
Только включение в рассмотрение бесконечно удаленных элементов (точек и прямой) обеспечивает применимость принципа двойственности.

Для перехода от однородных координат x, y, z обыкновенной точки P в плоскости π к обыкновенным прямоугольным координатам, полагаем X = x / z, Y = y / z.



Для перехода от однородных координат x, y, z обыкновенной точки P в плоскости π к обыкновенным прямоугольным координатам, полагаем X = x / z, Y = y / z.

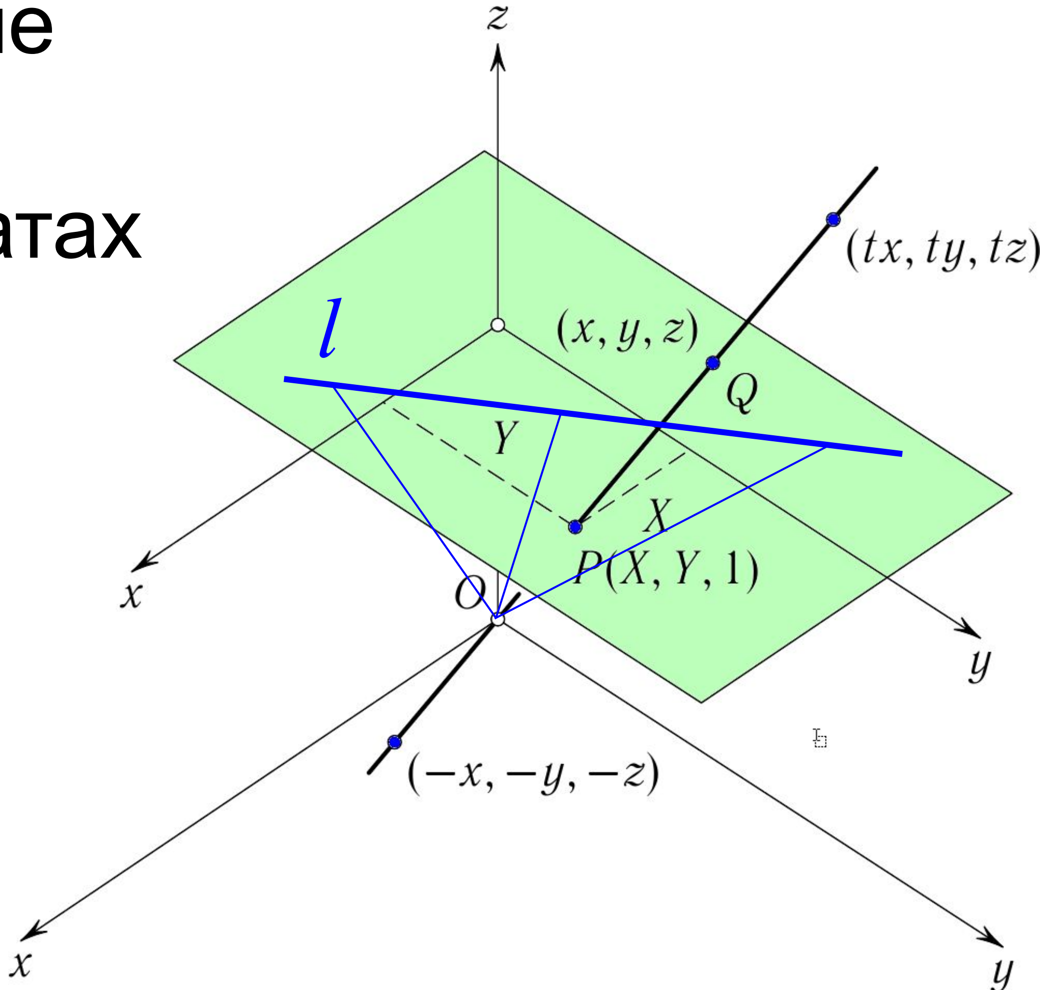
Тогда X, Y обозначают расстояния точки P от двух перпендикулярных осей в плоскости π, параллельной x- и y-осям.



Уравнение

$$aX + bY + c = 0$$

представляет прямую в плоскости π.
Полагая X = x / z, Y = y / z и умножая на z, найдем, что уравнение той же прямой в однородных координатах будет $ax + by + cz = 0$.



Например, уравнение прямой

$$2x - 3y + z = 0$$

в обыкновенных прямоугольных координатах X, Y примет вид

$$2X - 3Y + 1 = 0.$$

Например, уравнение прямой

$$2x - 3y + z = 0$$

в обыкновенных прямоугольных координатах X, Y примет вид

$$2X - 3Y + 1 = 0.$$

Замечание. Последнему уравнению несобственная точка рассматриваемой прямой с однородными координатами (3, 2, 0) уже не отвечает.

Можно показать, что проективное преобразование, задается аналитически системой линейных уравнений

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

связывающих однородные координаты x', y', z�' точек в плоскости π' с однородными координатами x, y, z точек в плоскости π.

Можно показать, что проективное преобразование, задается аналитически системой линейных уравнений

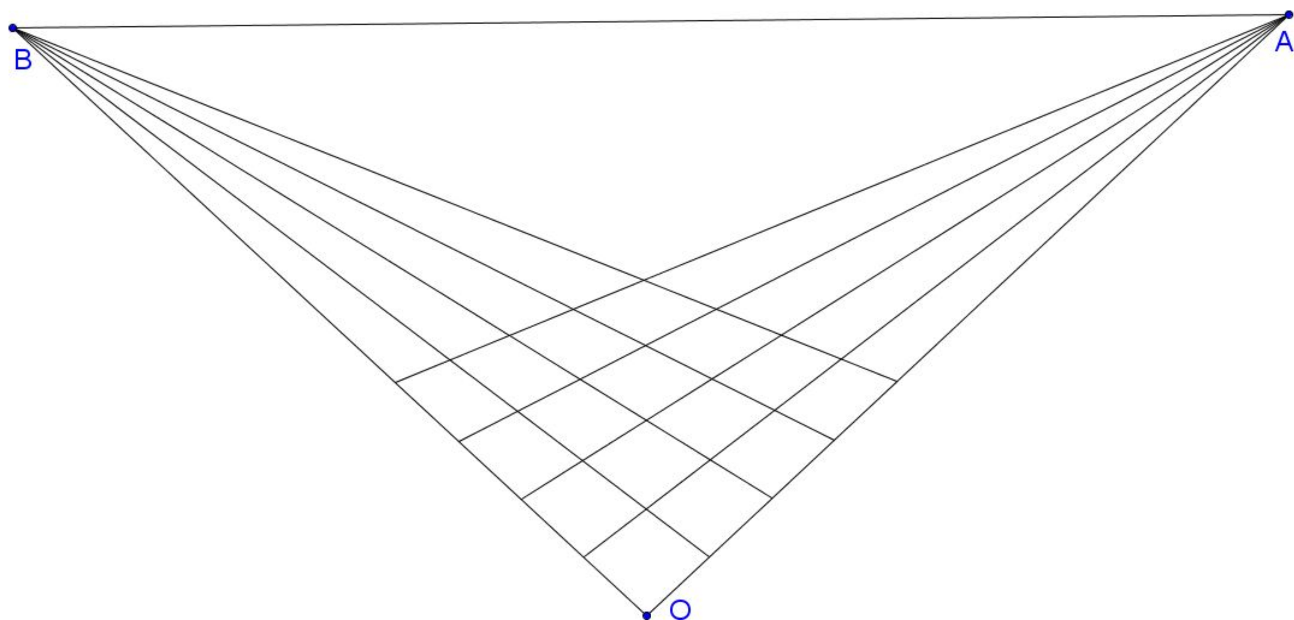
$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

связывающих однородные координаты x', y', z�' точек в плоскости π' с однородными координатами x, y, z точек в плоскости π.

