

## Виды диэлектриков и их поляризация

**В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на:**

**проводники**

(много свободных зарядов)

**диэлектрики**

(свободных зарядов практически нет)

**полупроводники**

(свободные заряды есть, но их меньше, чем в проводниках)

## Виды диэлектриков

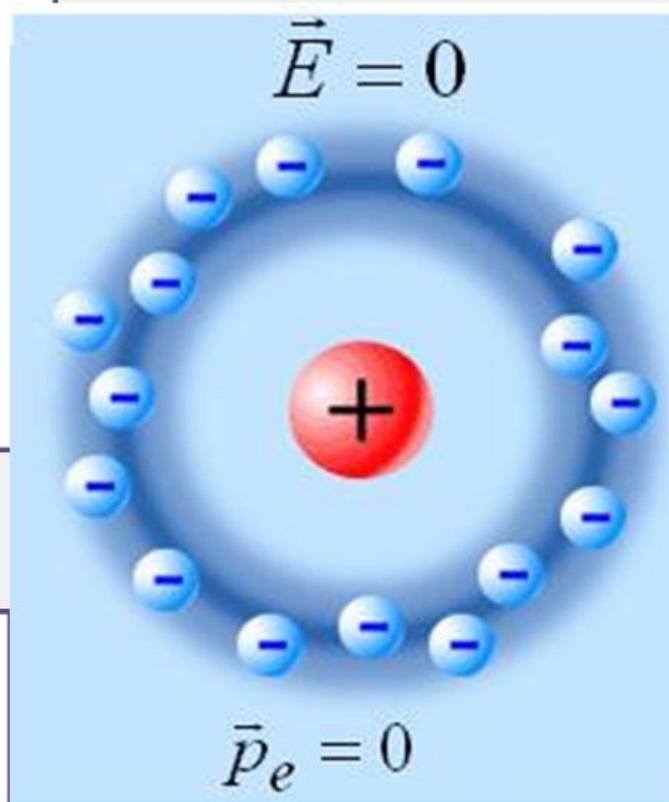
- **Диэлектрики с неполярными молекулами**  
Электронная поляризация
- **Диэлектрики с полярными молекулами**  
Ориентационная поляризация
- **Ионные диэлектрики**  
Ионная поляризация
- **Сегнетоэлектрики**

## Диэлектрики с неполярными молекулами

### Электронная поляризация

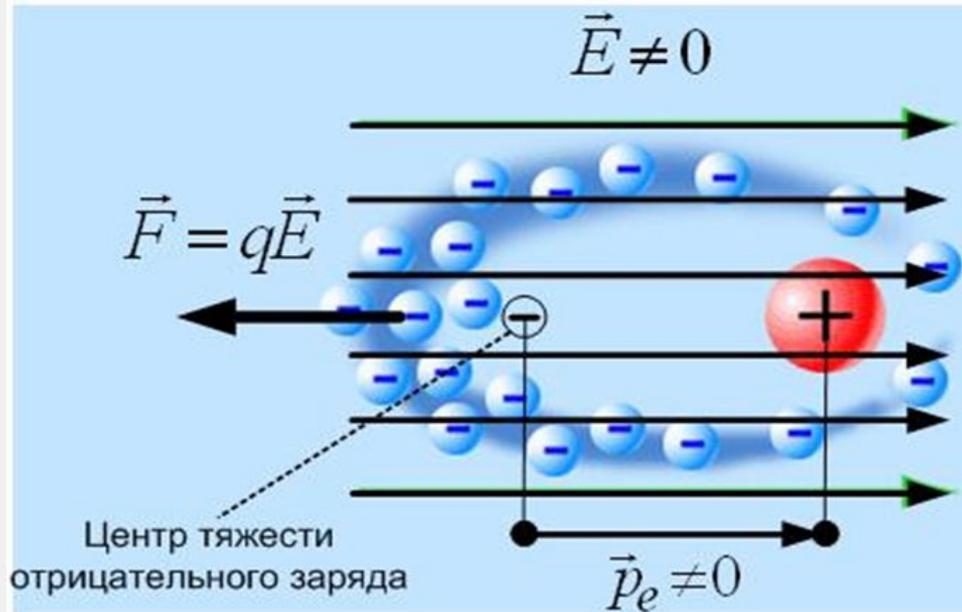
Молекулы не имеют дипольного момента, так как центр тяжести отрицательных зарядов электронов совпадает с центром тяжести положительных ядер:  $\vec{p}_e = 0$

Вещества с симметричными молекулами, например,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ .



## Диэлектрики с неполярными молекулами Электронная поляризация

Во внешнем электрическом поле отрицательное электронное облако молекулы смещается против поля, центры тяжести положительных и отрицательных зарядов расходятся, и молекула приобретает дипольный момент, направленный по полю:

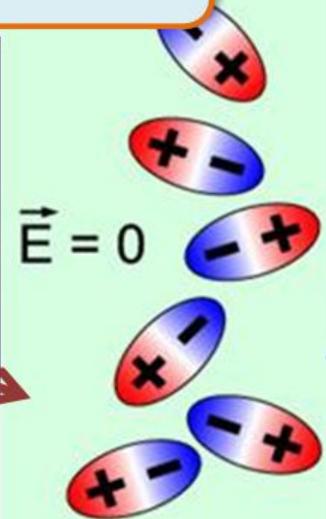


# Диэлектрики с полярными молекулами

## Ориентационная поляризация

Молекула обладает дипольным моментом в отсутствие внешнего поля ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{SO}_2$ ):  $\vec{p}_e \neq 0$

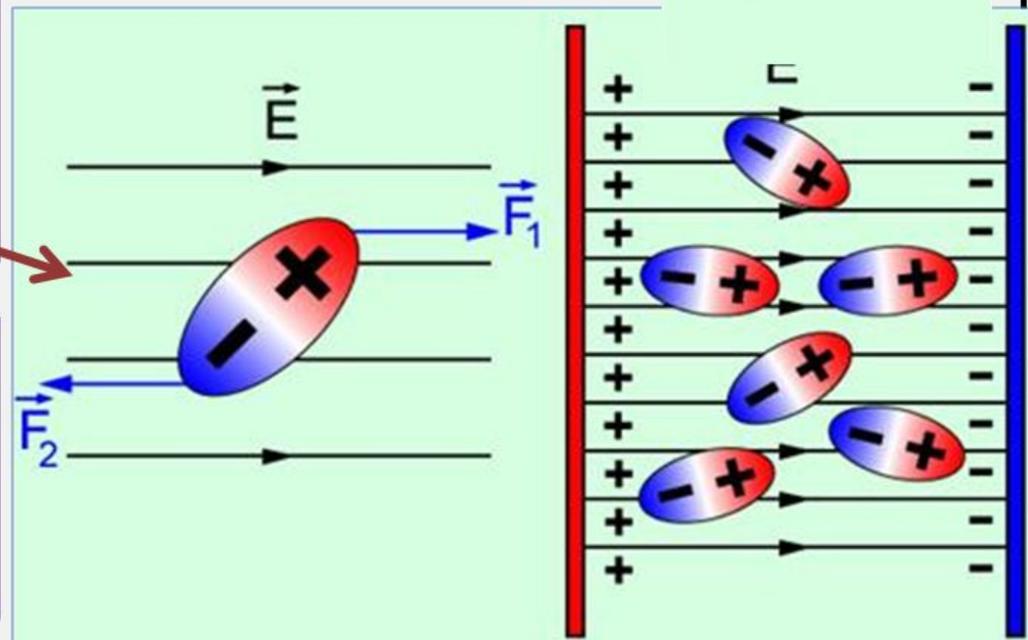
Молекулы-диполи ориентированы хаотично  $\rightarrow$  в целом вещество не обладает дипольным моментом (не поляризовано)



Во внешнем поле на молекулы-диполи действует вращающий момент силы, поворачивающий молекулы по полю

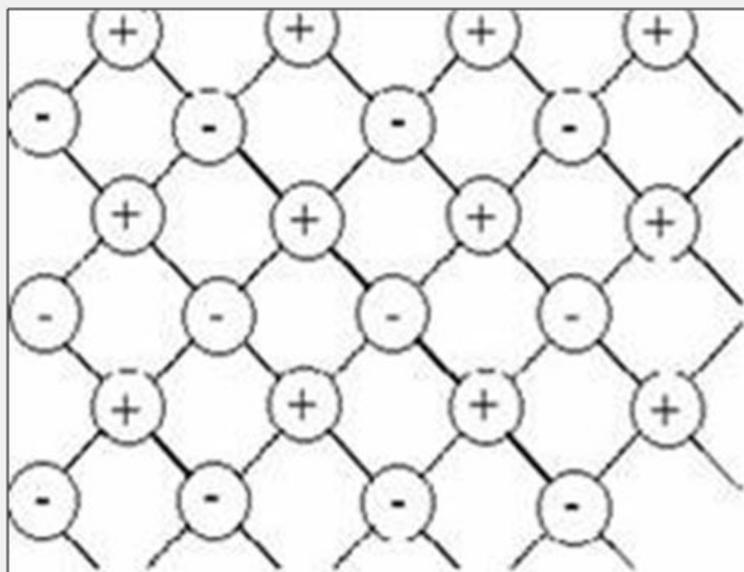
$$\vec{M} = [\vec{p}_e \times \vec{E}]$$

Из-за теплового движения полной ориентации молекул-диполей по полю нет

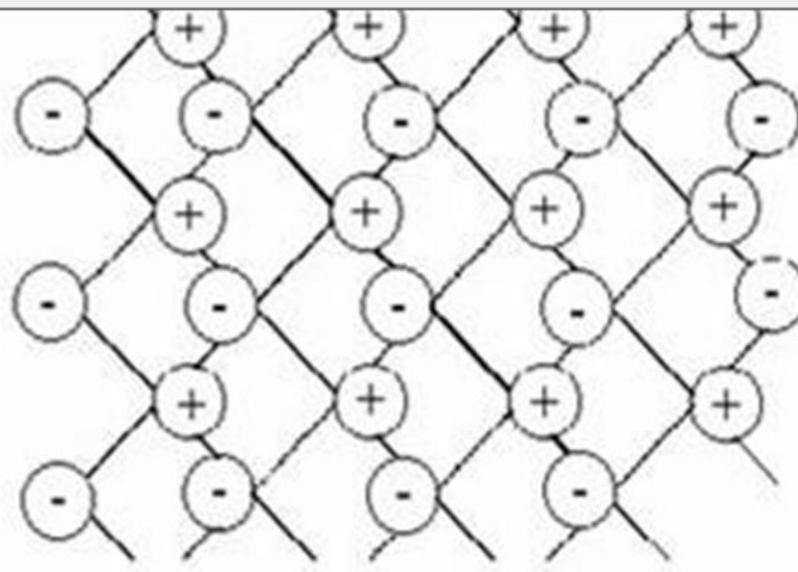


## Ионные диэлектрики и ионная поляризация

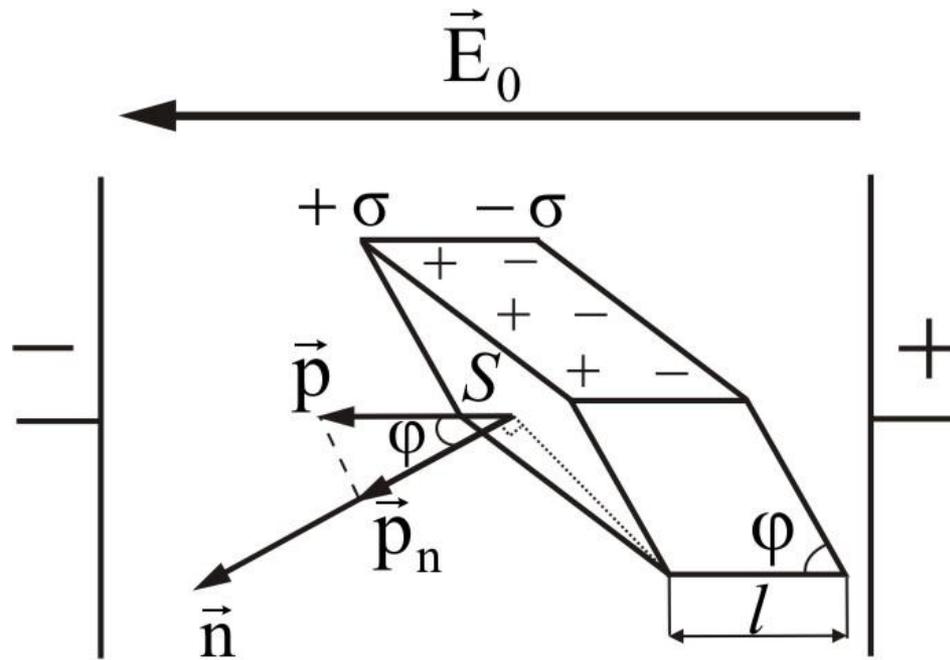
В твёрдых диэлектриках с ионной кристаллической решёткой (например,  $NaCl$ ) ионы во внешнем поле слегка смещаются в противоположные стороны: положительные – по полю, отрицательные – против поля



$$\vec{E} = 0$$



$$\vec{E} \neq 0$$



- Поместим диэлектрик в виде параллелепипеда в электростатическое поле  $E_0$
- Электрический дипольный момент тела:  $p_e = ql = \sigma' Sl$
- Нормальная составляющая  $p_n$   $p_{en} = \sigma' Sl \cos \varphi$
- $\sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов.

