Лекция №5. Ударные волны
1.1. Плоская ударная волна

Малые упругие возмущения в жидкостях распространяются со скоростью звука, и приращение какого-либо параметра мало по сравнению с его значением до появления возмущения. Например,

$$\Delta\bar{p} = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} << 1$$

Где p_0 – давление до появления возмущения; p – наибольшее давление после появления первого возмущения.

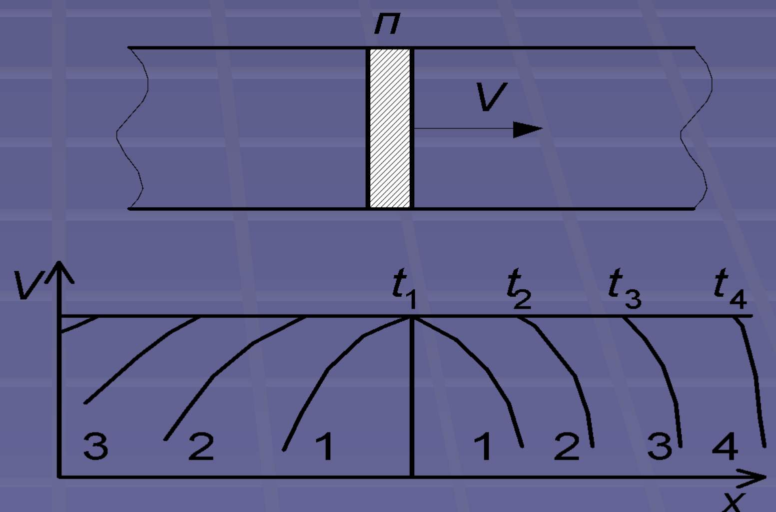
В газах имеют место и сильные или конечные возмущению когда $\Delta\bar{p}$ может равняться единице и быть значительно больше. При малых возмущениях все параметры потока являются непрерывными функциями координат и времени. При конечных возмущениях параметры потока (V, ρ, p, T) претерпевают конечные разрывы.

Плоская ударная волна

В обычных условиях акустические возмущения распространяются со скоростью звука, а при сильных взрывах они будут конечными, и скорость их распространения может значительно превосходить скорость звука. Движение при малых возмущениях и движение при конечных возмущениях математически описываются различными уравнениями. Пусть в бесконечной трубе с неподвижным газом в некоторый момент времени t_0 мгновенно начинает двигаться поршень П с некоторой конечной скоростью *V*. Тогда в момент , мало отличающийся от t_0, параметры газа на бесконечности останутся неизменными, а в непосредственной близости перед и за поршнем они будут существенно отличаться от параметров газа, имевших место до начала движения поршня.

Плоская ударная волна

Если труба теплоизолирована от внешней среды и движение газа будет адиабатическим и иэнтропическим, то перед поршнем газ, сжимаясь, вызовет увеличение плотности, давления и температуры, а за поршнем образуется разрежение, и указанные параметры газа уменьшатся. Скорость потока в непосредственной близости от поршня (как перед, так и за ним) будет равна скорости движения поршня. В каждый момент времени все параметры газа в трубе изменяются непрерывно от их значения на поршне (на передней и задней его поверхностях) до их значений на бесконечности.



Плоская ударная волна

Предположим, что вносимые поршнем в поток возмущения – малые. Тогда скорость их распространения равна скорости звука a. В момент t_1 температура газа перед поршнем убывает вдоль трубы ($x > 0$), а за поршнем она растет при удалении от него ($x < 0$). Местная скорость звука, поскольку она пропорциональна температуре, перед поршнем убывает вдоль трубы, а за поршнем (при удалении от него) растет. Если распространение скоростей газа вдоль трубы (перед и за поршнем)в момент времени t_1 представить кривой 1, то соответствующие кривые в моменты времени t_2 t_3 t_4 будут иметь вид кривых 2, 3 и 4. Кривая 2 перед поршнем может быть получена из кривой 1 путем добавки в каждой точке соответствующего значения скорости звука. За промежуток времени $t_2 - t_1$ точки кривой 1 сместятся в горизонтальном направлении на отрезки тем большие, чем больше ординаты кривой 1, т.е., наклон линии, характеризующей изменение скорости вдоль координаты *x*, возрастает. В последующие моменты времени это увеличение крутизны будет продолжаться, и в момент t_4 в некотором сечении кривая станет перпендикулярна оси *x* т.е. произойдет скачок скорости.