Тогда теоремы проективной геометрии становятся теоремами о поведении числовых троек (x, y, z) при таких преобразованиях.

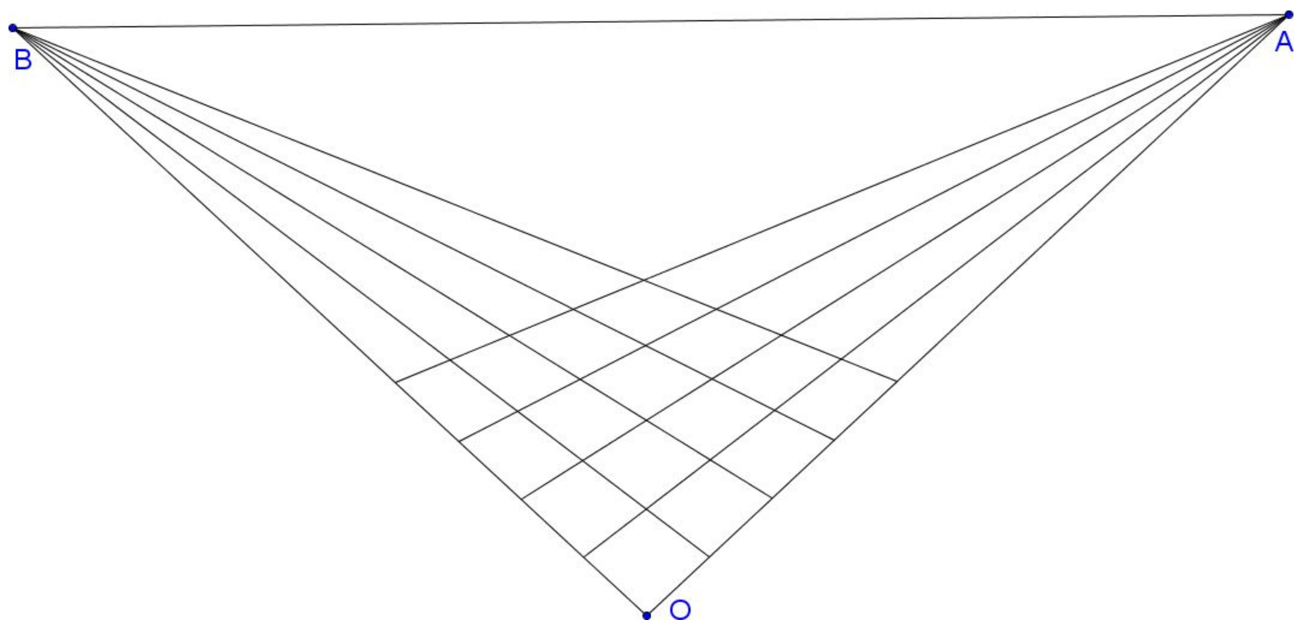
3. Треугольник цветов

На фрагменте прямоугольной координатной сетки точка О – начало координат; ОА, ОВ – оси координат, АВ – линия горизонта.



На фрагменте прямоугольной координатной сетки точка O – начало координат; OA, OB – оси координат, AB – линия горизонта.

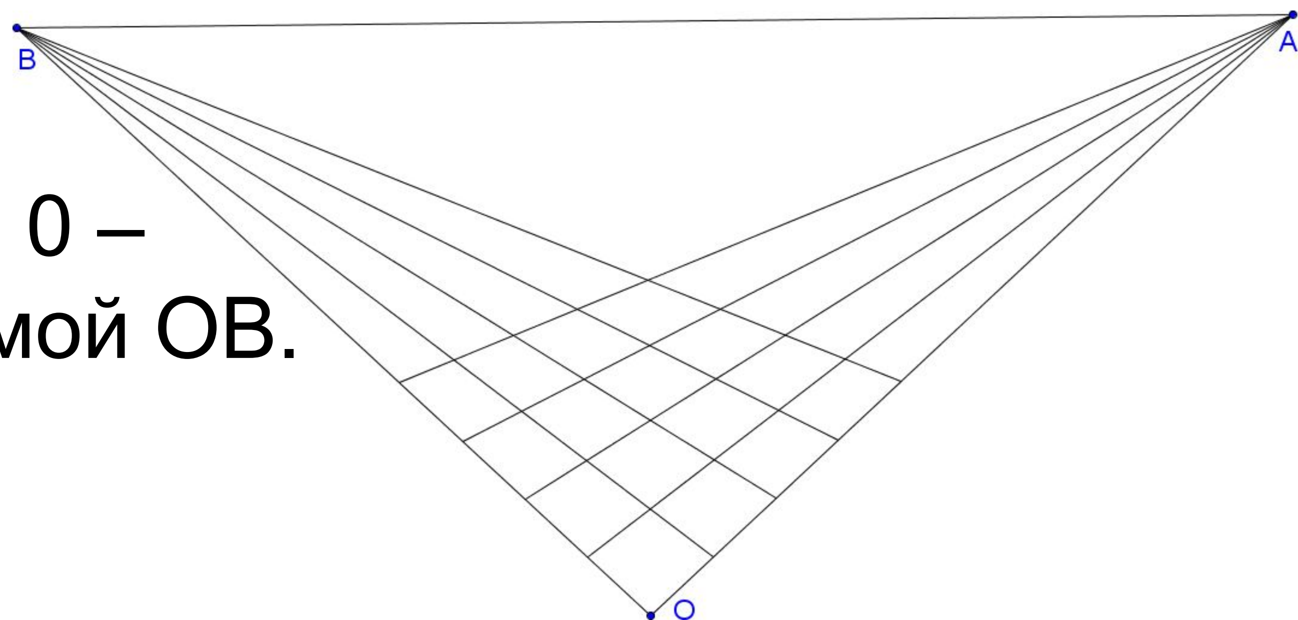
В обычной системе координат
OA была бы прямой Y = 0, OB – прямой X = 0.



На фрагменте прямоугольной координатной сетки точка O – начало координат; OA, OB – оси координат, AB – линия горизонта.

В обычной системе координат
OA была бы прямой Y = 0, OB – прямой X = 0.

