Тема:

Понятие производной. Геометрический смысл производной.

Вильгельм Лейбниц (1646-1716)

Немецкий философ, математик, физик, языковед. Один из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Исаак Ньютон (1643 – 1727)

Английский математик, механик, астроном и физик, создатель классической механики. Один из первых авторов дифференциального и интегрального исчисления.

Приращение функции и приращение аргумента

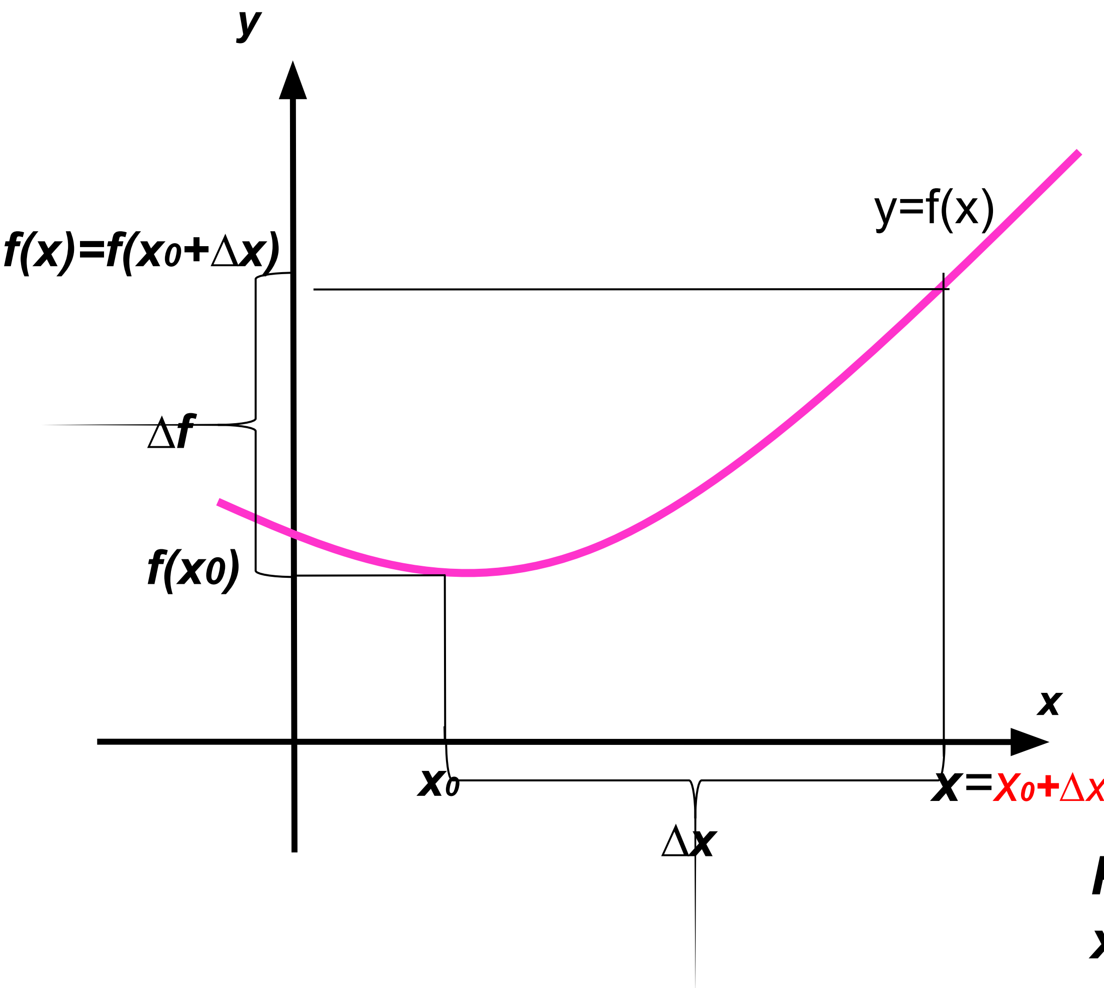
приращение аргумента:

$$\Delta x = x - x_0$$

Приращение функции :