- Введем новое понятие – **поляризованность (вектор поляризации) – электрический дипольный момент единичного объема.**

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_{e_i}}{\Delta V}$$

$$\mathbf{p}_{e_i}$$

- – электрический дипольный момент  $i$ -ой молекулы.

- С учетом этого обстоятельства,

$$p = P V = P S l \cos(\varphi.к. \quad V = S l \cos \varphi$$

объем параллелепипеда).

- Сравним с полученным ранее

$$p_n = \sigma' S l \cos \varphi$$

и учтем, что  $P \cos \varphi = P_n$  – проекция  
на направление  $\vec{e}$  – вектора нормали,

$\vec{n}$

- тогда

$$\sigma' = P_n$$

$$\sigma' = P_n$$

- **Поверхностная плотность** поляризованных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.
- Отсюда следует, что **индуцированное в диэлектрике электростатическое поле  $E'$**  будет влиять только на нормальную составляющую вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ .

# Электрический диполь

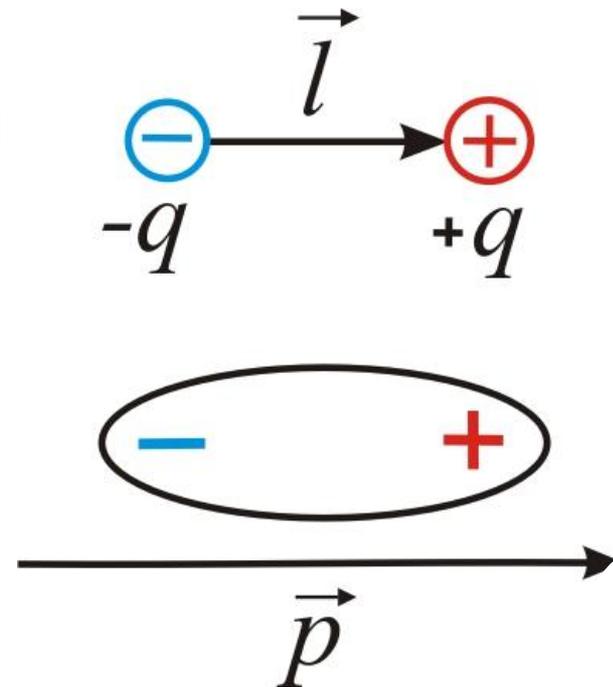
**Электрический диполь** – система из двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга.

**Электрический дипольный момент:**

$$\vec{p} = ql$$

$$[Кл \cdot м]$$

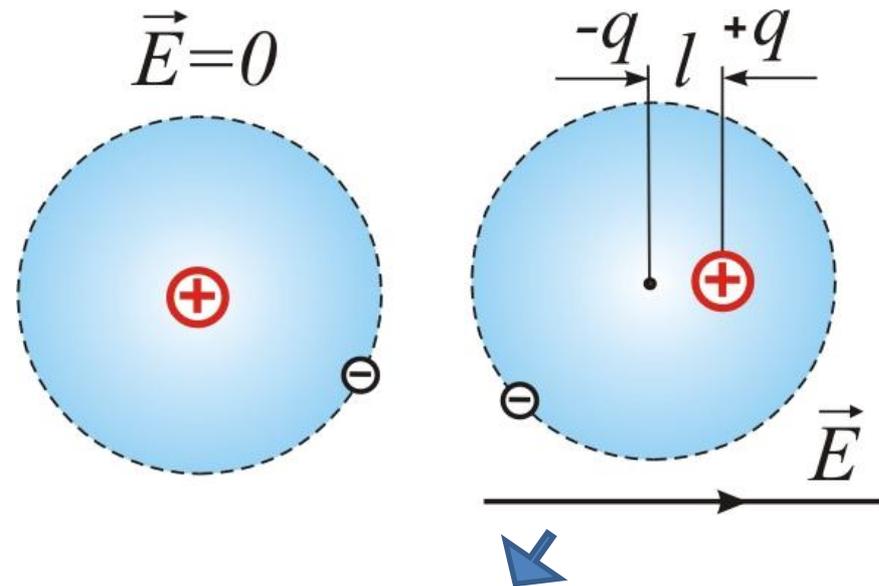
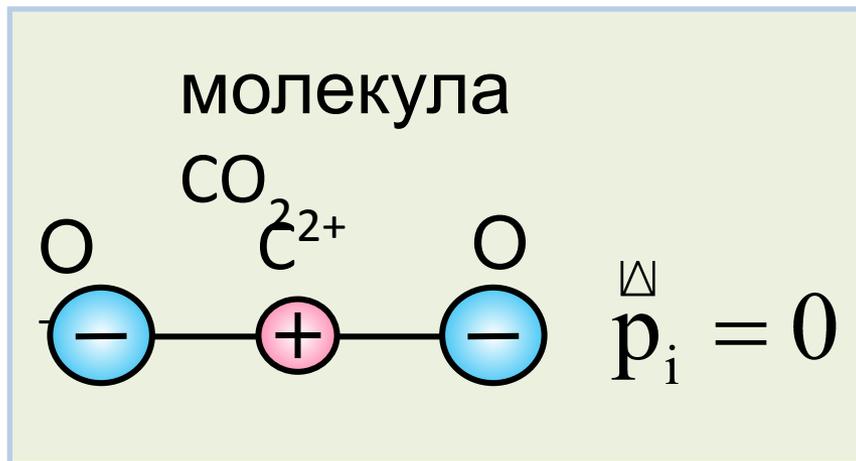
$l$  – плечо диполя



# Электронный механизм

## поляризации

Неполярные молекулы - симметричные молекулы ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{N}_2$ , Ar, Ne), в которых центры положительных и отрицательных зарядов совпадают.



В электрическом поле неполярные молекулы превращаются в диполи, из-за смещения электронной оболочки под действием поля.

# Электронный механизм поляризации

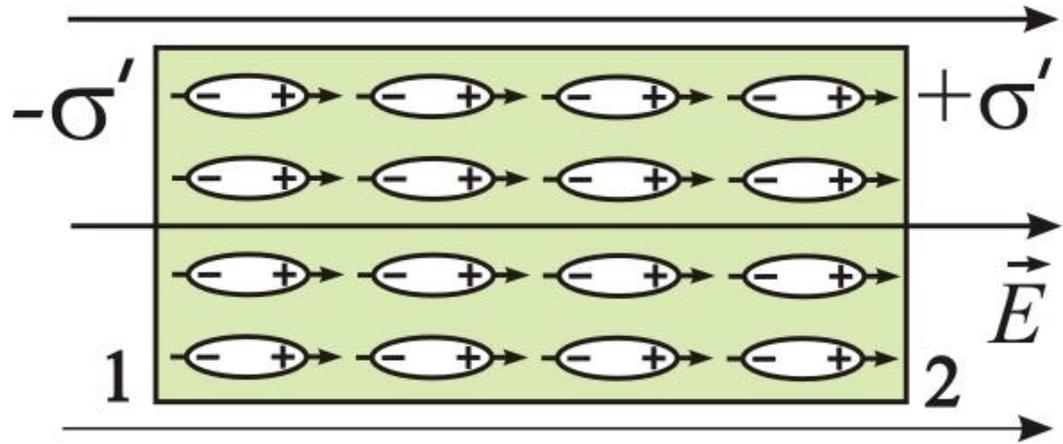
В отсутствие электрического поля:

$$\sum_{\Delta V}^{\forall} p_i = 0$$

В электрическом поле: диполи ориентированы  
одинаково.

↓

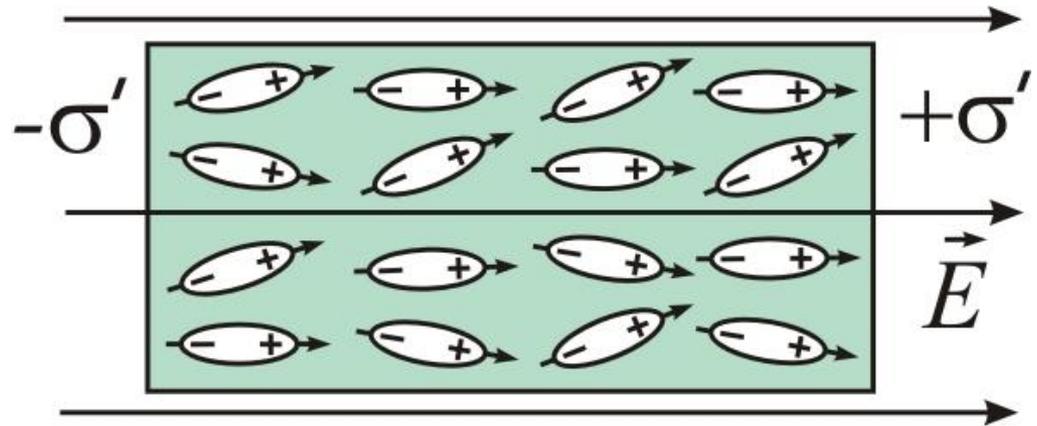
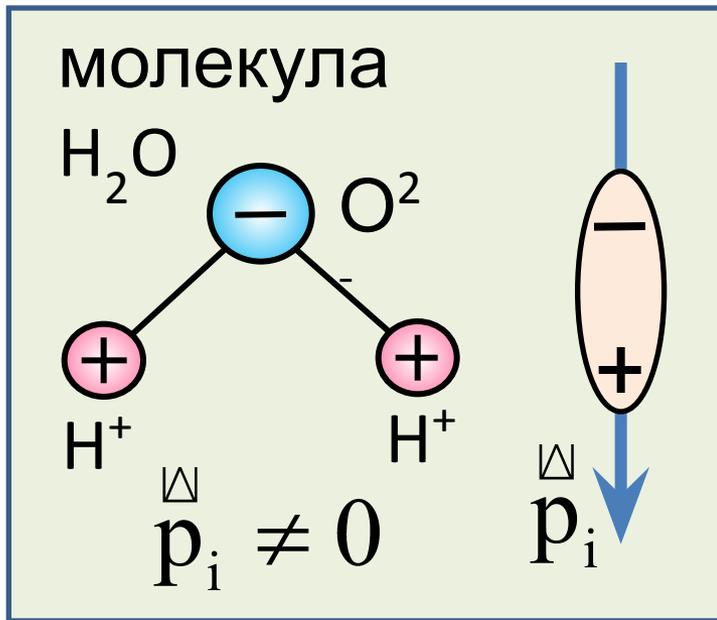
$$\sum_{\Delta V}^{\forall} p_i \neq 0$$



$$\pm\sigma' \pm\sigma'$$

# ОРИЕНТАЦИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Полярные молекулы - несимметричные молекулы ( $\text{CO}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{HF}$ ,  $\text{HCl}$ ), в которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга.



$$\vec{E} = 0 \rightarrow \sum \text{p}_i = 0$$

$$\vec{E} \neq 0 \rightarrow \sum_{\Delta V} \text{p}_i \neq 0$$

$$\text{p}_i = 10^{-29} - 10^{-30}$$

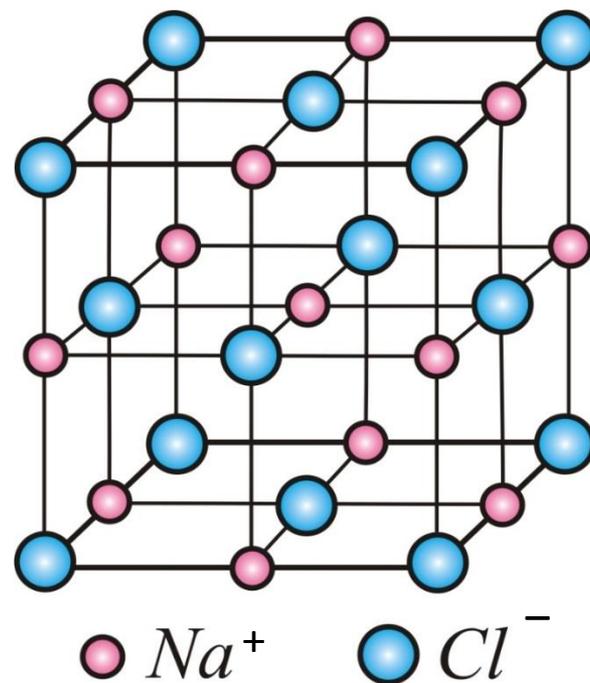
Кл · м

# Ионный механизм

**Ионные кристаллы** – кристаллы (KF, KCl, NaCl), состоящие из чередующихся ионов противоположного знака.

Такой кристалл можно рассматривать как две кристаллические подрешетки, состоящие из ионов одного знака, вставленные друг в друга.