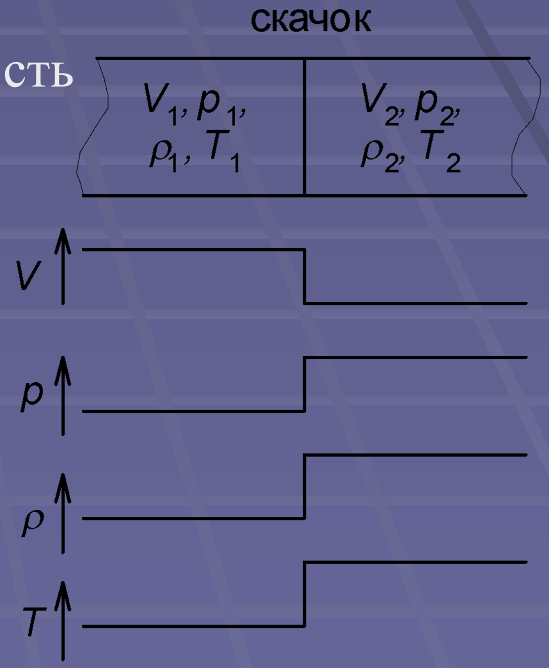
Плоская ударная волна

Аналогичные изменения будут происходить и с другими параметрами потока. При этом в сечении, где происходит скачкообразное уменьшение скорости, давление, температура и плотность увеличиваются. Такой скачок называют скачком уплотнения. В действительности параметры потока изменяются не скачкообразно, а на некоторой весьма малой длине, имеющей величину порядка пути свободного пробега молекулы. За поршнем в области разряжения картина будет обратной. Поскольку скорость звука с удалением от поршня в обратную сторону растет, то к точкам кривой, 1 с меньшими скоростями будут добавляться большие отрезки, и кривая изменения скорости в пространстве растягивается. Наклон кривых в последующие моменты времени уменьшается, что приводит к образованию волн разрежения. В этой области скорости и другие параметры изменяются непрерывно, а скачки и ударные волны не образуются.

Рассмотрим качественное изменение параметров потока в скачке, образованном от перемещения поршня в трубе. В этом случае плоскость скачка будет перемещаться вдоль оси трубы, а направление перемещение скачка и плоскость скачка перпендикулярны друг другу. Такие скачки называются прямыми.

Плоская ударная волна

В системе координат, связанной с трубой движение ударной волны вдоль трубки будет нестационарным, так как параметры потока в любой точка трубы будут зависать от времени. Для приведения задачи к стационарной введем систему координат, связанную с плоскостью ударной волны.
Тогда ударную волну можно считать неподвижной, параметры потока перед и за скачком постоянными величинами, скачкообразно изменяющимися в плоскости ударной волны.
На рисунке показаны параметры потока перед и за скачком.
Т.к. при движении поршня образовавшаяся ударная волна перемещается в невозмущенной среде, то в системе координат, связанной с ударной волной, скорость перед скачком будет равна скорости перемещения ударной волны.



1.2. Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Для установления количественной зависимости параметров потока за скачком V_2, p_2, ρ_2 и T_2 от параметров потока до скачка V_1, p_1, ρ_1 и T_1 воспользуемся общими уравнениями физики.

Уравнение сохранения массы для движения в цилиндрической трубе $S_1 = S_2$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \qquad (22)$$

Уравнение изменения количества движения при отсутствии объемных сил и поверхностных сил вязкости

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \qquad (23)$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Для теплоизолированного течения идеального газа уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии. Полагая, что скачок происходит без теплообмена с внешней средой можно записать

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}=\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2} \quad (24)$$

Разделим уравнение (23) на (22)получим разность скоростей до и после скачка

$$\frac{p_2}{\rho_2 V_2}-\frac{p_1}{\rho_1 V_1}=V_1-V_2$$

Записав уравнение энергии до и после скачка в виде

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}$$ и $$\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

получим из этих уравнений отношение давлений к плотностям

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} a^{*2} - \frac{k-1}{2k} V_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} a^{*2} - \frac{k-1}{2k} V_2^2$$

Подставим последние выражения в уравнение энергии

$$\frac{k+1}{2k} \frac{a^{*2}}{V_1 V_2} (V_1 - V_2) + \frac{k-1}{2k} (V_1 - V_2) = V_1 - V_2$$

Так как $V_1 \neq V_2$, то, разделив на $(V_1 - V_2)$ и выполнив преобразования,

Получим $V_1 V_2 = a^{*2}$ или $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ (25)

Формулу называют формулой Прандтля.