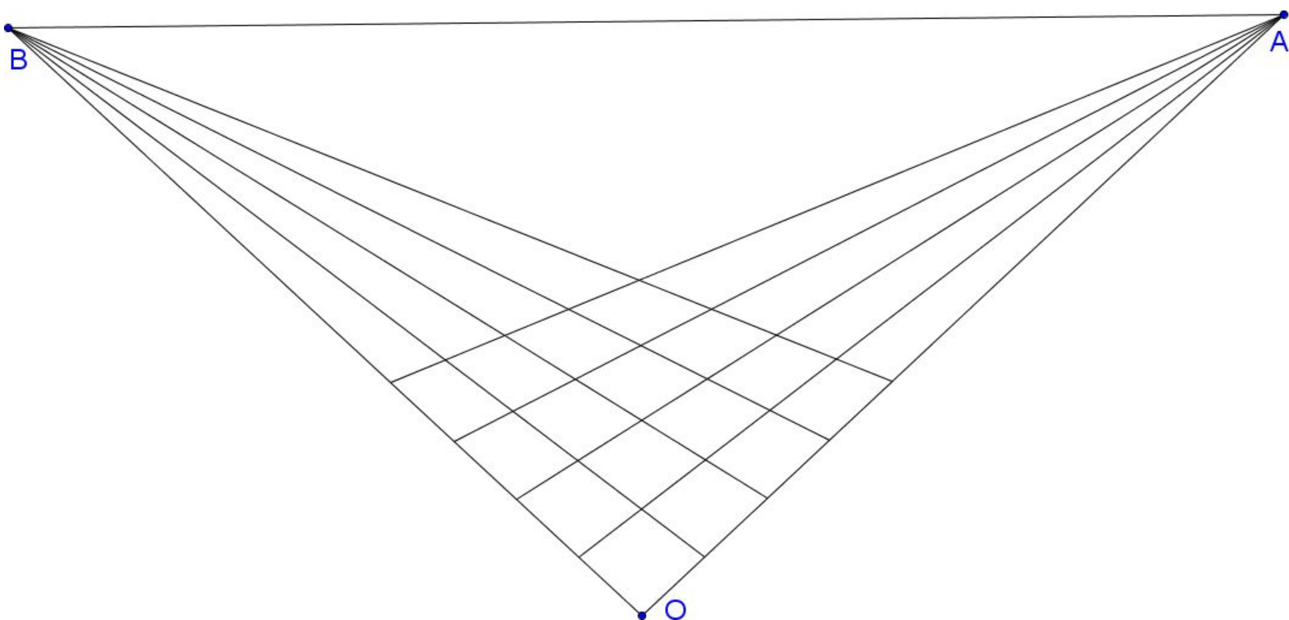
В однородных координатах x, y, z уравнения практически те же самые. Поскольку Y = y / z, то уравнением
OA будет y = 0.
Аналогично x = 0 –
уравнение прямой OB.



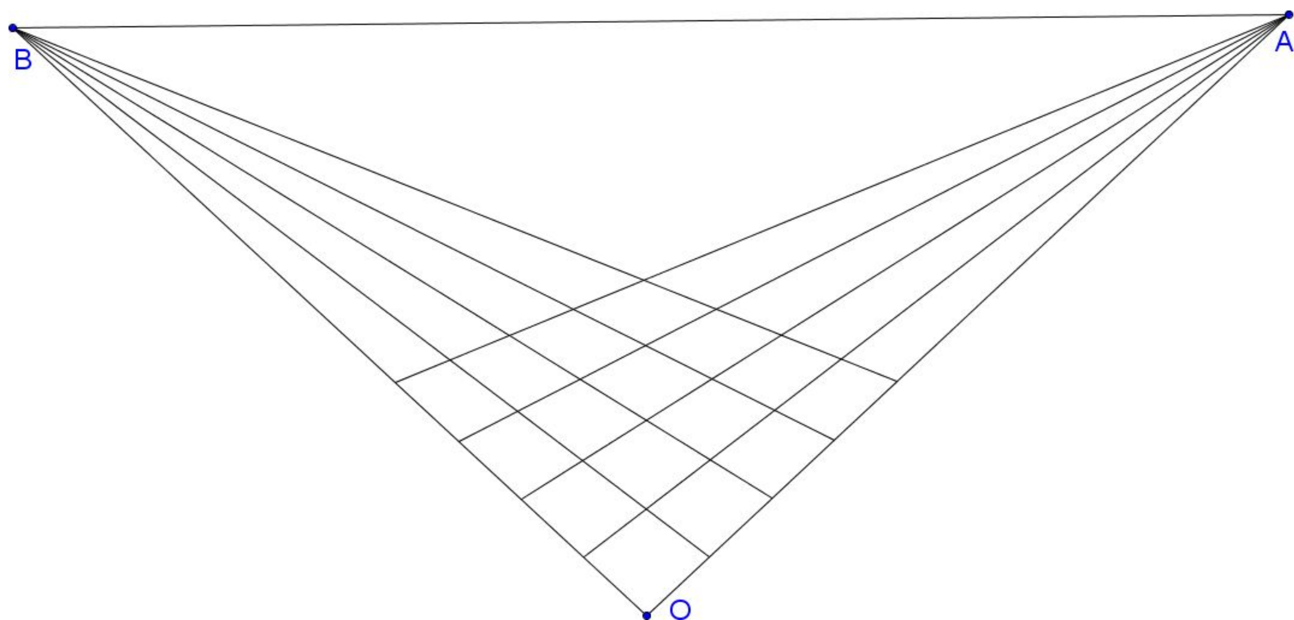
Линия горизонта AB – прямая в бесконечности. Её уравнение – $z = 0$.

Итак, имеем трехстороннюю симметрию (в отличие от обычной координатной сетки с двусторонней симметрией).

То есть, имеем три равноправные прямые:
OB ($x = 0$);
OA ($y = 0$);
AB ($z = 0$).

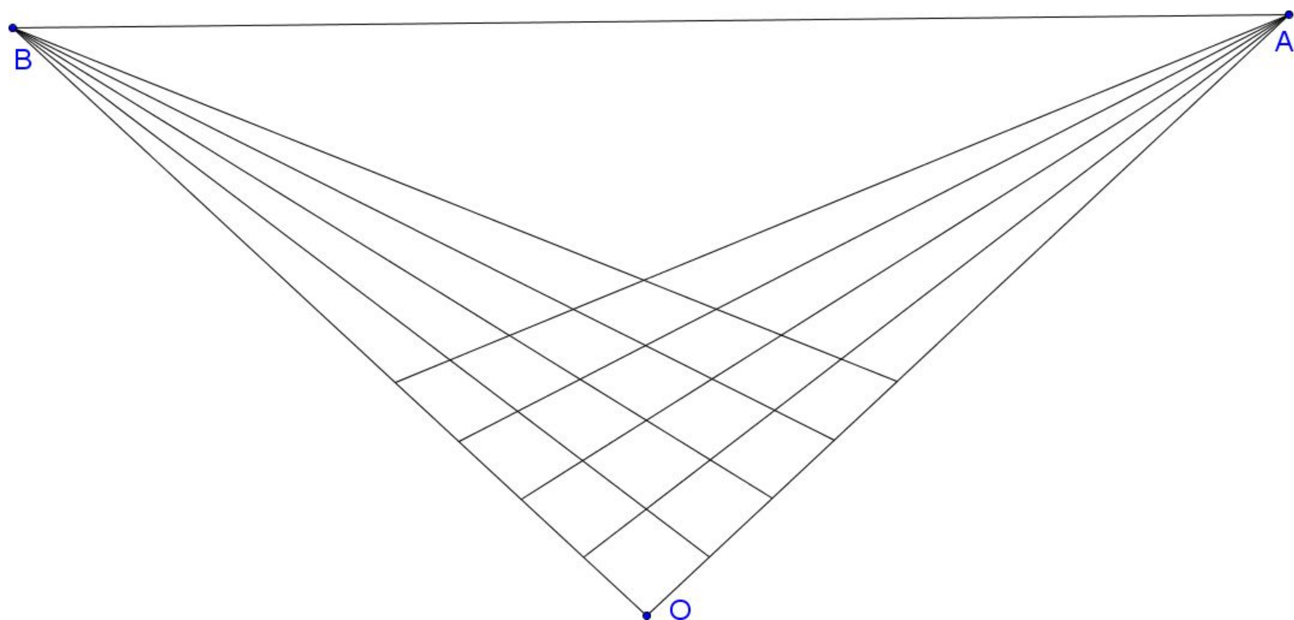


Итак, треугольник OAB – базисный:
O (0, 0, 1), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0).