- В электрическом поле эти решетки смещаются в противоположные стороны.



# Поляризация диэлектриков

Вне зависимости от механизма, процесс поляризации сопровождается:

• явлением связанных зарядов на противоположных поверхностях и не скомпенсированным дипольным моментом:

$$\sum_{\Delta V} \overset{\Delta V}{p}_i \neq 0$$

• связанные заряды создают свое электрическое поле  $E'$ , противоположное внешнему полю:

$$\overset{\Delta V}{E}' \uparrow \downarrow \overset{\Delta V}{E} \rightarrow$$

• напряженность поля внутри диэлектрика меньше, чем напряженность внешнего поля.

# Описание поля в диэлектриках

**Вектор поляризованности** - суммарный дипольный момент, приходящийся на единицу объема вещества:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i \quad [1] \quad [\text{Кл/м}^2]$$

**Опыт:** У изотропных однородных диэлектриков любого типа поляризованность связана с напряженностью поля в той же точке соотношением:

$$\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad [2]$$

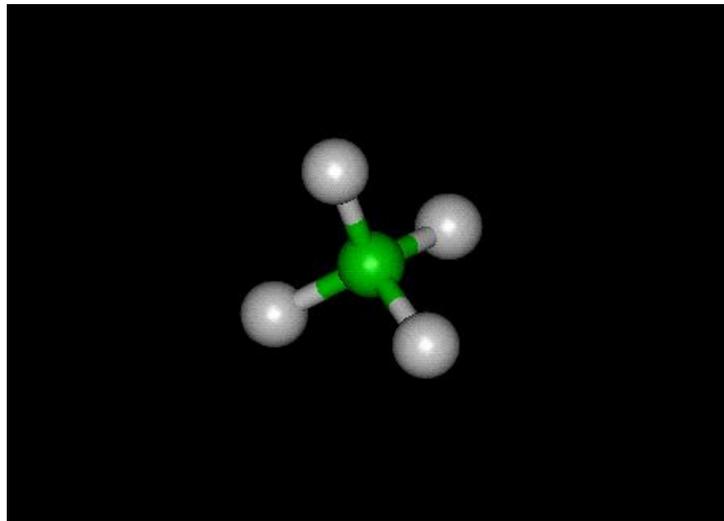
$\varepsilon$  – **относительная диэлектрическая восприимчивость** (безразмерная величина) –

# Диэлектрики

- **Диэлектрики (изоляторы)** – это вещества, которые ввиду отсутствия в них свободных зарядов, которые могут быть носителями тока, не проводят электрический ток.
- В качестве простой модели, удобной для выяснения основных свойств диэлектриков, рассмотрим диэлектрики только двух типов – вещества, состоящие из **полярных** и **неполярных** молекул.
- В любой молекуле суммарный отрицательный заряд электронов по модулю равен заряду всех входящих в ее состав атомных ядер. Каждая молекула в целом электрически нейтральна.

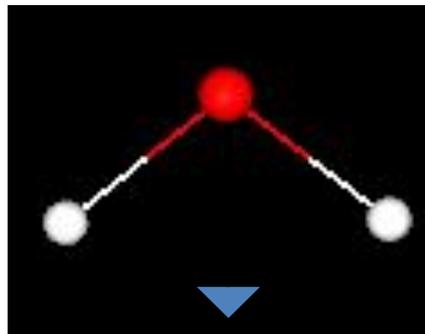
# Полярные и неполярные молекулы

- В **неполярной** молекуле пространственное распределение всех имеющихся зарядов таково, что дипольный момент молекулы  $\mathbf{p}_e = 0$ .
- Примером может служить молекула метана  $\text{CH}_4$ .



# Полярные и неполярные молекулы

- В **полярной** молекуле положительный и отрицательный заряды пространственно разнесены друг относительно друга таким образом, что дипольный момент молекулы отличен от нуля:  $\mathbf{p}_e \neq 0$  (показан стрелкой на рисунке).
- В качестве примера полярной молекулы можно привести несимметричную молекулу воды  $\text{H}_2\text{O}$ , в которой электроны атомов водорода смещены в направлении к атому кислорода. В результате положительный и отрицательный заряды молекулы оказываются частично разделенными в пространстве.



# Диэлектрик в отсутствие внешнего электрического поля

- Диэлектрик состоит из большого количества заряженных микрочастиц – электронов, ионов, атомных ядер.
- В отсутствие внешнего электрического поля суммарный заряд всех частиц в любом физически бесконечно малом объеме вещества равен нулю.
- Дипольный момент любого физически малого объема диэлектрика также равен нулю:
  - либо из-за того, что дипольный момент каждой молекулы равен нулю;
  - либо вследствие неупорядоченной хаотической ориентации дипольных моментов, которыми обладает полярная молекула.

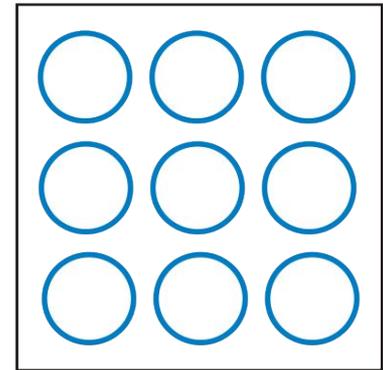
# Диэлектрик во внешнем электрическом поле

- Если поместить диэлектрик во внешнее электрическое поле, то происходит пространственное разделение положительных и отрицательных зарядов, в результате чего на поверхности и, возможно, внутри диэлектрика появляются макроскопические заряды. При этом изменяются дипольные характеристики вещества.
- Это явление называется **поляризацией диэлектрика**.
- **Поляризационными** называются макроскопические заряды, возникающие внутри и на поверхности диэлектрика под действием внешнего электрического поля, т.е. в результате поляризации.
- Поскольку поляризационные заряды не могут покинуть пределов молекулы, в состав которой они входят, они также называются **связанными зарядами**.

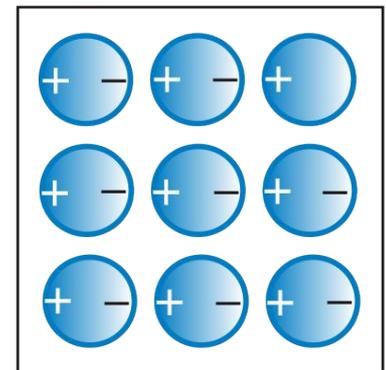
# Механизм поляризации диэлектриков, состоящих из неполярных молекул

- В отсутствие внешнего электрического поля суммарный заряд и суммарный дипольный момент каждой неполярной молекулы в целом равны нулю.
- На рисунке неполярные молекулы диэлектрика изображены белыми кружками.
- При включении внешнего электрического поля каждая молекула диэлектрика поляризуется: положительно заряженные частицы (атомные ядра) смещаются в направлении поля  $\vec{E}$ , а отрицательно заряженные частицы (электроны) – в направлении против поля. Происходит пространственное разделение зарядов разного знака.

$$\vec{E} = 0$$



$$\vec{E} \neq 0$$

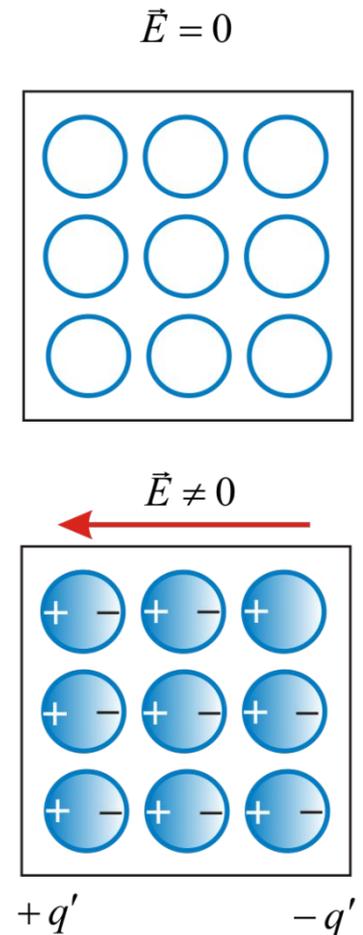


+ q'

- q'

# Механизм поляризации диэлектриков, состоящих из неполярных молекул

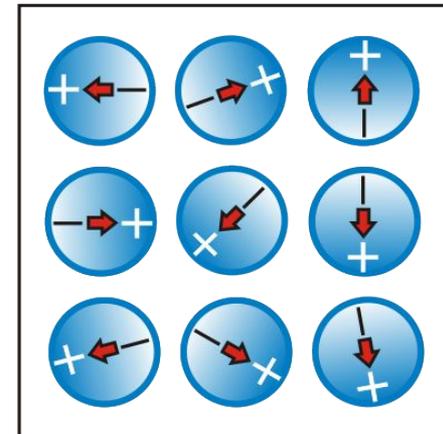
- В результате поляризации дипольный момент молекулы становится отличным от нуля.
- В этих условиях, как видно на рисунке, поверхность диэлектрика становится заряженной, возникает макроскопический заряд: та часть поверхности, в направлении которой под действием внешнего поля смещаются положительные заряды, заряжается положительно; на противоположной поверхности возникает отрицательный макроскопический заряд. Часть поверхности остается электрически нейтральной.
- Если диэлектрик *неоднородный*, то макроскопические заряды могут появиться и в его объеме.



# Механизм поляризации диэлектриков, состоящих из полярных молекул

$$\vec{E} = 0$$

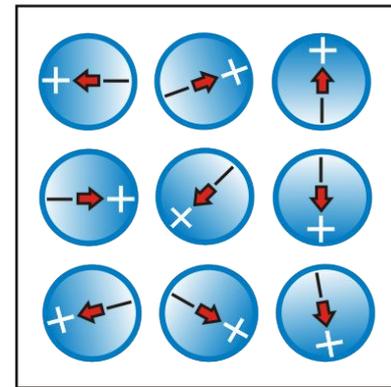
- Молекула диэлектрика в целом электрически нейтральна, однако ее положительный и отрицательный заряды распределены в пространстве таким образом, что дипольный момент молекулы отличен от нуля:  $\mathbf{p}_e \neq 0$ .
- В отсутствие внешнего электрического поля вследствие хаотического теплового движения молекул не существует преимущественного направления, вдоль которого бы ориентировались бы их дипольные моменты.
- Дипольный момент любого физически малого объема диэлектрика и всего тела в целом равны нулю.



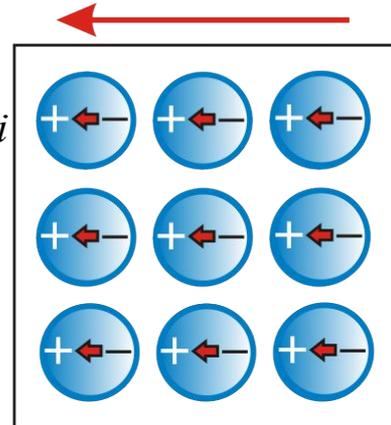
# Механизм поляризации диэлектриков, состоящих из полярных молекул

- Пусть теперь диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$ .
- Обозначим  $\mathbf{p}_{ei}$  – дипольный момент молекулы.
- Поскольку минимуму потенциальной энергии обладающей дипольным моментом системы электрических зарядов соответствует такое ее положение, в котором  $\mathbf{p}_{ei} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$ , то под действием внешнего электрического поля молекулы преимущественно ориентируются так, чтобы все  $\mathbf{p}_{ei}$  были направлены вдоль поля.
- В результате на поверхности диэлектрика образуются связанные заряды разного знака, а дипольный момент физически малого объема вещества оказывается отличным от нуля.

$$\vec{E} = 0$$



$$\vec{E} \neq 0$$



$$+q' \quad -q'$$

# Механизм поляризации диэлектриков, имеющих кристаллическую структуру

- Если диэлектрик представляет собой кристалл, то его нельзя рассматривать как систему изолированных друг от друга молекул.
- В этом случае поляризация кристаллического диэлектрика объясняется пространственным разделением положительных и отрицательных микроскопических зарядов под действием внешнего поля.
- Условно кристалл можно рассматривать как одну большую молекулу, в которой в отсутствие внешнего поля положительные и отрицательные ионы распределены в пространстве равномерно, так что суммарный заряд и дипольный момент любого физически малого объема кристалла равен нулю.