$$\Delta f = f(x0 + \Delta x) - f(x0)$$

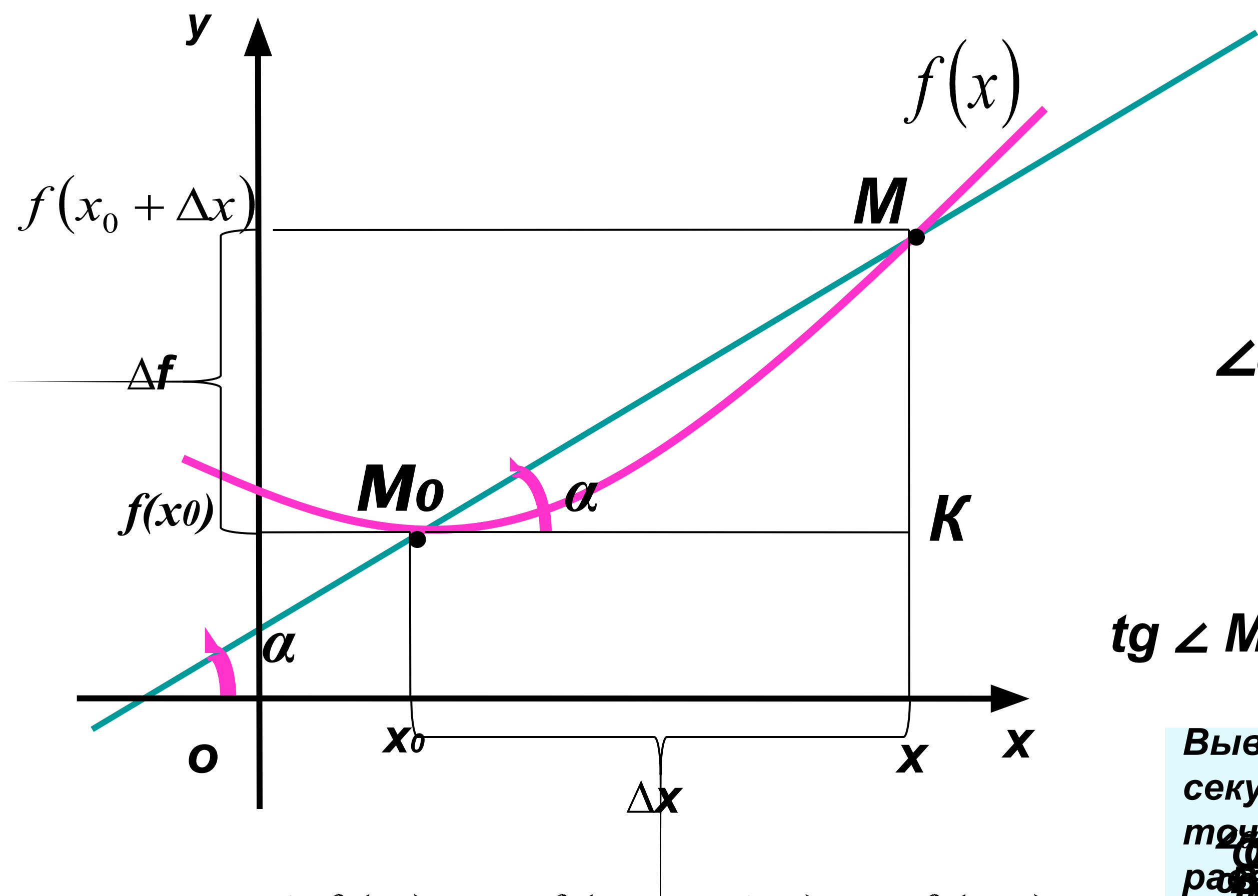
$$\Delta f = f(x) - f(x0)$$



Расстояние между точками x и x_0 обозначим Δx. Оно называется приращением аргумента и равно разности между x и x_0:

Геометрический смысл приращения аргумента и приращения функции

прямая, проходящая через две точки графика, называется **секущей**



Уравнение прямой:

y = kx+b

k = tgα

∠α=∠MM₀K

$$tg\angle MM_0K = \frac{MK}{M_0K} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$k = tg\alpha = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{x-x_0}$$

Вывод: угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M(x; f(x))$ можно рассматривать как отношение приращения функции к приращению аргумента