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Рассмотрим количественное изменение параметров потока в прямом скачке. Скачок скорости $\Delta V = V_1 - V_2$ можно определить, воспользовавшись

соотношением $$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{a^{*2}}{V_1} = V_1\left(1 - \frac{a^{*2}}{V_1^2}\right) = V_1\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right).$$

Скачок давления $\Delta p = p_2 - p_1$ можно найти, используя уравнение сохранения энергии и уравнение изменения количества движения

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = \rho_1 V_1 (V_1 - V_2) = \rho_1 V_1 \Delta V = \rho_1 V_1^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right).$$

скачок плотности найдем из уравнений сохранения массы и формулы Прандтля

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} - \rho_1 = \rho_1\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = \rho_1\left(\frac{V_1^2}{a^{*2}} - 1\right) = \rho_1(\lambda_1^2 - 1)$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Скачок температуры находим из уравнения Бернулли, записав его в виде

$$\frac{k}{k-1}RT_1+\frac{V_1^2}{2}=\frac{k}{k-1}RT_2+\frac{V_2^2}{2}$$

откуда находим

$$\Delta T=T_2-T_1=\frac{k-1}{kR}\left(\frac{V_1^2}{2}-\frac{V_2^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{k-1}{2kR}V_1^2\left(1-\frac{a^{*4}}{V_1^4}\right)=\frac{k-1}{2kR}V_1^2\left(1-\frac{1}{\lambda_1^4}\right)$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Приведенные формулы выражают изменения параметров потока в прямом скачке через параметр λ_1 , перед скачком. Коэффициент скорости λ можно выразить через M по формуле $\frac{1}{\lambda^2}=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\frac{1}{M^2}$.

Заменив λ на M в предыдущих выражениях, получим

$$\Delta p=\frac{2}{k+1}\rho_1 V_1^2\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right);$$

$$\Delta V=V_1\left(1-\frac{k-1}{k+1}-\frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2}\right)=\frac{2}{k+1}V_1\left(1-\frac{1}{M_1^2}\right);$$

$$\Delta\rho=\rho_1\frac{M_1^2-1}{\frac{k-1}{2}M_1^2+1};$$

$$\Delta T=\frac{k-1}{2}T_1 M_1^2\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2}\right)^2\right];$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Из всех приведенных формул видно, что скачок параметров потока возможен только при $M > 1$, или $\lambda > 1$. При $M = \lambda = 1$ и $\lambda_1 < 1$ или $M_1 < 1$ скачок физически невозможен.

В таблице П2 приложения приведены значения ΔV; $\Delta p / p_1$; ΔT; $\Delta\rho / \rho_1$

для воздуха ($k = 1{,}4$) в зависимости от V_1 или M_1, при $T_1 = 288\,\text{К}$ (15°С) и нормальном атмосферном давлении.

Относительное изменение плотности в скачке, может быть записано

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{1 - \dfrac{1}{M_1^2}}{\dfrac{k-1}{2} + \dfrac{1}{M_1^2}}$$

Из этой формулы видно, что при стремлении числа M к бесконечности $\Delta\rho / \rho$ имеет предел

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{2}{k-1} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Для воздуха при $M_1 \to \infty$ $\Delta\rho / \rho_1 = 5$

Указанные соотношения не учитывают ионизацию и диссоциацию газа при высоких температурах. При наличии этих явлений $\Delta\rho / \rho_1$ может быть более 5. Так, при $T_1 = 2260\,\text{К}$ $\rho_2 / \rho_1 = 11{,}1$

При адиабатическом непрерывном движении газа связь между *p* и ρ определяется изоэнтропической адиабатой (адиабатой Пуассона)

$\dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k$ из которой видно, что при увеличении давления плотность растет неограниченно.