Итак, треугольник OAB – базисный:
O (0, 0, 1), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0).

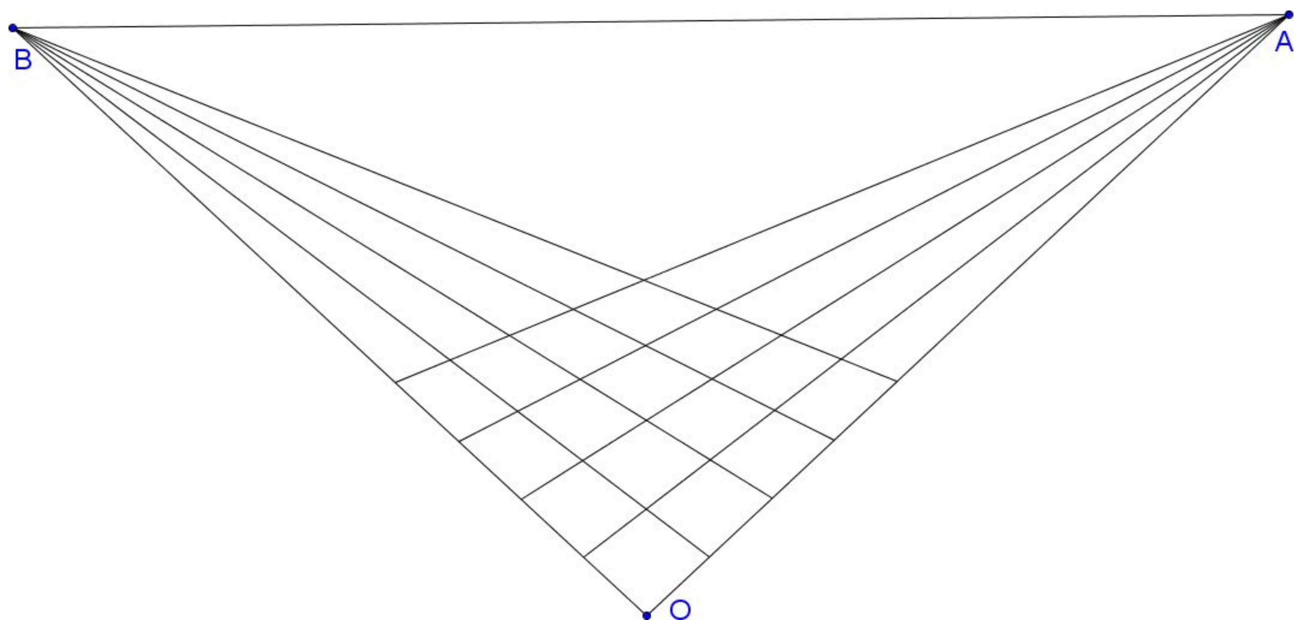
Сравним с обычными координатами, подставив эти значения в уравнения
X = x / z, и Y = y / z.



Итак, треугольник OAB – базисный:
O (0, 0, 1), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0).

Сравним с обычными координатами, подставив эти значения в уравнения
$X = x / z$, и $Y = y / z$.

Для точки O затруднений нет, т.к. $X = 0$, $Y = 0$.

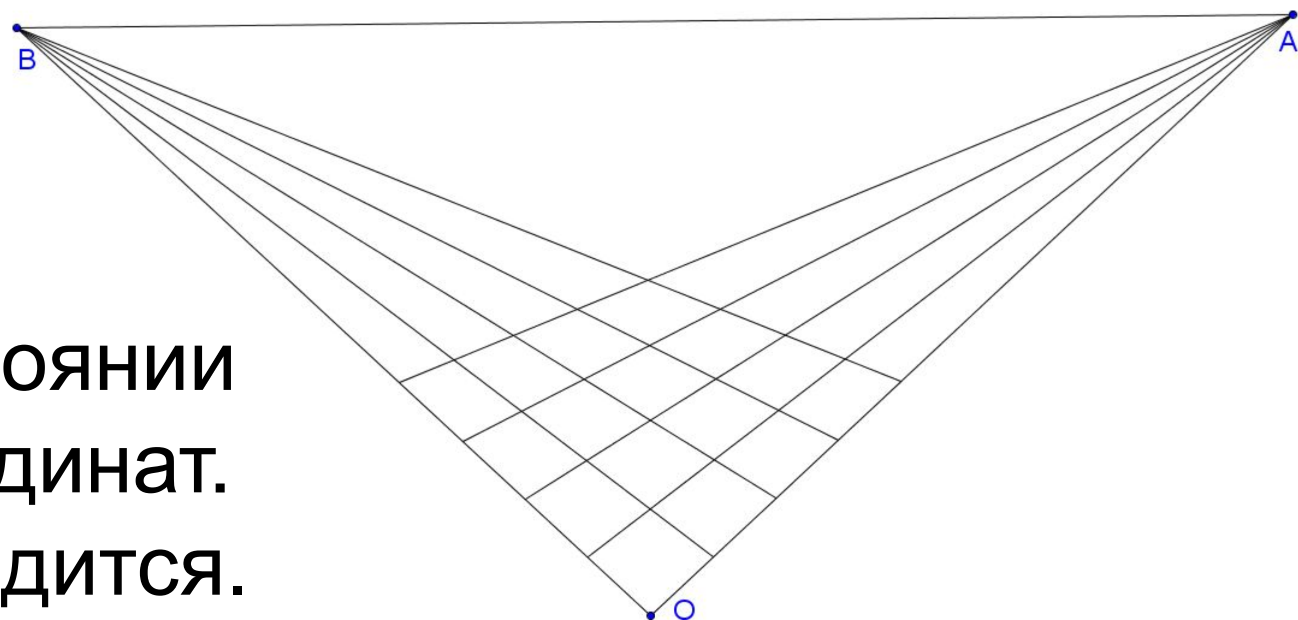


Итак, треугольник OAB – базисный:
O (0, 0, 1), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0).