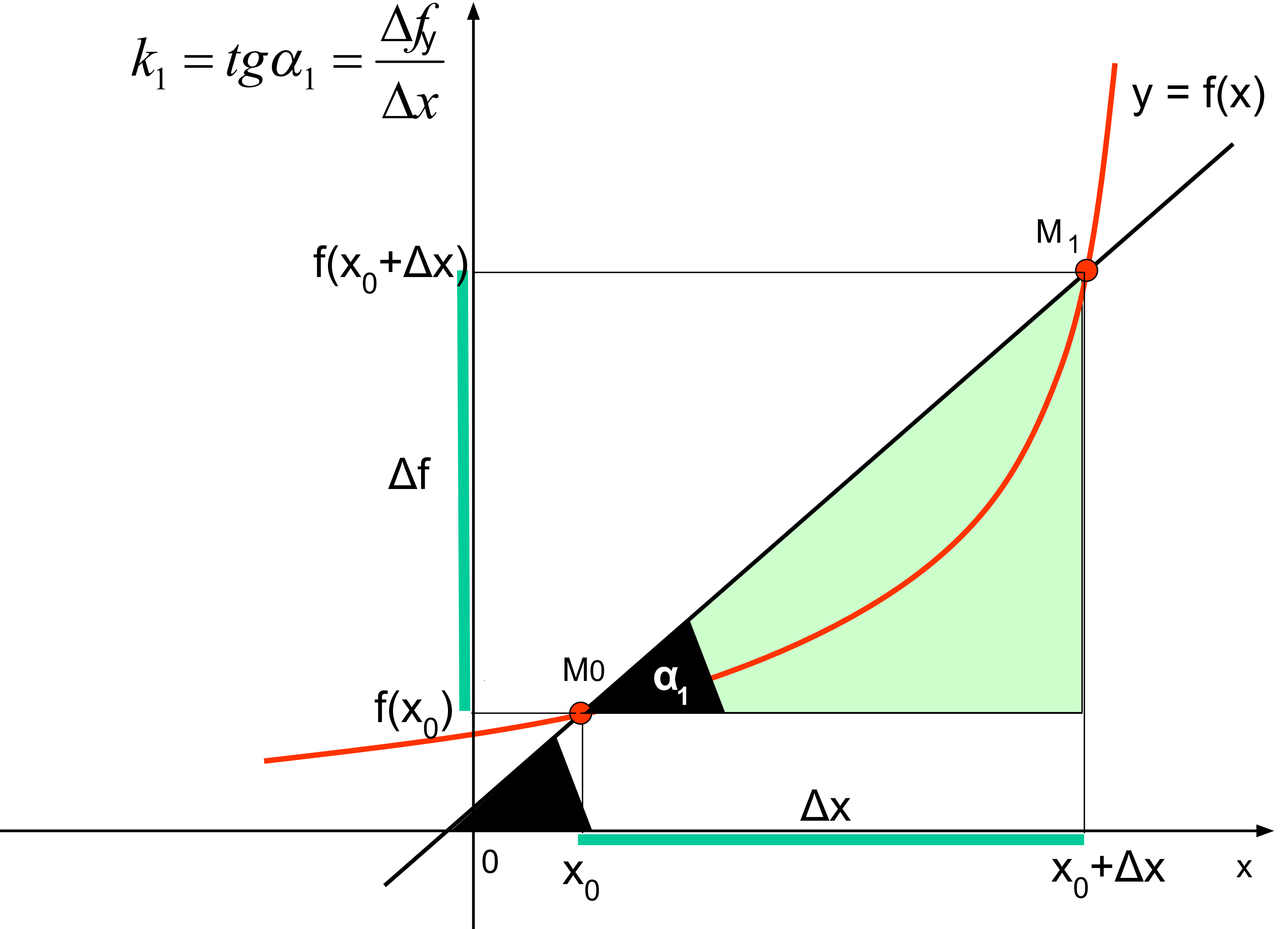
Определение

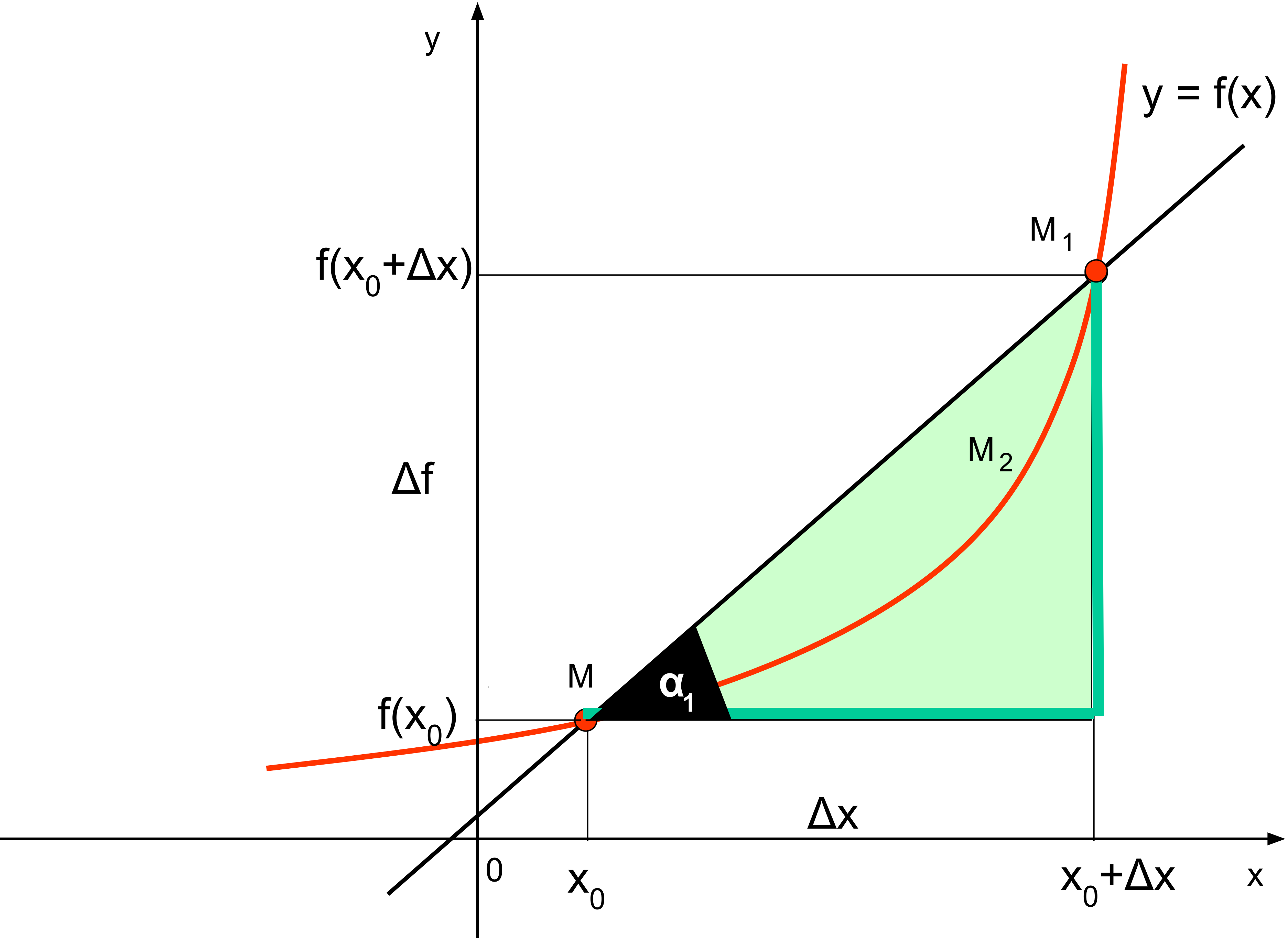
Производной функции y=f(x) называется число, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{x - x_0} = \boxed{f'(x_0)}$$