Установим зависимость ρ от *p* в скачке уплотнения. Из уравнения (24) получим

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) \qquad (26)$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Воспользуемся следующей формой уравнения изменения количества Движения

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 = \rho_1 V_2 (V_2 - V_1)$$

Умножая правую часть этого равенства на $(V_1 + V_2)/(\rho_1 V_1)$ а левую часть на равное значение, представленное в виде

$$\frac{V_1 + V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{V_2}{\rho_2 V_2} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

получим

$$V_2^2 - V_1^2 = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

Приравнивая правую часть уравнения (26) к правой части последнего выражения, найдем связь между p и ρ.

$$\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Группируя слагаемые с p_1 и p_2, найдем

$$p_1\left(\frac{2k}{k-1}\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)=p_2\left(\frac{2k}{k-1}\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)$$

Приведя полученное выражение к общему знаменателю и умножив на $(k-1)\rho_1\rho_2$ окончательно получим

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(k+1)\rho_2-(k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1-(k-1)\rho_2}=\frac{(k+1)\dfrac{\rho_2}{\rho_1}-(k-1)}{(k+1)-(k-1)\dfrac{\rho_2}{\rho_1}} \qquad (27)$$

Уравнение (27) называется ударной адиабатой или адиабатой Гюгонио.

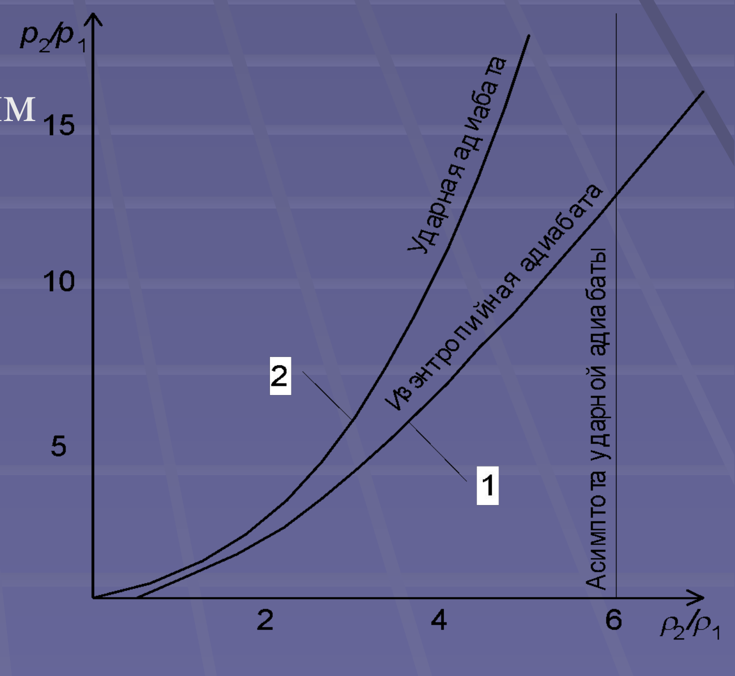
Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

На рисунке изображены обычная (1) и ударная (2) адиабаты. Различие их в том, что для обычной адиабаты отношение ρ_2/ρ_1 растет неограниченно при увеличении p_2/p_1. Для ударной адиабаты при увеличении p_2/p_1 отношение плотностей асимптотически приближается к пределу, равному

$$(k+1)/(k-1).$$

Это значит, что как бы не возрастало давление при переходе через скачок, уплотнение газа не может превосходить этого предела (для воздуха равного шести).

Переход через скачок является неизоэнтропийным процессом и сопровождается переходом механической энергии в тепловую.



Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Таким образом, прямой скачок уплотнения является формой перехода от сверхзвукового течения к дозвуковому.

В прямом скачке скачкообразно снижаются скорость потока *V*, число МахаM, и скоростной коэффициент λ. При этом происходит Скачкообразное увеличение плотности ρ, давления *p* и температуры *T*.

В прямом скачке остаются неизменными: T_0 – температура торможения $a*$, *V*макс, i_0, a_0.

Перед скачком справедливо равенство $\frac{V_1^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{kRT_{01}}{k-1}$,

а за скачком

$$\frac{V_2^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{kRT_{02}}{k-1}$$

Изменение параметров потока в прямом скачке. Ударная адиабата

Так как на основании уравнения Бернулли левые части этих выражений равны, то равны и их правые части, откуда следует равенство $T_{01} = T_{02}$

Неизменность T_0 при переходе через скачок объясняется тем, что часть механической энергии преобразуется в тепловую (потери), не рассеивается благодаря теплоизолированности процесса, и полная удельная энергия остается неизменной.
Давление торможения и плотность торможения уменьшаются на скачках.