# Механизм поляризации диэлектриков, имеющих кристаллическую структуру

- При включении внешнего электрического поля положительные и отрицательные макроскопические заряды смещаются в пространстве друг относительно друга в противоположных направлениях.
- В результате возникает макроскопический поляризационный заряд, и становится отличным от нуля дипольный момент кристалла.

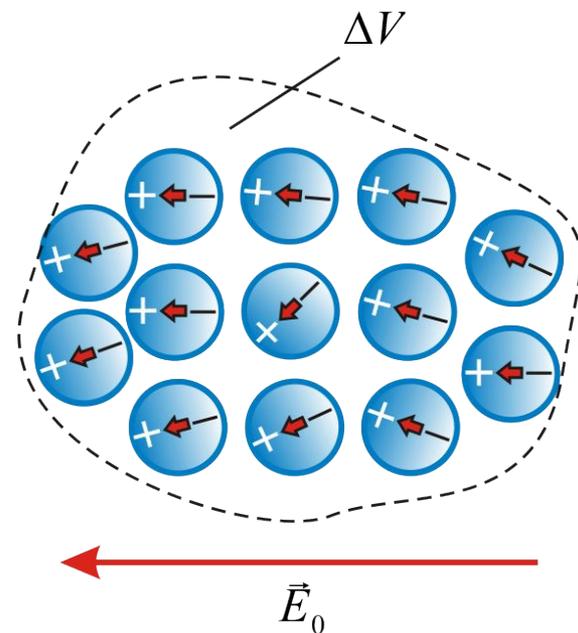
# Напряженность поля в диэлектрике

- Если учесть, что под действием внешнего электрического поля  $\mathbf{E}_0$  в диэлектрике возникают связанные макроскопические поляризационные заряды, порождающие **собственное электрическое поле**, напряженность которого обозначим через  $\mathbf{E}'$ , то электрическое поле в диэлектрике  $\mathbf{E}$  можно рассматривать как суперпозицию внешнего поля и поля поляризационных зарядов:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

# Степень поляризации

- Для количественного описания поляризации диэлектрика естественно взять дипольный момент единицы объема.
- Если внешнее поле или диэлектрик (или и то, и другое) неоднородны, степень поляризации оказывается различной в разных точках диэлектрика.
- Чтобы охарактеризовать степень поляризации в данной точке, мысленно выделяют физически малый объем  $\Delta V$ , содержащий эту точку, а затем составляют векторную сумму дипольных моментов молекул в этом объеме.



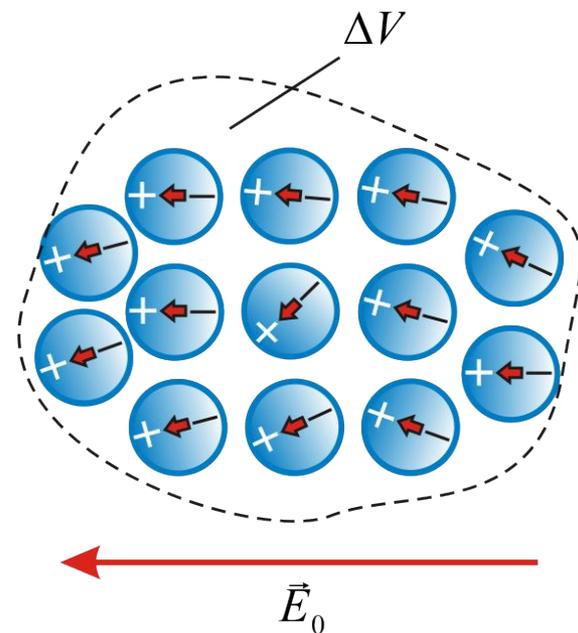
# Вектор поляризованности

- **Вектор поляризованности  $\mathbf{P}$**  – дипольный момент единицы объема вещества диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_{ei}$$

- Суммирование ведется по всем молекулам внутри объема  $\Delta V$ .

- Единица поляризованности – кулон, деленный на квадратный метр:  $[P] = \text{Кл/м}^2$ .



# Вектор поляризованности

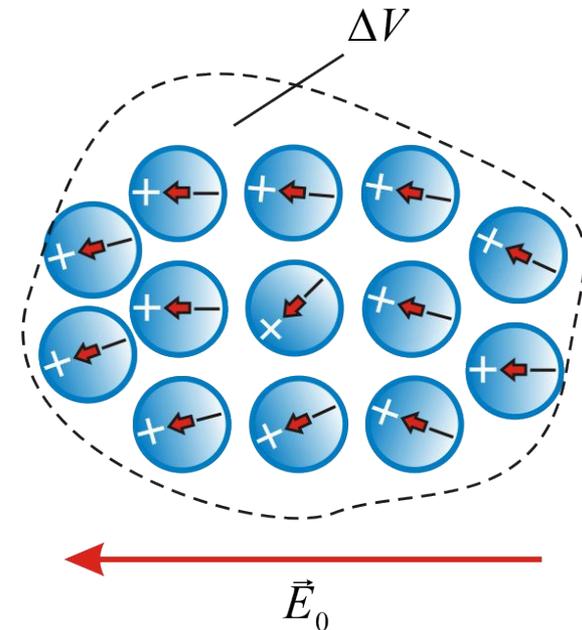
- Представим вектор поляризованности  $\mathbf{P}$  другим образом.
- Пусть в объеме  $\Delta V$  содержится  $\Delta N$  диполей. Умножим и разделим правую часть выражения для  $\mathbf{P}$  на  $\Delta N$ :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_{ei} = \frac{\Delta N}{\Delta V} \frac{\sum_i \mathbf{p}_{ei}}{\Delta N} = n \langle \mathbf{p}_e \rangle$$

- Здесь  $n = \Delta N / \Delta V$  - концентрация молекул;

$$\langle \mathbf{p}_e \rangle = \frac{\sum_i \mathbf{p}_{ei}}{\Delta N}$$

– средний дипольный момент молекулы.



$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p}_e \rangle$$

# Связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$

- Как показывает опыт, для широкого класса диэлектриков и большого круга явлений *поляризованность  $\mathbf{P}$  линейно зависит от напряженности  $\mathbf{E}$  поля в диэлектрике.*

- Если диэлектрик изотропный и  $\mathbf{E}$  не слишком велико, то

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

- Здесь  $\chi$  – безразмерная положительная величина, называемая **диэлектрической восприимчивостью** вещества. Эта величина не зависит от  $\mathbf{E}$ , она характеризует свойства самого диэлектрика.
- В дальнейшем, если специально не оговорено, будем рассматривать только

# Связь между $P$ и $E$

- Существуют, однако, диэлектрики, для которых формула

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

*неприменима*. Это некоторые ионные кристаллы и электреты, а также **сегнетоэлектрики**.

У сегнетоэлектриков связь между  $P$  и  $E$  *нелинейная* и зависит, кроме того, от предыстории диэлектрика, т.е. от предшествующих значений  $E$  (это явление называется **гистерезисом**).

# Теорема Гаусса для вектора поляризованности

- **Теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{P}$ :** *поток вектора поляризованности  $\mathbf{P}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом этой поверхностью:*

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -q'$$

# Теорема Гаусса для вектора поляризованности в дифференциальной форме

- В дифференциальной форме теорема Гаусса для вектора поляризованности имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} P = -\rho'$$

- т.е. дивергенция вектора поляризованности  $\mathbf{P}$  равна с обратным знаком объемной плотности избыточного связанного заряда в той же точке.

# Когда в диэлектрике $\rho' = 0$

- Можно показать, что *объемная плотность связанных зарядов  $\rho'$  внутри диэлектрика будет равна нулю при одновременном выполнении следующих условий:*
  - *диэлектрик должен быть однородным;*
  - *внутри него не должно быть сторонних зарядов ( $\rho = 0$ )*

Т.о., если в произвольное электрическое поле поместить однородный изотропный диэлектрик какой угодно формы, можно быть уверенным, что при его поляризации появятся только поверхностные связанные заряды, объемные связанные же заряды во всех его точках будут равны нулю.

# Вектор электрического смещения

- Как известно, источниками электрического поля  $\mathbf{E}$ , в том числе, и внутри диэлектрика, являются все электрические заряды – и сторонние, и связанные. Поэтому теорему Гаусса можно переписать так:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q + q'}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q + q'$$

- Здесь  $q$  и  $q'$  - соответственно сторонние и связанные заряды, охватываемые поверхностью  $S$ . Появление связанных зарядов (*их распределение часто неизвестно*) усложняет дело и эта формула оказывается непригодной для расчета поля  $\mathbf{E}$  в диэлектрике даже при достаточно хорошей симметрии.

# Вектор электрического смещения

- Это затруднение, однако, можно обойти, если выразить заряд  $q'$  через поток вектора  $\mathbf{P}$ . Преобразуем последнее выражение:

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q + q' \Leftrightarrow \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

⊠

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q$$

- Обозначим величину, стоящую под интегралом в скобках, буквой  $\mathbf{D}$  (*вспомогательный вектор* – **вектор электрического смещения**, или **электрическая индукция**):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

# Теорема Гаусса для вектора электрического смещения

- Таким образом, *поток вектора  $\mathbf{D}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью:*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

- Данное утверждение и есть **теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$** .
- Этот вектор представляет собой сумму двух совершенно разных величин:  $\mathbf{P}$  и  $\epsilon_0 \mathbf{E}$ , поэтому он действительно **вспомогательный вектор**, не имеющий какого-либо глубокого физического смысла. Однако, во многих случаях он значительно упрощает изучение поля в диэлектриках.

- Соотношение  $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \epsilon_0 \mathbf{E}$ , а также теорема Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$  справедливы для любого диэлектрика, как изотропного, так и анизотропного.
- Размерность вектора  $\mathbf{D}$  та же, что и вектора  $\mathbf{P}$ . Единицей величины  $\mathbf{D}$  служит *кулон на квадратный метр* (Кл/м<sup>2</sup>).

# Связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ для изотропного диэлектрика

- В случае изотропного диэлектрика поляризованность  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

- Подставим это выражение в формулу для вектора  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$$

Здесь  $\varepsilon = 1 + \chi$  – диэлектрическая проницаемость вещества.  
Для всех веществ  $\varepsilon > 1$ , для вакуума  $\varepsilon = 1$ . Значения  $\varepsilon$  зависят от природы диэлектрика и колеблются в диапазоне от  $\sim 1$  (газы) до  $10^5$  (некоторые керамики). Для воды  $\varepsilon = 81$ .

# Связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$

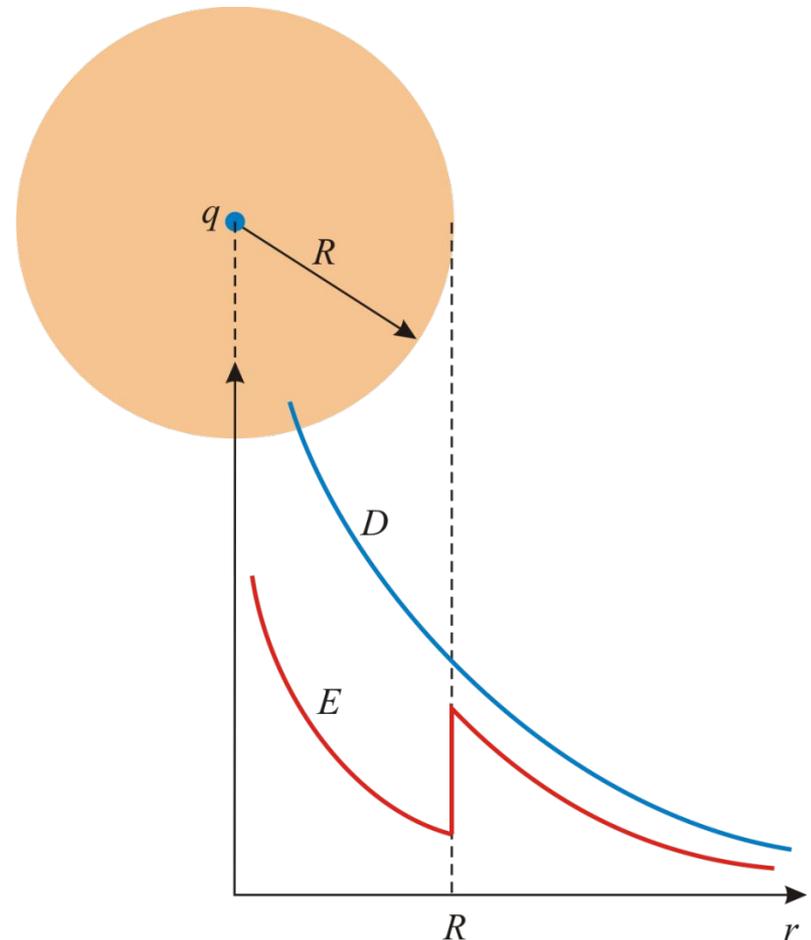
- Из формулы  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$  видно, что для изотропных диэлектриков векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  коллинеарны. В анизотропных диэлектриках эти вектора, вообще говоря, не коллинеарны.
- Поле вектора  $\mathbf{D}$  можно представить графически в виде силовых линий: эти линии начинаются только на положительных *сторонних* зарядах и заканчиваются только на отрицательных *сторонних* зарядах.
- Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\mathbf{D}$  проходят, не прерываясь.

