МАТЕМАТИКА

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Наталья Владимировна Крупина

Москва, 2021

По известным значениям $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ можно найти значения $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{tg}\, \frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Если известен $\cos \alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$ и $\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|$. Знаки $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$ могут быть определены, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1 Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (5) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49$.

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. ◁

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{7}$$

Задача 2 Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

▶ По формуле (7) имеем

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}$.

► $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=$

$=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $1 + \cos 2x = 2 \cos x$.

▶ Так как $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2 \cos^2 x = 2 \cos x$, откуда

$$\cos x\,(\cos x - 1) = 0.$$

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (k или n).

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 5 Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

▶ 1) $\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (8)$$

2) $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (9)$$

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (10)$$

Эту формулу можно также получить почленным делением равенств (8) и (9). ◁

Итак, по формулам (8) — (10) можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

514 Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

515 Пусть $\cos\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

517 Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 22°30'$.

518 Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказать тождество (519—520).

519 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

520 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

521 Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$.

522 Упростить выражение $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$.

523 Решить уравнение:

1) $1 - \cos x = 2 \sin \dfrac{x}{2}$;

2) $1 + \cos x = 2 \cos \dfrac{x}{2}$;

3) $1 + \cos \dfrac{x}{2} = 2 \sin \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

4) $1 + \cos 8x = 2 \cos 4x$;

5) $2 \sin^2 \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \sin 2x = 1$;

6) $2 \cos^2 x - \dfrac{1}{2} \sin 4x = 1$.