1.3. Скорость распространения ударной волны и спутного потока за нею

Скорость распространения ударной волны θ по отношению к невозмущенному (покоящемуся) газу, согласно ранее изложенному, равна скорости движения газа до скачка V_1, а скорость распространения спутного потока за ударной волной (движение возмущенного газа за ударной волной) равна разности скоростей до скачка и после него.
За меру интенсивности скачка и ударной волны можно принять число

$$M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{\theta}{a_1}$$

а также сжатие газа в скачке, определяемое формулой

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \qquad (28)$$

Скорость распространения ударной волны и спутного потока за нею

Определив число M_1 из (28) и подставив его в предыдущую формулу, найдем скорость распространения ударной волны по отношению к невозмущенному газу

$$\theta = M_1 a_1 = \sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k}\frac{p_2}{p_1}}\, a_1$$

Анализируя последнюю формулу, найдем, что скорость распространения ударной волны по отношению к невозмущенному газу всегда больше скорости звука в этом газе. При уменьшении интенсивности ударной волны скорость ее распространения стремится к скорости звука в невозмущенном газе: при $p_2 = p_1$, $\theta = a_1$. Отсюда следует, что звуковую волну можно рассматривать как ударную волну малой интенсивности.

Для определения скорости V спутного потока за волной используем соотношение $V = V_1 - V_2$ и формулу Прандтля, $V_1 \cdot V_2 = a^{*2}$ откуда получим

$$V = V_1 - \frac{a^{*2}}{V_1}$$

Скорость распространения ударной волны и спутного потока за нею

Используя ранее полученную зависимость

$$a^{*2} = \frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)a_1^2$$

после преобразования будем иметь $V = \frac{2}{k+1}\left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right)a_1$

При больших M_1 последнюю формулу можно записать так

$$V \sim \frac{2}{k+1}M_1 a_1 = \frac{2}{k+1}\theta$$

Из нее следует, что спутный поток за ударной волной при очень больших интенсивностях имеет скорость меньшую, чем скорость распространения самой ударной волны, но близкую к ней. Формулу можно выразить через давления, определив M_1. Тогда

$$V = \sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{k - 1 + (k+1)\frac{p_2}{p_1}}}a_1$$

Скорость распространения ударной волны и спутного потока за нею

Из последнего уравнения следует, что в звуковой волне ($p_2/p_1 \approx 1$) скорость спутного потока близка к нулю. С ростом интенсивности ударной волны скорость спутного потока возрастает и при очень больших интенсивностях эта скорость пропорциональна корню квадратному из сжатия p_2/p_1 , что видно из нижеприведенной формулы.

$$V \sim \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\frac{p_2}{p_1}}{\sqrt{(k+1)\frac{p_2}{p_1}}} a_1 = \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} a_1$$

Заметим, что даже при сравнительно небольших сжатиях воздуха ударной волной возникает сильный спутный поток.

Например, ударная волна, относительное сжатие воздуха в которой $\Delta p/p_1 = 0{,}22$ распространяясь со скоростью 370 м/с, могла бы вызвать спутный поток, движущийся со скоростью 50 м/с.

Скорость распространения ударной волны и спутного потока за нею

Отсюда видно, сколь ничтожные сжатия воздуха несут с собой обычные звуковые волны, почти совершенно не смещающие частицы воздуха. Приведем следующие цифры: для звука в сто тысяч раз более интенсивного, чем самая громкая игра оркестра, амплитуда изменения плотности воздуха в звуковой волне составляет всего лишь 0,4% от нормальной плотности воздуха; амплитуда изменения давления равна 0,56% от атмосферного давления, амплитуда скорости воздуха не превышает 0,4% от скорости звука, то есть приблизительно 1,3 м/с. Амплитуда смещения частиц воздуха при частоте в 500 Гц достигает 0,036см. Звук, создаваемый сильной сиреной, может вызвать спутный поток «звуковой ветер», способный потушить свечу.

Скорость распространения ударной волны и спутного потока за нею

Приведенные в табл. П2 приложения численные значения относительных сжатий и уплотнений газа ударной волной, справедливы и для ударной волны, распространяющейся в неподвижном воздухе (k = 1,4) при 15^0 С и нормальном атмосферном давлении со скоростью $\theta = V_1$. Следует отметить, что данные таблицы относятся к распространению плоской ударной волны, для которой все характерные величины сохраняются постоянными независимо от расстояния до источника образования возмущения. На практике приходится иметь дело со сферическими волнами, процесс распространения которых существенно нестационарен и даже в простейших случаях требует применения сложного математического аппарата.