# Пример

- Точечный сторонний заряд  $q$  находится в центре шара радиусом  $R$  из однородного изотропного диэлектрика. Найдем напряженность  $E$  поля как функцию расстояния  $r$  от центра шара.
- Поскольку нам не известен связанный заряд на поверхности шара, воспользуемся теоремой Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$ :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \cdot 4\pi r^2 \cdot q \Rightarrow D_r = \frac{q}{4\pi r^2};$$

$$E_r = \begin{cases} \frac{D_r}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, & r < R; \\ \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}$$



# Условия на границе

- Рассмотрим поведение векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  сначала на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков. Пусть на границе раздела находится поверхностный сторонний заряд.
- Искомые условия можно получить с помощью двух основных теорем электростатики: **теоремы Гаусса** и **теоремы о циркуляции**:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q;$$
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

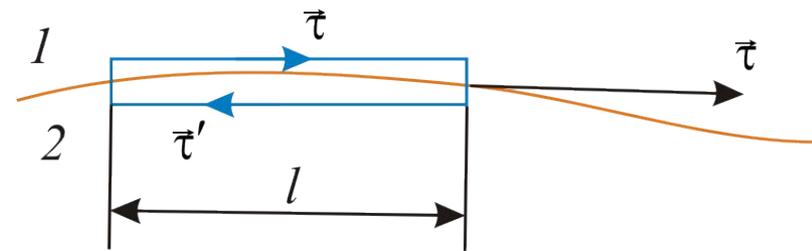
# Граничные условия для вектора напряженности электрического поля

- Пусть поле вблизи границы раздела в диэлектрике 1 равно  $\mathbf{E}_1$ , а в диэлектрике 2 –  $\mathbf{E}_2$ .
- Возьмем небольшой вытянутый прямоугольный контур, ориентируя его так, как показано на рисунке. Пусть стороны контура имеют такую длину, что в ее пределах  $\mathbf{E}_{1,2} = \text{const}$ , а высота контура пренебрежимо мала. Тогда по теореме о циркуляции

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{2\tau}l + E_{1\tau'}l = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = 0$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}$$

т.е. тангенциальная составляющая  $\mathbf{E}$  одинакова по обе стороны границы раздела



# Граничные условия для вектора электрического смещения

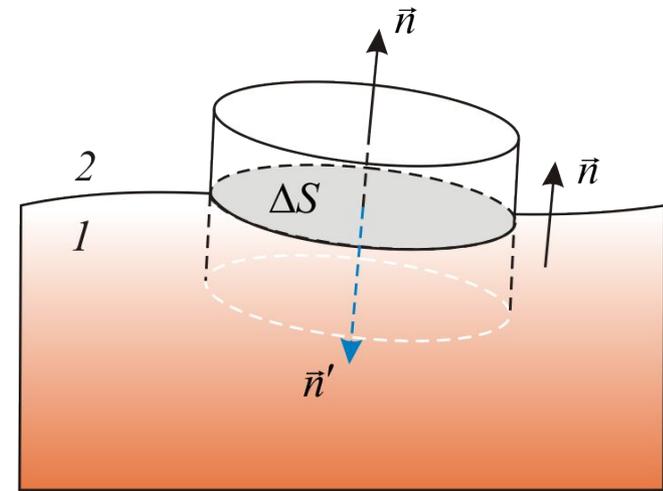
- Возьмем цилиндр очень малой высоты, расположив его по обе стороны границы раздела двух диэлектриков. Сечение цилиндра должно быть таким, чтобы в пределах каждого торца площадью  $\Delta S$  вектор  $\mathbf{D}_{1,2} = \text{const}$ .
- Тогда по теореме Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{2n} \Delta S + D_{1n'} \Delta S = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = \sigma \Delta S$$

- Здесь  $\sigma$  – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела. Тогда

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

- Если же сторонних зарядов на границе раздела нет, то  $D_{1n} = D_{2n}$ .



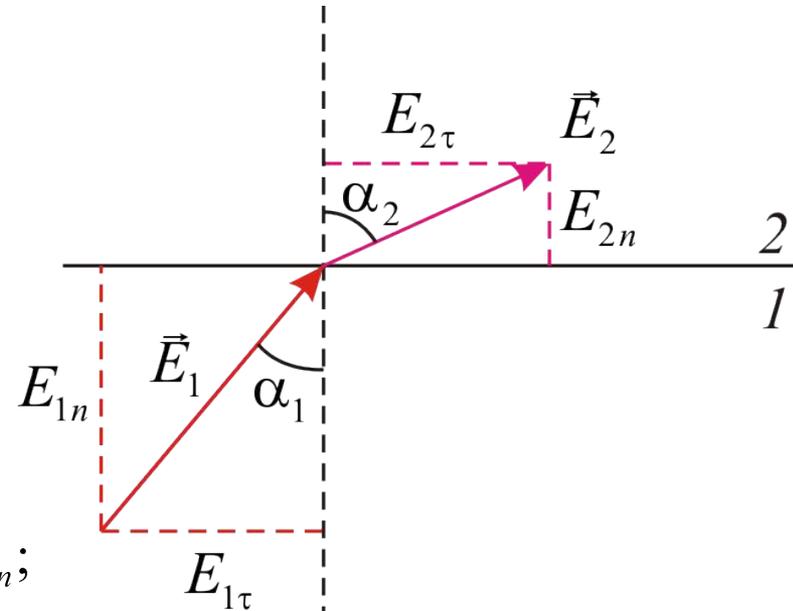
Т.о. нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$ , вообще говоря, испытывает скачок при переходе границы раздела.

# Преломление линий вектора напряженности электрического поля

- Полученные условия для составляющих векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  на границе раздела двух диэлектриков, означают, что *линии этих векторов испытывают на этой границе излом, т.е. преломляются.*
- Найдем соотношение между углами преломления  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .
- Если сторонних зарядов на границе нет, то

$$D_{2n} = D_{1n} \Leftrightarrow \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n} \Leftrightarrow \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n};$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$



- Тогда 
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau} / E_{2n}}{E_{1\tau} / E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Это означает, что в диэлектрике с большим значением  $\varepsilon$  линии  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  будут составлять больший угол с нормалью к границе раздела.

# Условие на границе проводник - диэлектрик

- Если  $1$  – проводник, а среда  $2$  – диэлектрик, то из формулы, определяющей соотношение между нормальными составляющими  $\mathbf{D}$  следует, что

$$D_n = \sigma$$

- Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя по отношению к проводнику нормаль. Эту формулу можно легко получить, если учесть, что поле внутри проводника отсутствует.

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

# Связанный заряд у поверхности проводника

- Если к заряженному участку поверхности проводника прилегает однородный диэлектрик, то на границе этого диэлектрика с проводником выступают связанные заряды некоторой плотности  $\sigma'$  (при этом объемная плотность  $\rho'$  связанного заряда в диэлектрике равна нулю).
- Применим теорему Гаусса для вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_{n2} \Delta S - 0 \cdot \Delta S = \frac{(\sigma + \sigma') \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \frac{D_n}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

Видно, что поверхностная плотность  $\sigma'$  связанного заряда в диэлектрике однозначно связана с поверхностной плотностью  $\sigma$  стороннего заряда на проводнике, причем знаки этих зарядов противоположны.

## Электростатическое поле в диэлектрике

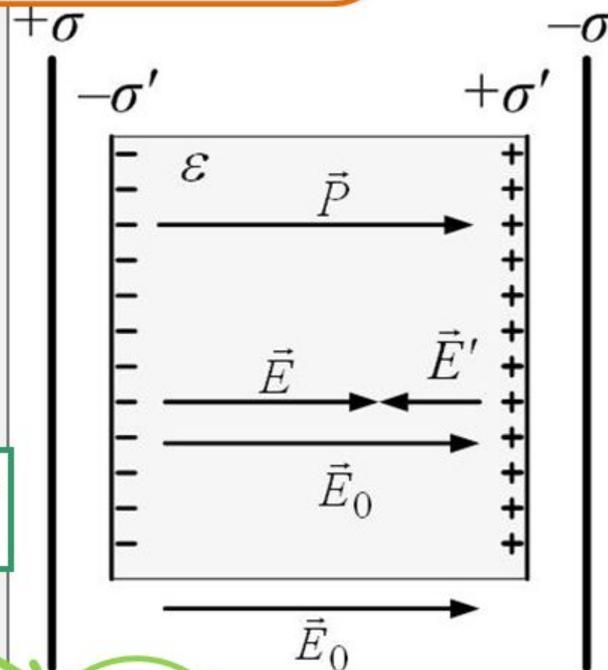
Полное поле в диэлектрике:

$$E = E_0 - E'$$

$$P = \sigma'$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \mathcal{N} \cdot \vec{E}$$



$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\mathcal{N} \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \mathcal{N} E$$

$$E = E_0 - \mathcal{N} E$$

$\Rightarrow$

$$E(1 + \mathcal{N}) = E_0$$

# Различные виды диэлектриков

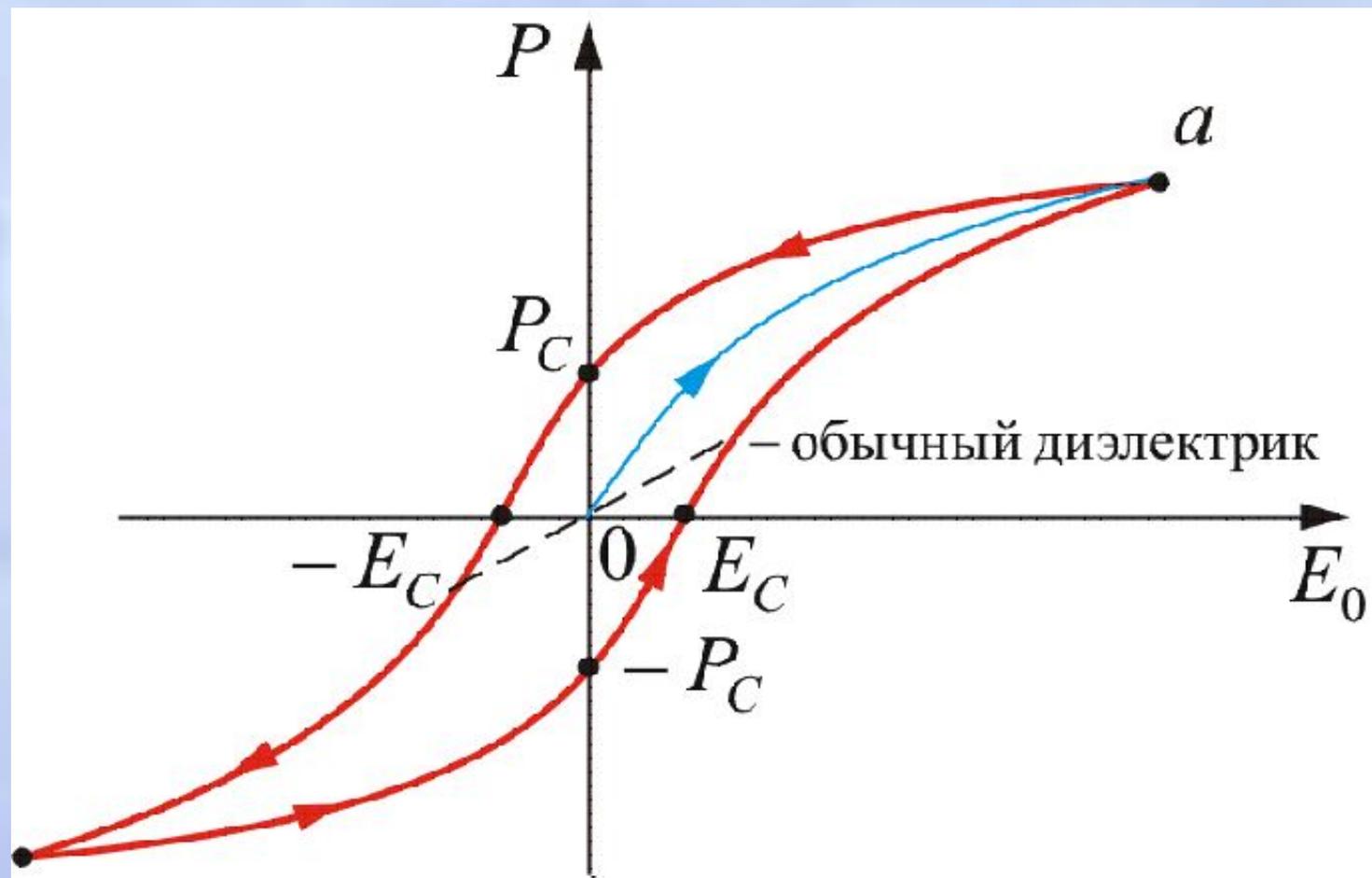
- В 1920 г. была открыта **спонтанная** (самопроизвольная) **поляризация**.
- Всю группу веществ, называли **сегнетоэлектрики** (или *ферроэлектрики*).
- Все сегнетоэлектрики обнаруживают резкую анизотропию свойств (сегнетоэлектрические свойства могут наблюдаться только вдоль одной из осей кристалла). У изотропных диэлектриков поляризация всех молекул одинакова, у анизотропных – поляризация, и следовательно, вектор поляризации в разных направлениях разные.