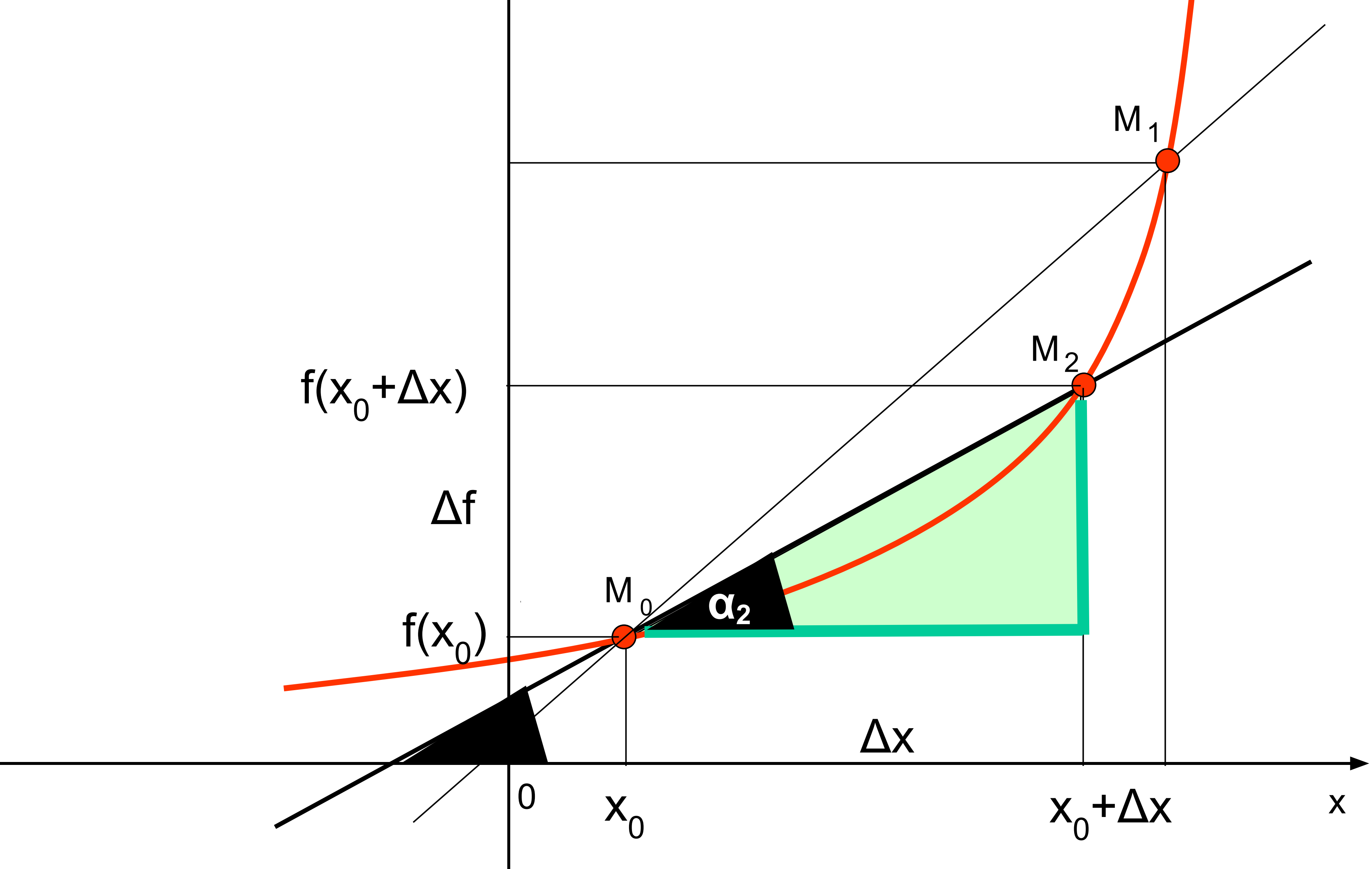
Геометрический смысл производной

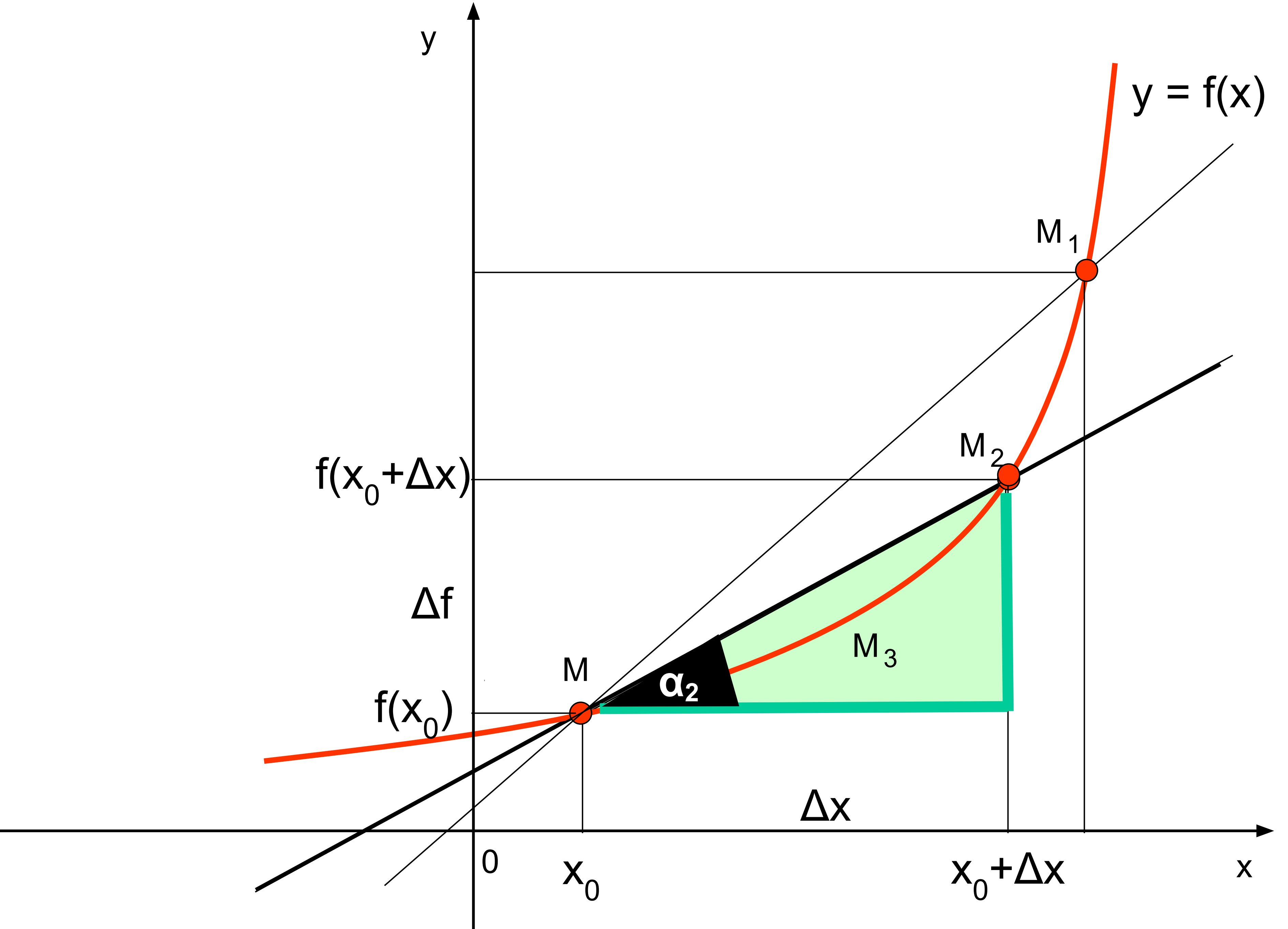
$$k_1 = tg\alpha_1 = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$