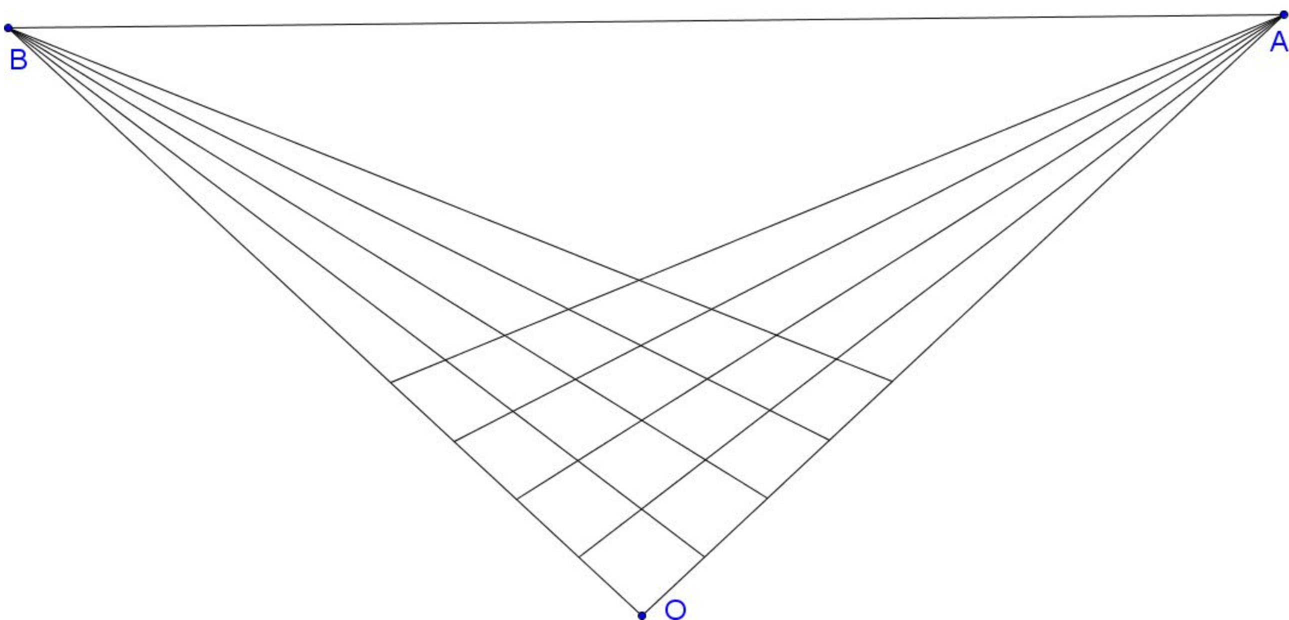
Сравним с обычными координатами, подставив эти значения в уравнения
X = x / z, и Y = y / z.

Для точки O затруднений нет, т.к. X = 0, Y = 0.

Для точки A имеем X = ∞, Y = 0. Она должна находиться на оси Ox на бесконечно большом расстоянии от начала координат. Она там и находится.

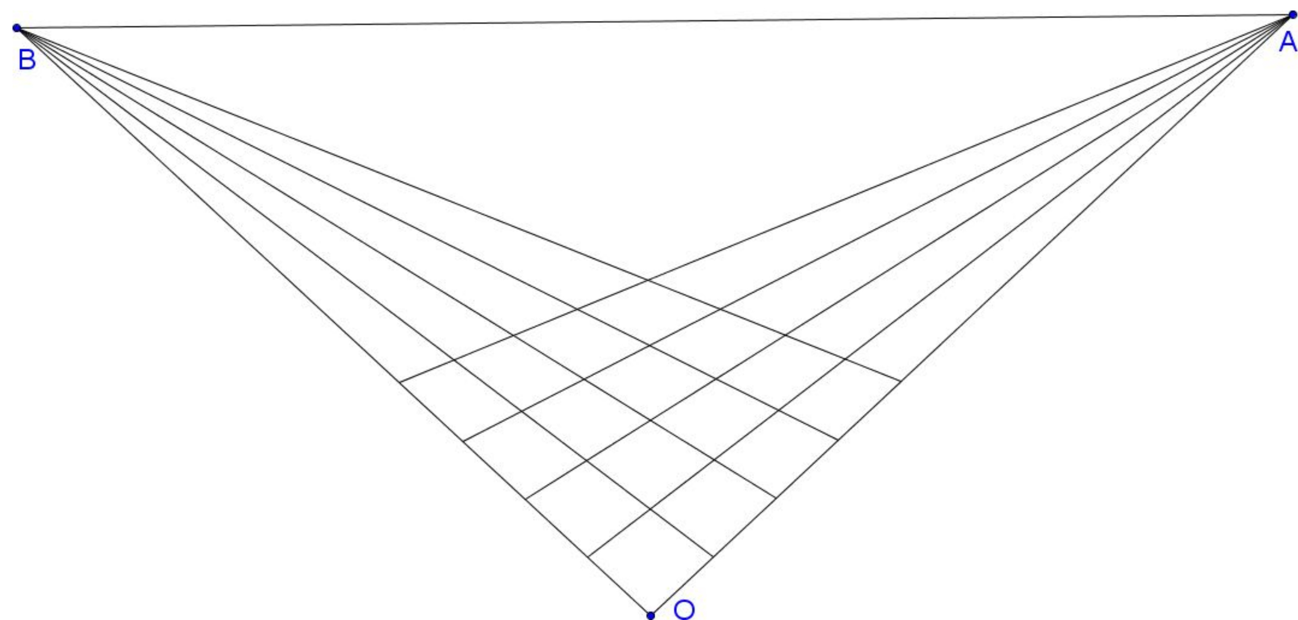


Аналогично получим для точки B: $X = 0$, $Y = \infty$, т.е. точка B лежит на оси ординат на бесконечном расстоянии от O.



Уравнения прямых

Точка	Обычная система координат	Однородные координаты
O	$Y = mX$	$y = mx$
A	$Y = 0$	$y = cz$
B	$X = 0$	$x = kz$