- **Основные свойства сегнетоэлектриков:**

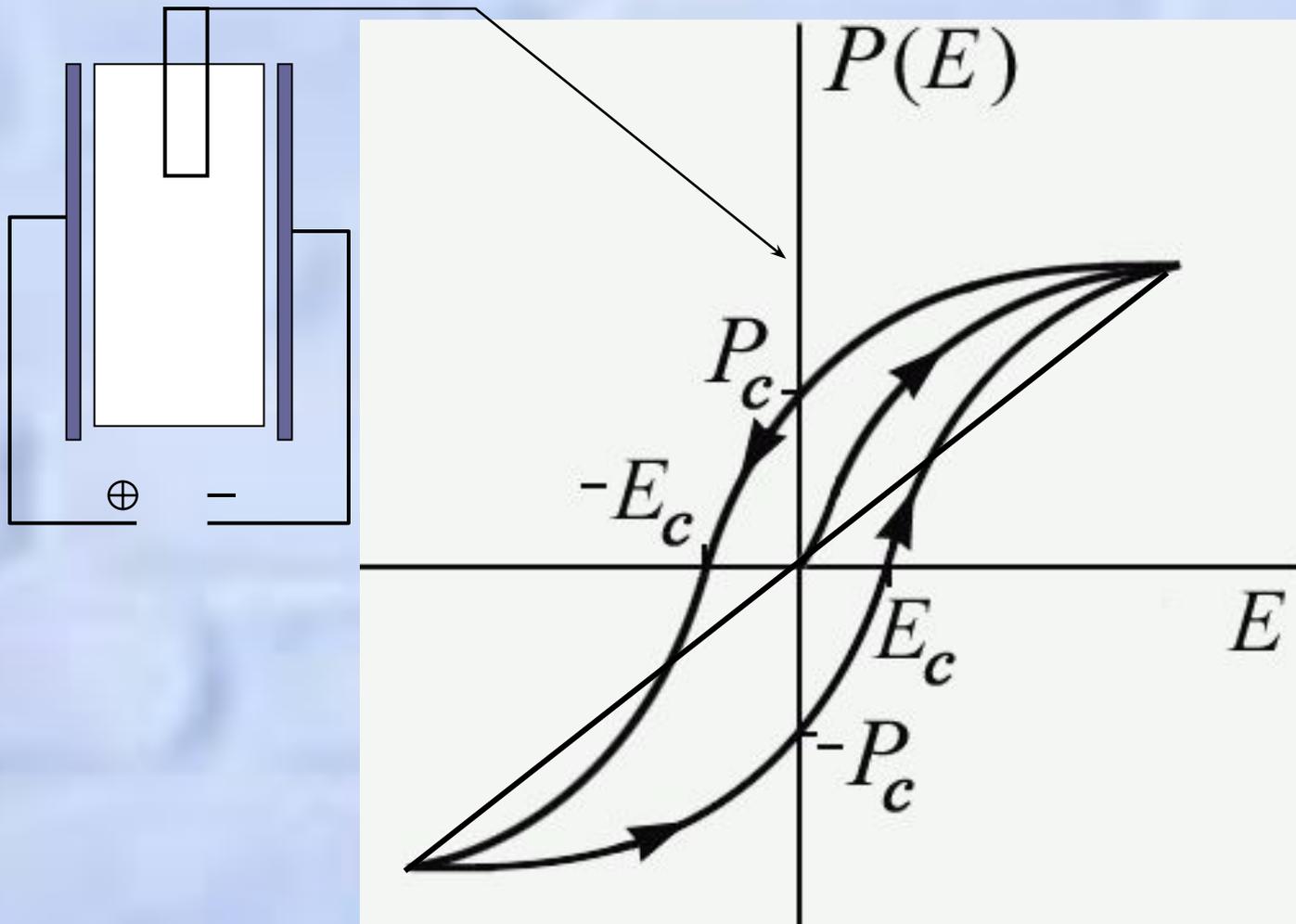
- 1. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  в некотором температурном интервале велика ( $\epsilon \sim 10^3 - 10^4$ )
- 2. Значение  $\epsilon$  зависит не только от внешнего поля  $E_0$ , но и от предыстории образца.
- 3. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (а следовательно, и  $P$ ) – нелинейно зависит от напряженности внешнего электростатического поля (*нелинейные диэлектрики*).

- 4. Наличие точки Кюри – температуры, при которой (и выше) сегнетоэлектрические свойства пропадают. При этой температуре происходит фазовый переход 2-го рода. Например,
  - титанат бария:  $133^{\circ}\text{C}$ ;
  - сегнетова соль:  $-18 + 24^{\circ}\text{C}$ ;
  - ниобат лития  $1210^{\circ}\text{C}$ .

- Нелинейная поляризация диэлектриков называется *диэлектрическим гистерезисом*
- Здесь точка *a* – состояние насыщения.

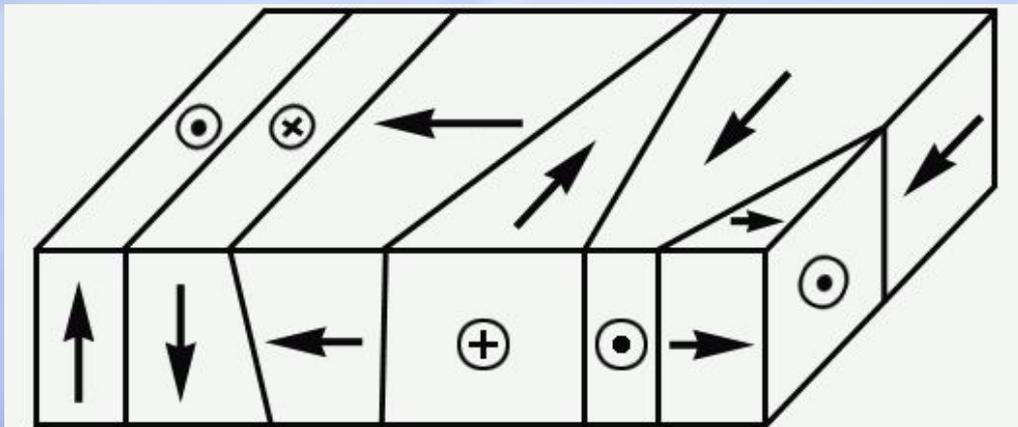


$E_c$  – коэрцитивная сила,  $P_c$  – остаточная поляризация



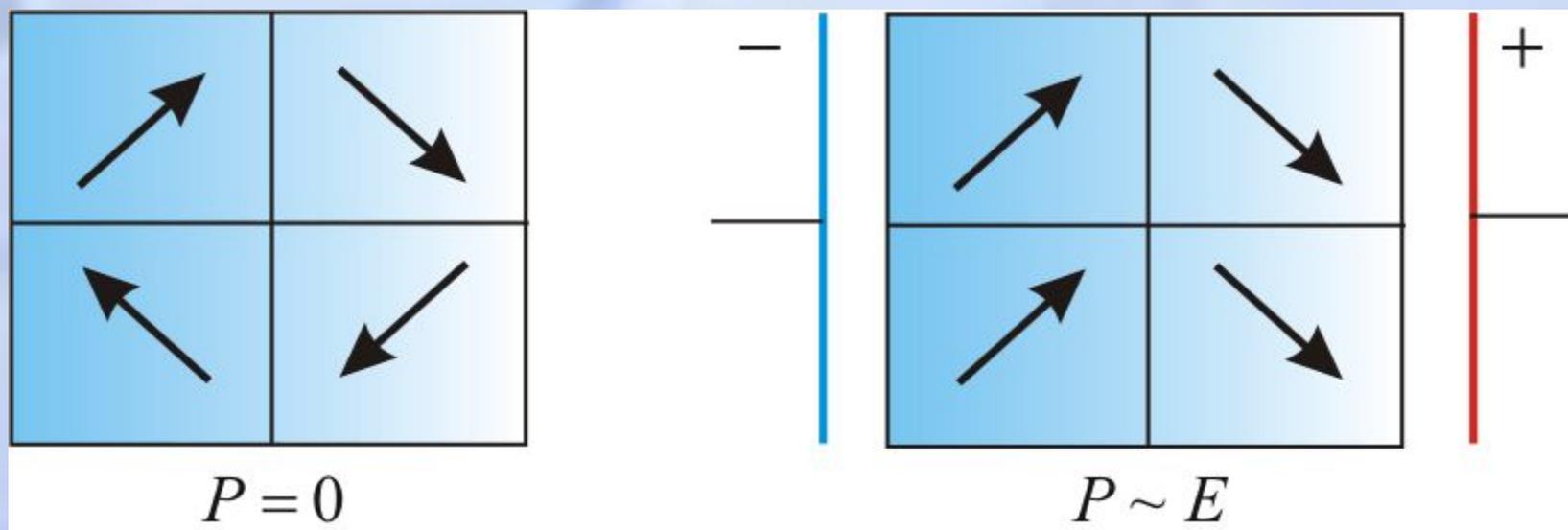
Кривая поляризации сегнетоэлектрика – петля гистерезиса.  $E_c$  – коэрцитивная сила,  $P_c$  – остаточная поляризация сегнетоэлектрика.

Сегнетоэлектрики состоят из доменов – областей с различными направлениями поляризации. В отсутствии поля суммарный дипольный момент практически отсутствует. Под действием электрического поля  $E$  доменные границы смещаются так, что объем доменов, поляризованных по полю, увеличивается за счет доменов, поляризованных против поля.



Изображение доменов тетрагональной модификации  $\text{BaTiO}_3$ . Стрелки указывают направление вектора поляризации

- Стремление к минимальной потенциальной энергии и наличие дефектов структуры приводит к тому, что сегнетоэлектрик разбит на **домены**



В сильном электрическом поле кристалл становится однодоменным. После выключения электрического поля образец остается поляризованным.  $P_c$  – остаточная поляризация.

Чтобы суммарные объемы доменов противоположного знака сравнялись, необходимо приложить поле противоположного направления  $E_c$  – коэрцитивное поле.

- Среди диэлектриков есть вещества, называемые **электреты** – диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электростатического поля (аналоги постоянных магнитов).

# Пьезоэлектрики

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электрического поля, но и под действием механической деформации. Это явление называется ***пьезоэлектрическим эффектом***.

- Явление открыто братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 году.

# Пьезоэлектрики

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электрического поля, но и под действием механической деформации. Это явление называется ***пьезоэлектрическим эффектом***.

- Явление открыто братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 году.