y
y = f(x)
M 1
f(x0+Δx)
M 2
Δf
M
α1
f(x0)
Δx
0
x0
x0+Δx
x

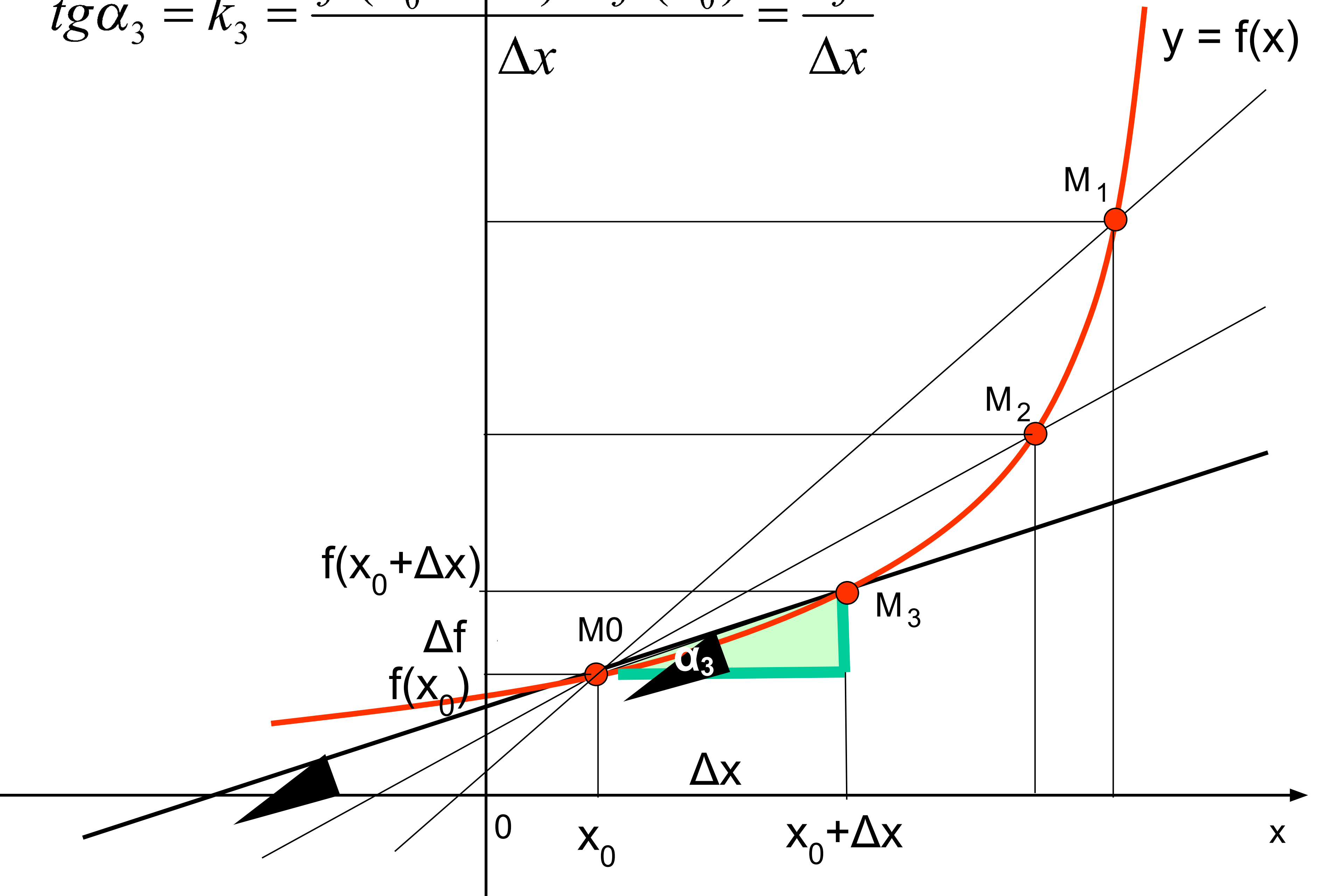
$$k_2 = tg\alpha_2 = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