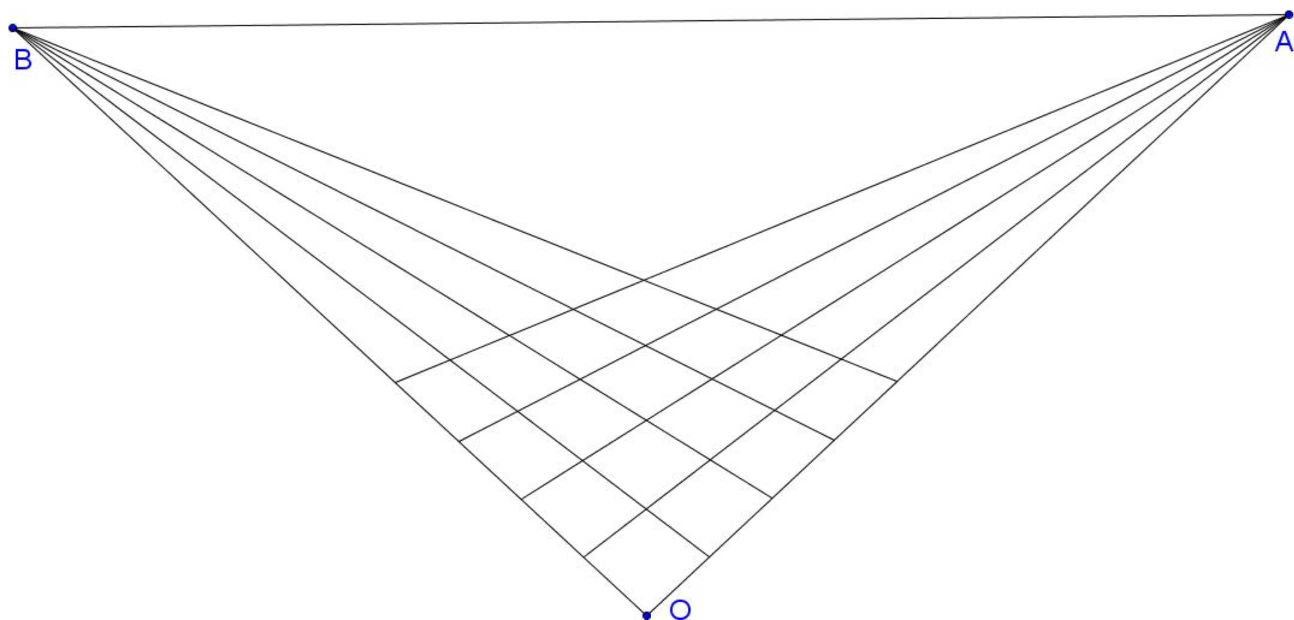


Итак, поскольку мы имеем

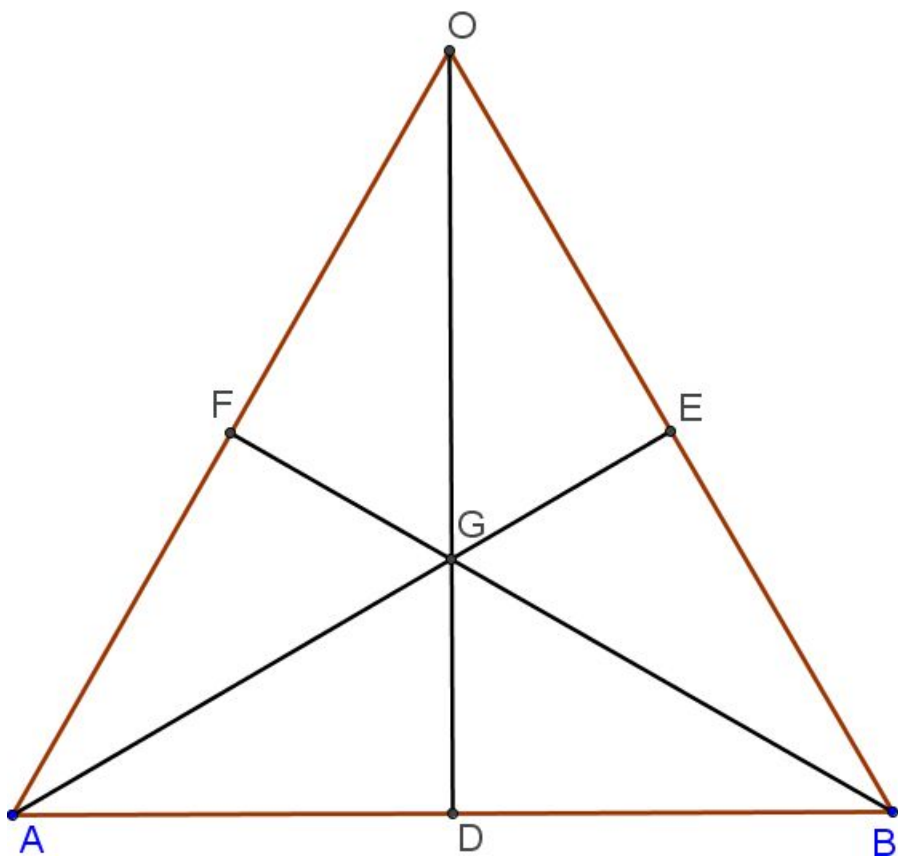
$$A\ (1,\ 0,\ 0);\ B\ (0,\ 1,\ 0),\ O\ (0,\ 0,\ 1),$$

то можно рассматривать любую точку (x, y, z) как «смесь» точек A, B, O:

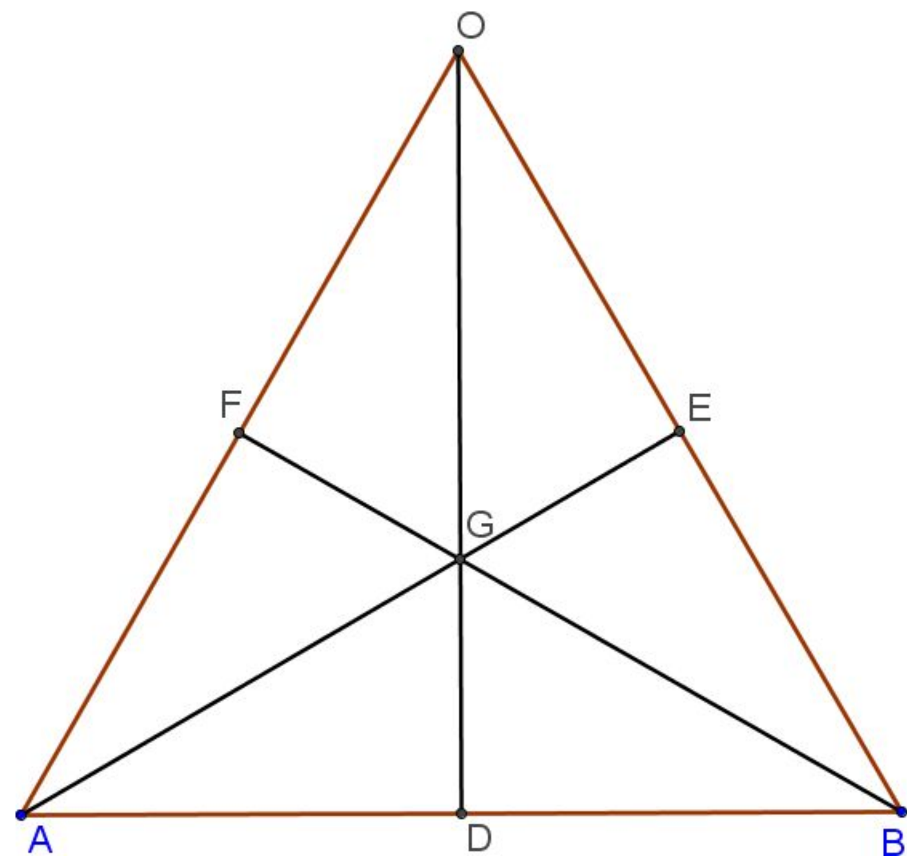
$$D = xA + yB + zO.$$



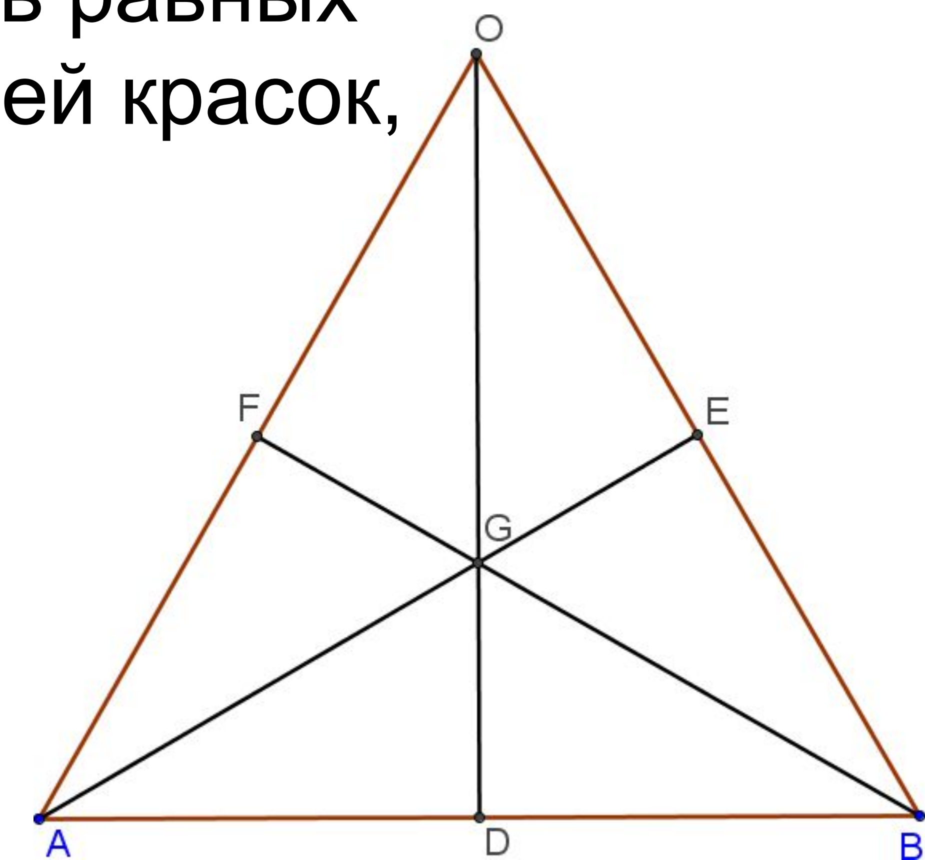
Используя палитру RGB, соотнесём цвета с точками: **A** → **R**, **B** → **G**, **O** → **B**.



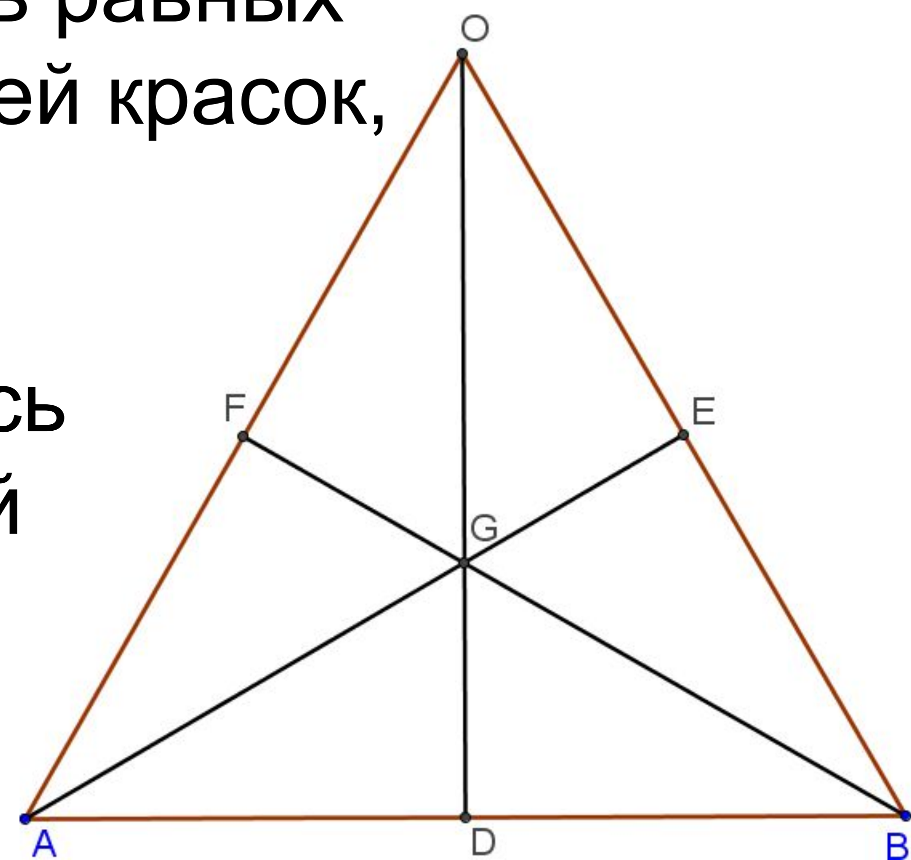
Используя палитру RGB, соотнесём цвета с точками: **A → R**, **B → G**, **O → B**.
Тогда в точке D (середине отрезка AB) будет нанесена краска, полученная смешиванием красной и зелёной в равных количествах.



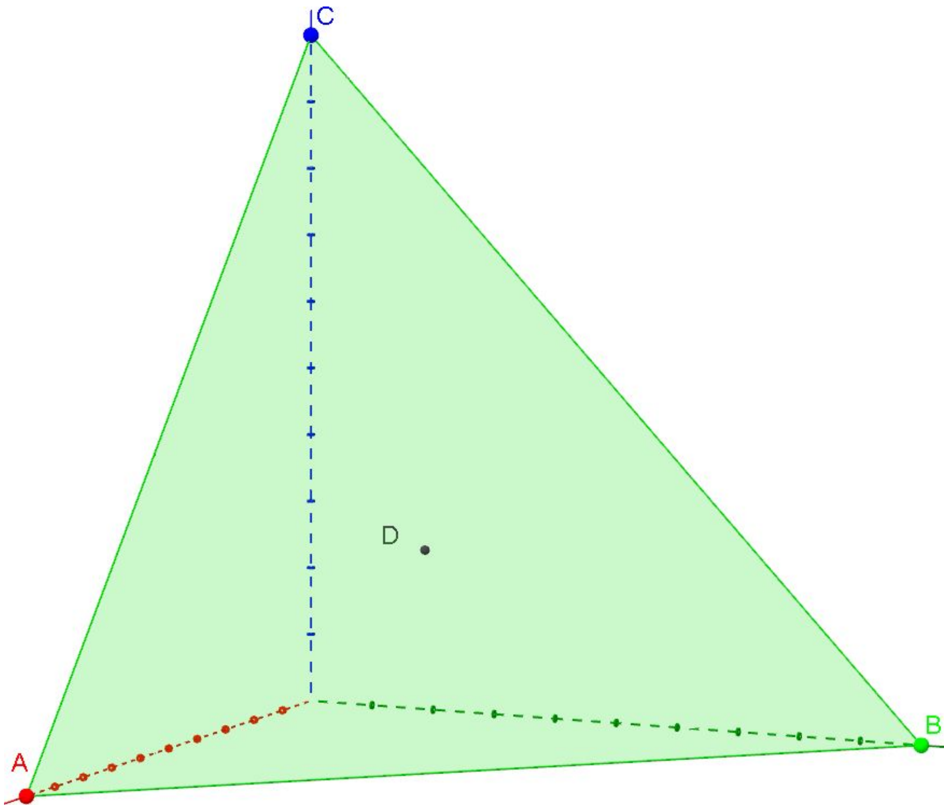
Используя палитру RGB, соотнесём цвета с точками: **A → R**, **B → G**, **O → B**.
Тогда в точке D (середине отрезка AB) будет нанесена краска, полученная смешиванием красной и зелёной в равных количествах.
В точке E окажется смесь равных количеств зелёной и синей красок, а в F – красной и синей.