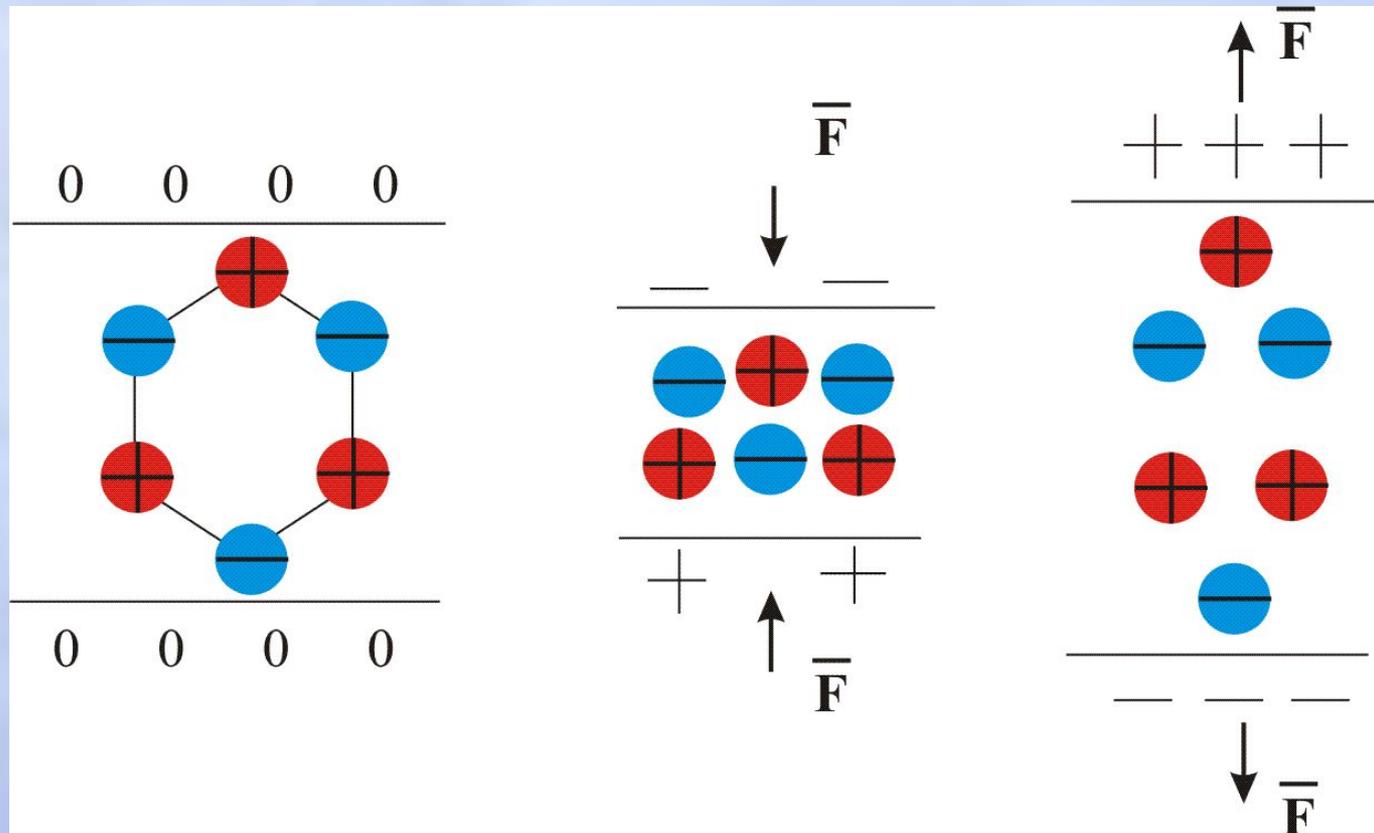
## Кюри, Пьер

(15.V.1859 г. – 19.IV.1906)

Помимо Нобелевской премии, Кюри был удостоен еще нескольких наград и почетных званий, в том числе медали Дэви Лондонского королевского общества (1903) и золотой медали Маттеуччи Национальной Академии наук Италии (1904). Он был избран во Французскую академию наук (1905). В честь Пьера и Марии Кюри назван искусственный химический элемент — кюрий.

Если на грани кристалла наложить металлические электроды (обкладки) то при деформации кристалла на обкладках возникнет разность потенциалов.

Если замкнуть обкладки, то потечет ток.



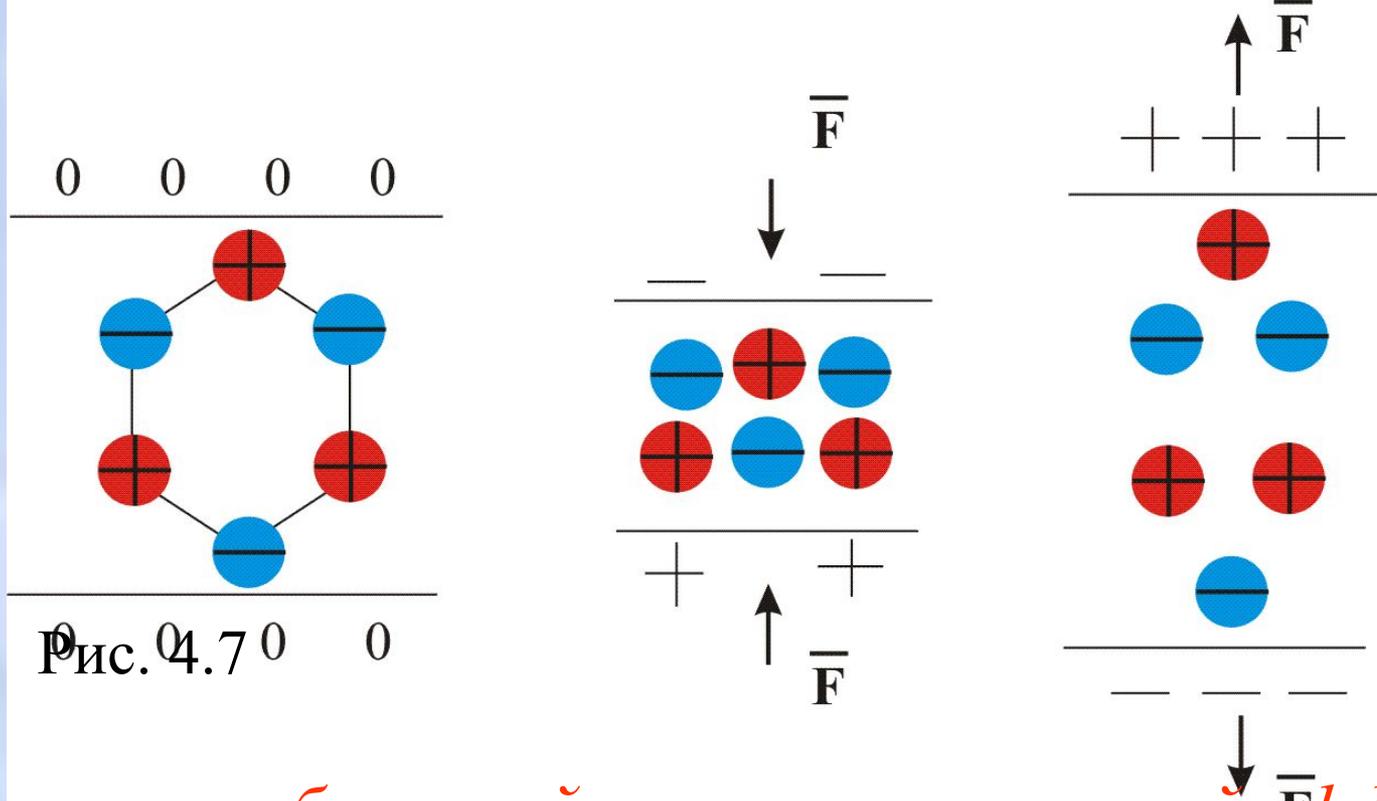


Рис. 4.70

*Возможен и обратный пьезоэлектрический эффект:*

- Возникновение поляризации сопровождается механическими деформациями.
- Если на пьезоэлектрический кристалл подать напряжение, то возникнут механические деформации кристалла, причем, деформации будут пропорциональны приложенному электрическому полю  $E$

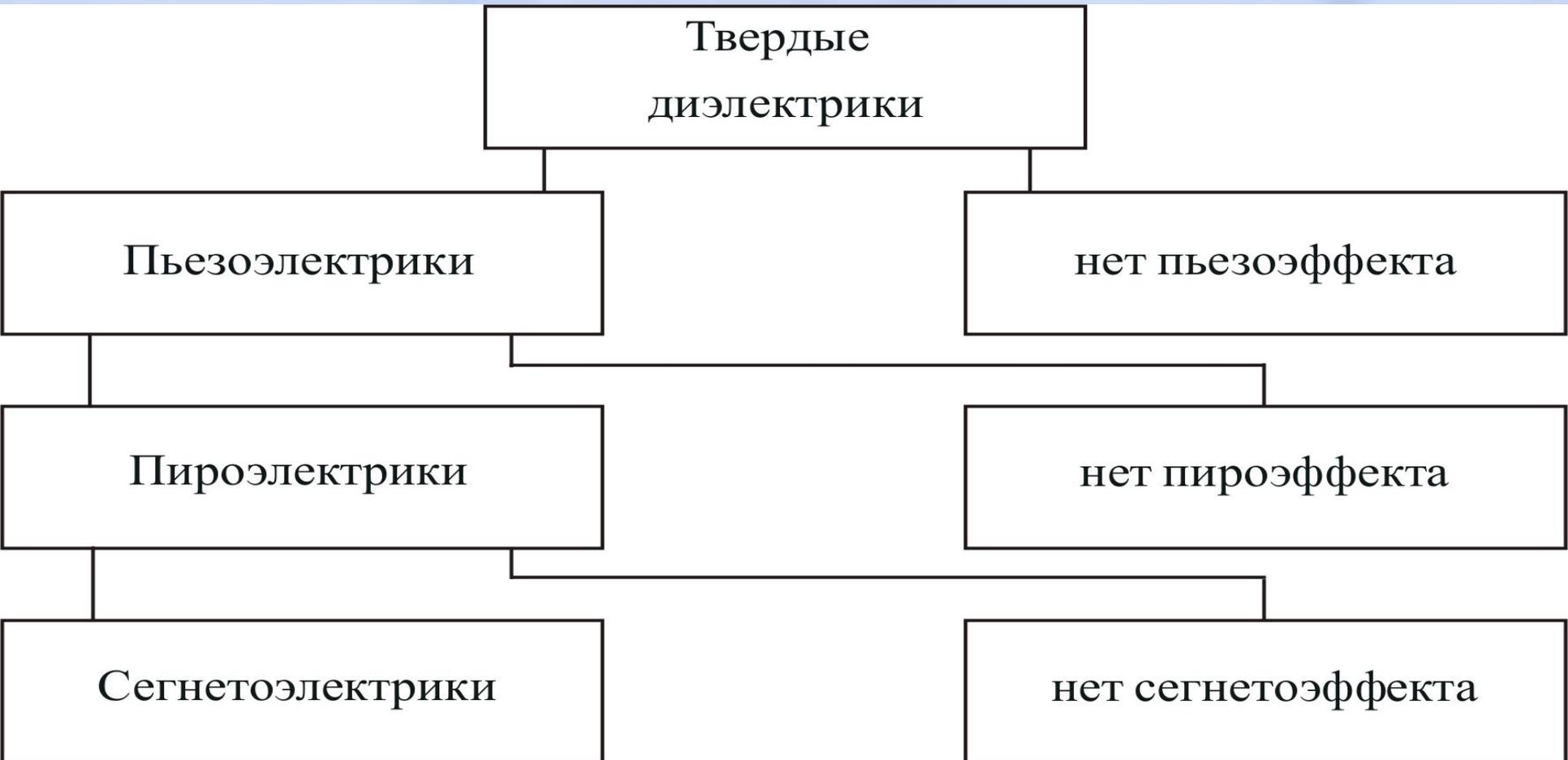
- Сейчас известно более 1800 пьезокристаллов.
- Все сегнетоэлектрики обладают пьезоэлектрическими свойствами
- Используются в пьезоэлектрических адаптерах и других устройствах).

## 4.2.3. Пироэлектрики

*Пироэлектричество – появление электрических зарядов на поверхности некоторых кристаллов при их нагревании или охлаждении.*

- При нагревании один конец диэлектрика заряжается положительно, а при охлаждении он же – отрицательно.
- Появление зарядов связано с изменением существующей поляризации при изменении

Все пирозэлектрики являются пьезоэлектриками, но не наоборот. Некоторые пирозэлектрики обладают сегнетоэлектрическими свойствами.



В качестве **примеров** использования различных диэлектриков можно привести: **сегнетоэлектрики** – электрические конденсаторы, ограничители предельно допустимого тока, позисторы, запоминающие устройства;

**пьезоэлектрики** – генераторы ВЧ и пошаговые моторы, микрофоны, наушники, датчики давления, частотные фильтры, пьезоэлектрические адаптеры;

**пироэлектрики** – позисторы, детекторы ИК-излучения, болометры (датчики инфракрасного излучения), электрооптические модуляторы.

# Практическое применение пьезоэффекта.

Пьезоэлектрические преобразователи (например, пьезоэлектрический манометр), двигатели, пьезоэлектрические стабилизаторы и фильтры, пьезоэлектрические датчики, звукоосниматели, микрофоны, кварцевые излучатели ультразвука и пр.

В течение последних 5-7 лет сформировалась и интенсивно развивается новая отрасль медицины, основанная на использовании близкодействующих статических электрических полей для стимулирования позитивных биологических процессов в организме человека.

Попадая вместе с имплантатом в организм человека, электретьная пленка своим полем оказывает дозированное локальное воздействие на поврежденный орган, способствуя его лечению в оптимальных биофизических условиях.

В основе этого процесса лежит природный эффект, состоящий в том, что внешнее близкодействующее электрическое поле определенной величины и знака, действуя на клеточном уровне, является катализатором появления здоровых новообразований в живых тканях.



Характерные фотографии срезов костной ткани, полученные в результате серии экспериментов. Электретное покрытие существенно ускоряет процессы заживления.