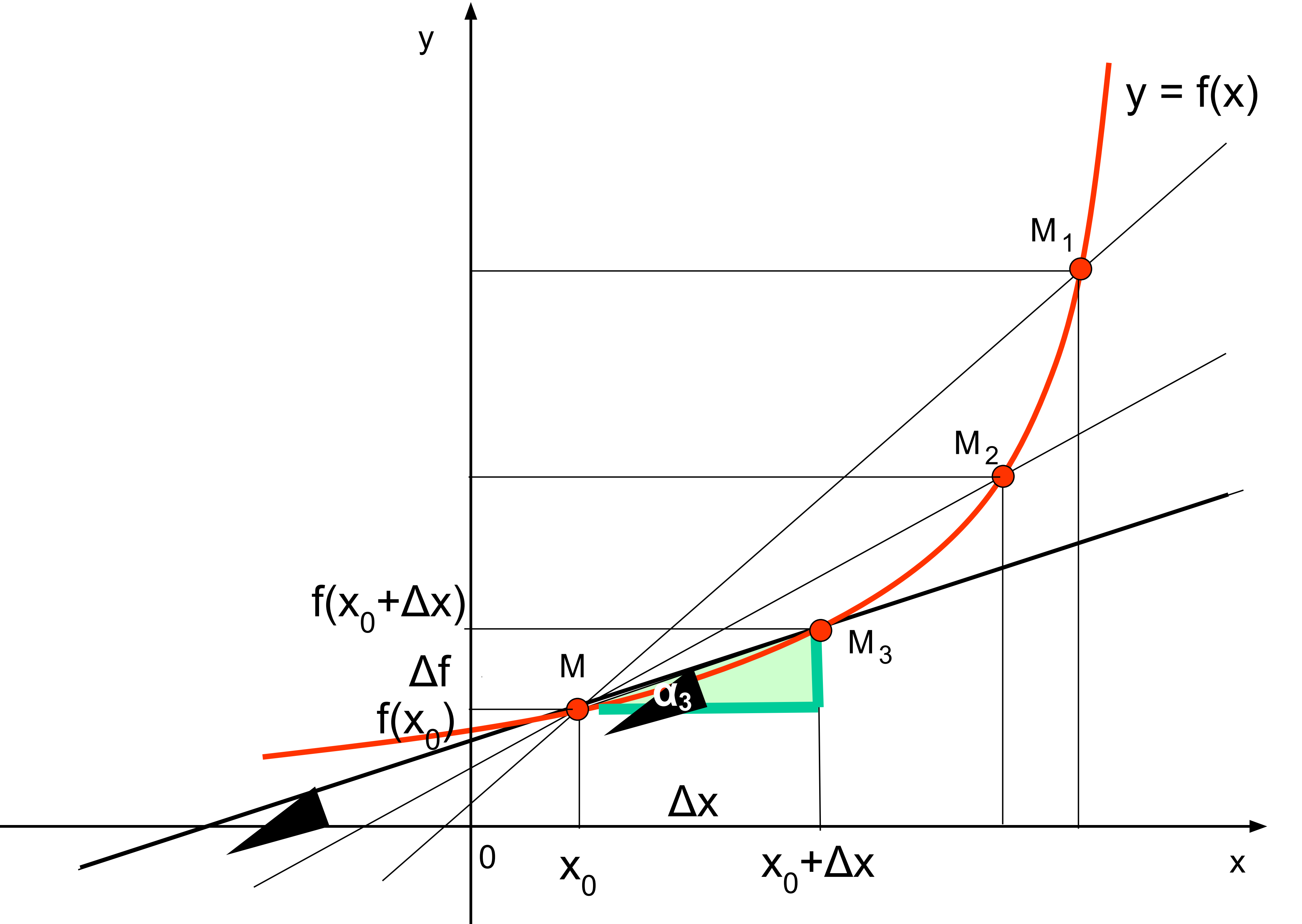




y
y = f(x)
M 1
M 2
f(x0+Δx)
Δf
M 3
M
α2
f(x0)
Δx
0
x0
x0+Δx
x

$$tg\alpha_3 = k_3 = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

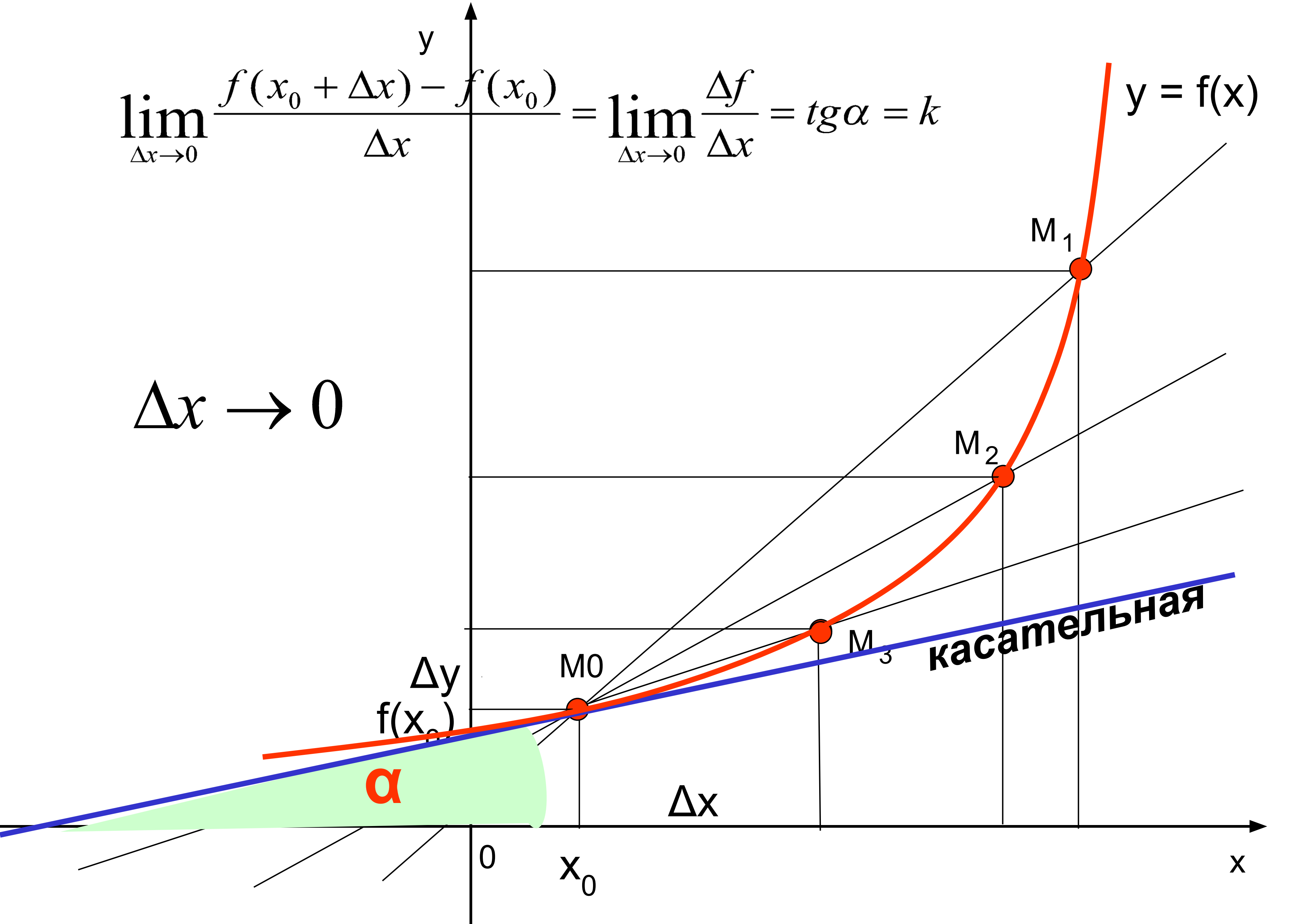




y
y = f(x)
M 1
M 2
f(x0+Δx)
M 3
Δf
M
α3
f(x0)
Δx
0
x0
x0+Δx
x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

$$\Delta x \to 0$$



Определение

Производной функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \boxed{f'(x_0)}$$

Производная функции f в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции *y=f(x)* в точке $M_0(x_0;f(x_0))$.

$$k = tg\alpha = f'(x_0)$$

Пример вычисления производной

$Дано: f(x) = x^2 + 1.$

$Найдем\ f'(x)\ в\ точке\ x_0 = -2,\ то\ есть\ f'(-2).$

Решение

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(-2 + \Delta x) = (-2 + \Delta x)^2 + 1 =$$

$$= 4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 1 = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\Delta f(x) = 5 - 4\Delta x + \Delta x^2 - 5 = -4\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = -4 + \Delta x$$

$$Если\ \Delta x \to 0,\ то\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to -4,\ то\ есть\ f'(x) = -4.$$

$$Ответ: f'(x) = -4$$