Используя палитру RGB, соотнесём цвета с точками: **A → R**, **B → G**, **O → B**.
Тогда в точке D (середине отрезка AB) будет нанесена краска, полученная смешиванием красной и зелёной в равных количествах.
В точке E окажется смесь равных количеств зелёной и синей красок, а в F – красной и синей.
В точке G (центре треугольника) будет смесь красной, синей и зелёной красок в равных количествах.

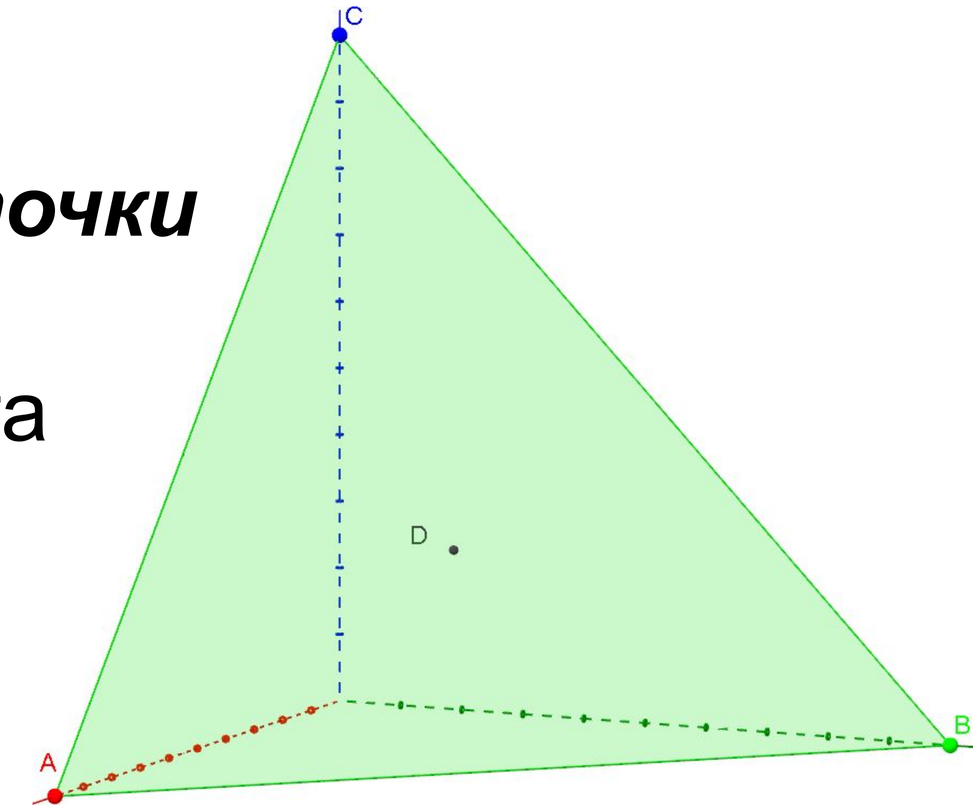


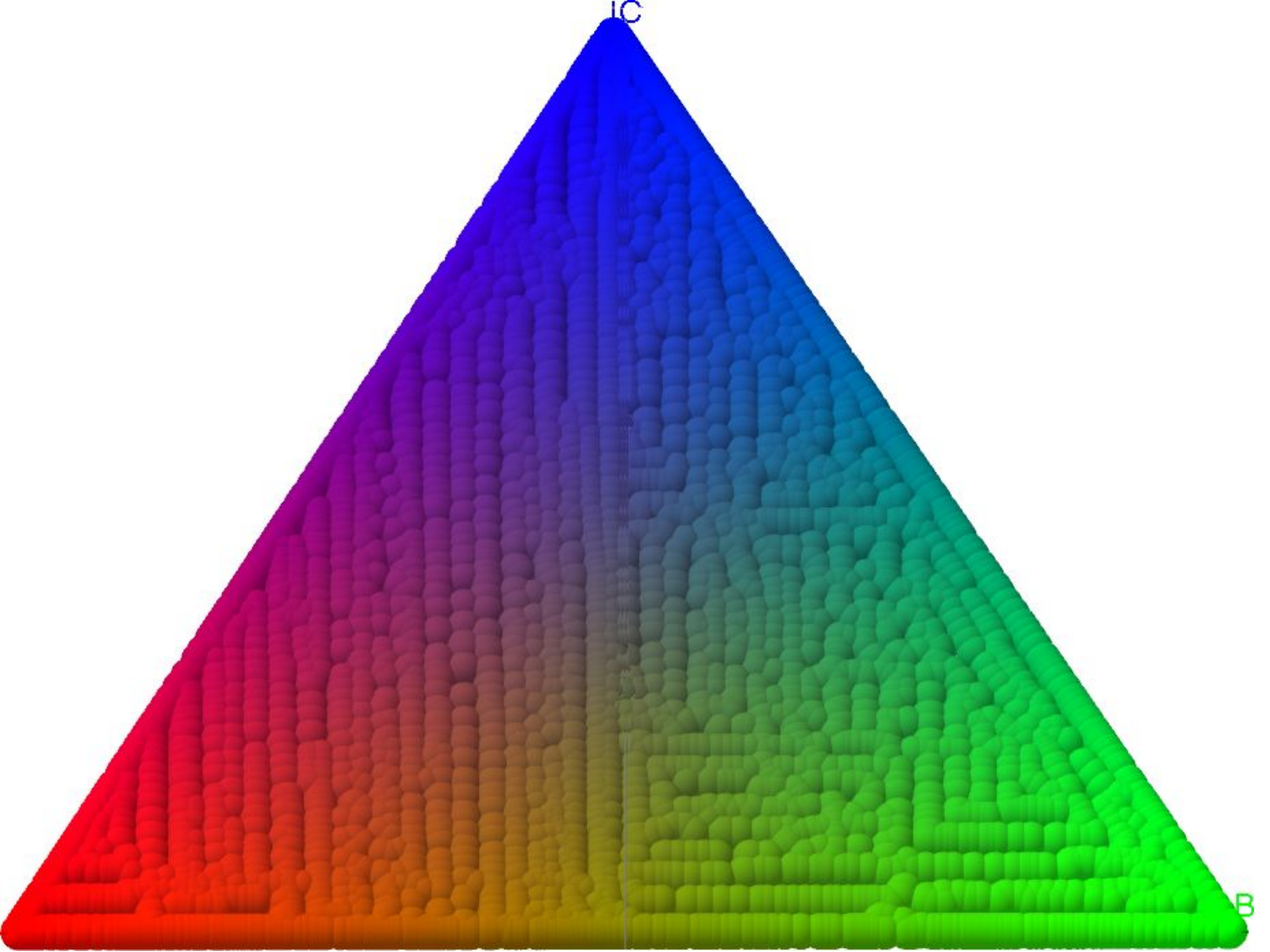
Если развернуть плоскость π несколько иным способом, то ***фундаментальными прямыми*** (определяющими наш треугольник) будут линии пересечения с координатными плоскостями пространства.



Если развернуть плоскость π несколько иным способом, то ***фундаментальными прямыми*** (определяющими наш треугольник) будут линии пересечения с координатными плоскостями пространства.

Вершины такого треугольника – ***фундаментальные точки*** (у них хотя бы одна проективная координата равна нулю).




C
B