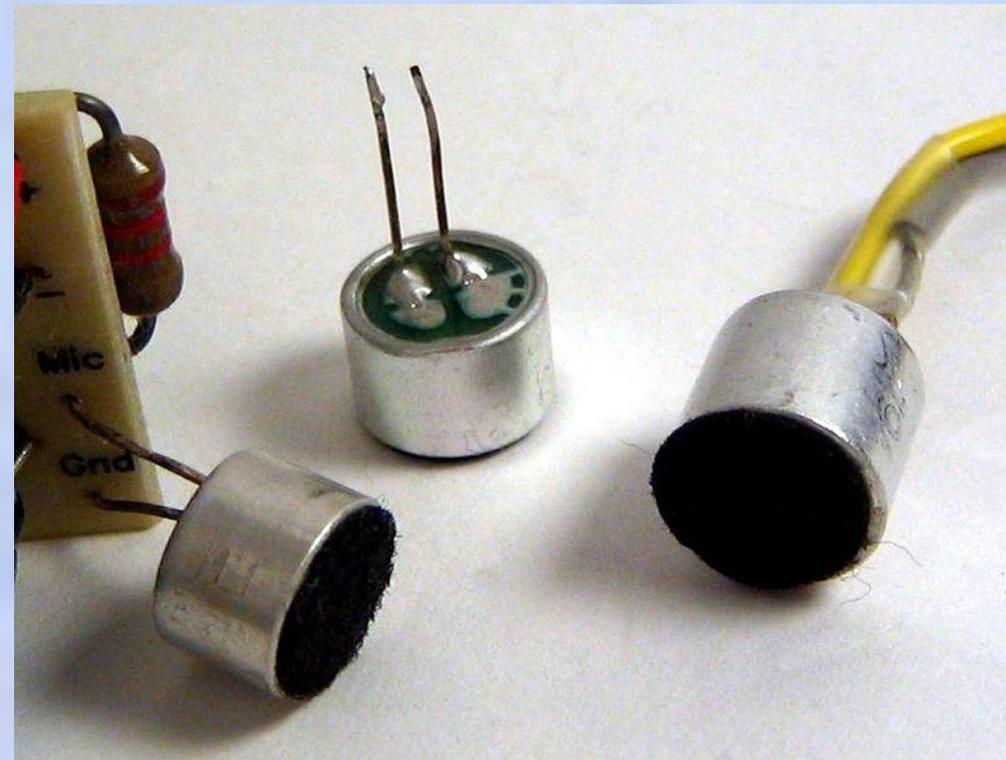
К концу третьего месяца после операции вокруг имплантатов с электретным покрытием практически полностью завершается процесс формирования костной ткани, отсутствуют признаки воспалительной реакции.



Речевой ненаправленный электретный микрофон МК-Boost является фирменным продуктом компании «Гран При».

Тонкая плёнка из гомоэлектрета помещается в зазор конденсаторного микрофона. Тонкая плёнка из гомоэлектрета помещается в зазор конденсаторного микрофона (т.е. конденсатора, у которого одна из обкладок (мембрана) имеет возможность перемещаться под действием внешнего а

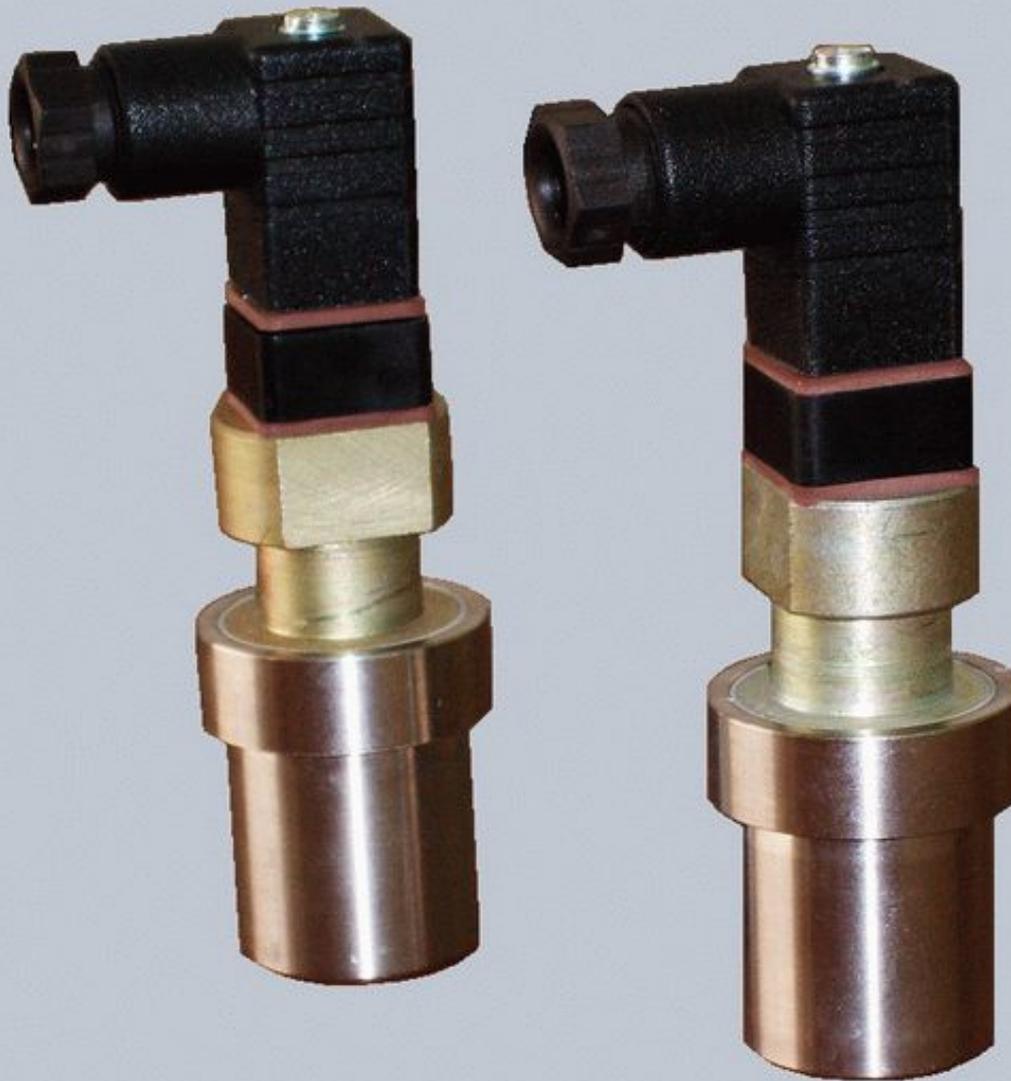
При изменении ёмкости, вследствие смещения мембраны, на конденсаторе проявляется изменение напряжения, соответствующее акустическому сигналу.





Блоки пьезоэлектрических преобразователей предназначены для совместной работы с электронным блоком дефектоскопа УДС2-РДМ-2. Используются в схемах проверки нитей железнодорожного пути.

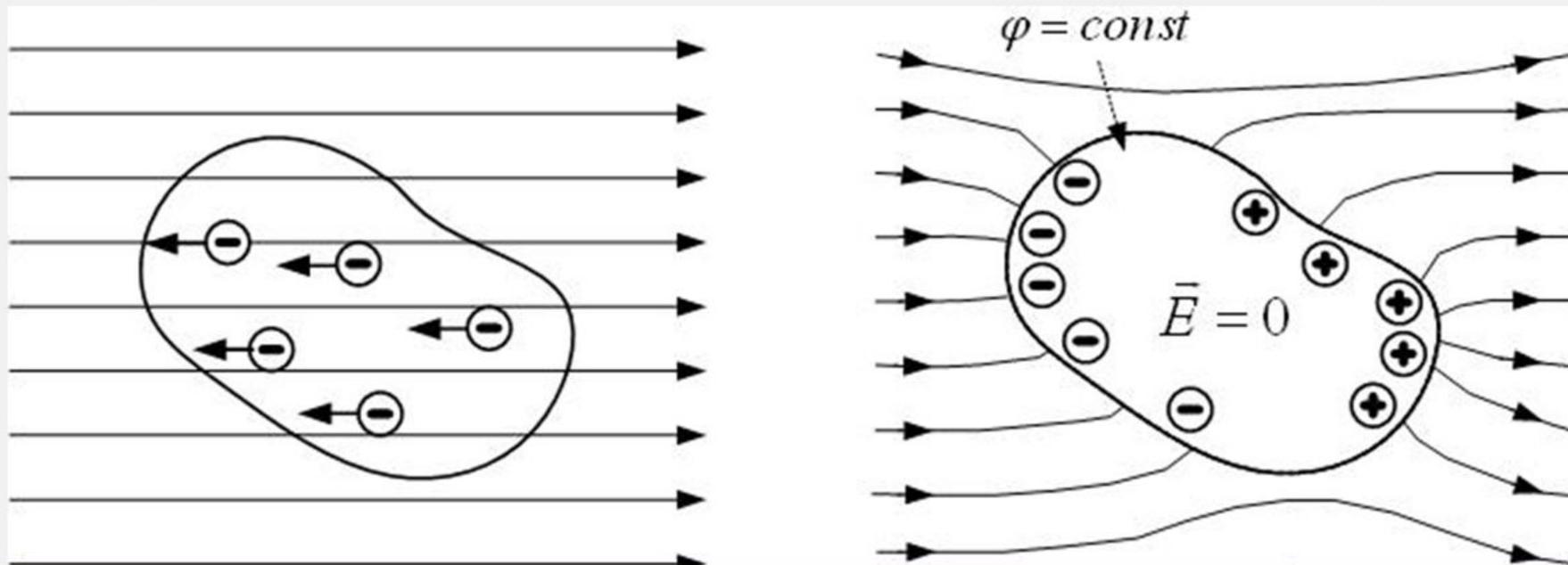
Блоки преобразователей являются составной частью системы ультразвукового контроля и конструктивно состоят из резонаторов, установленных в специальном корпусе, закрепленных на износостойчивом основании. Блоки оснащены системой подачи контактной жидкости.



**Пьезоэлектрические преобразователи ПЭП 3**  
**предназначены для**  
**создания в**  
**жидкостях**  
**ультразвуковых**  
**колебаний, их**  
**приема с**  
**последующим**  
**преобразованием в**  
**электрический**  
**сигнал в составе**  
**ультразвуковых**  
**счетчиков**  
**жидкостей и тепла.**

## Проводники в электростатическом поле

Поместим проводник в электростатическое поле



На свободные заряды проводника со стороны поля действует сила:  $F=qE$ .  
Электроны в металле движутся против поля, разность потенциалов выравнивается.  
Равновесное распределение зарядов в проводнике при помещении его в электростатическое поле устанавливается очень быстро  
Поле индуцированных зарядов полностью компенсирует внешнее поле;  
 $E=0$ ; сила тоже  $F=0$ .  
Разность потенциалов любых двух точек проводника равна нулю.  
Потенциал проводника всюду (внутри и на поверхности проводника) одинаков

## Проводники в электростатическом поле

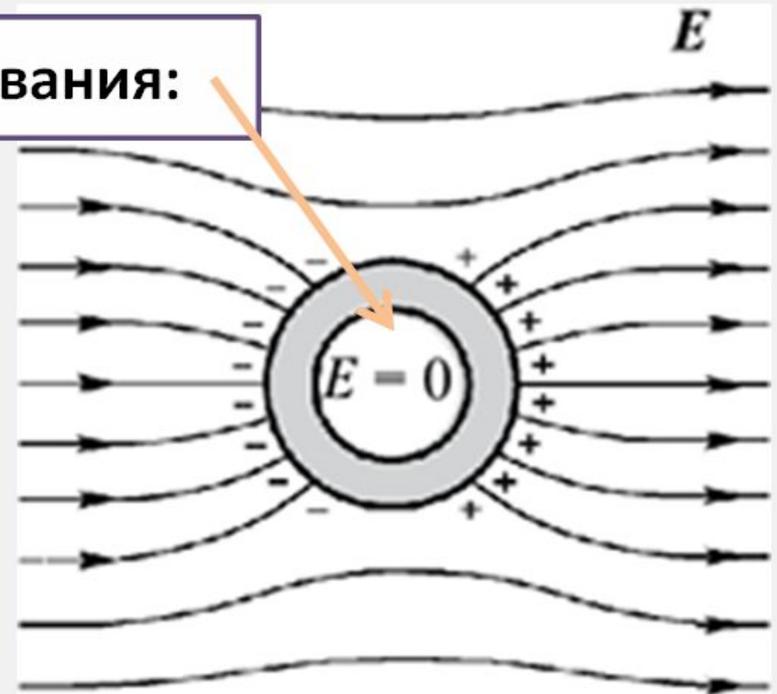
$$\varphi_{\text{проводника}} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}(\text{const}) = 0$$

**Внутри проводника поля нет:**

$$\vec{E} = 0$$

На этом основан принцип экранирования:

Внутри проводника нет объёмных нескомпенсированных зарядов; заряды могут быть только на поверхности проводника

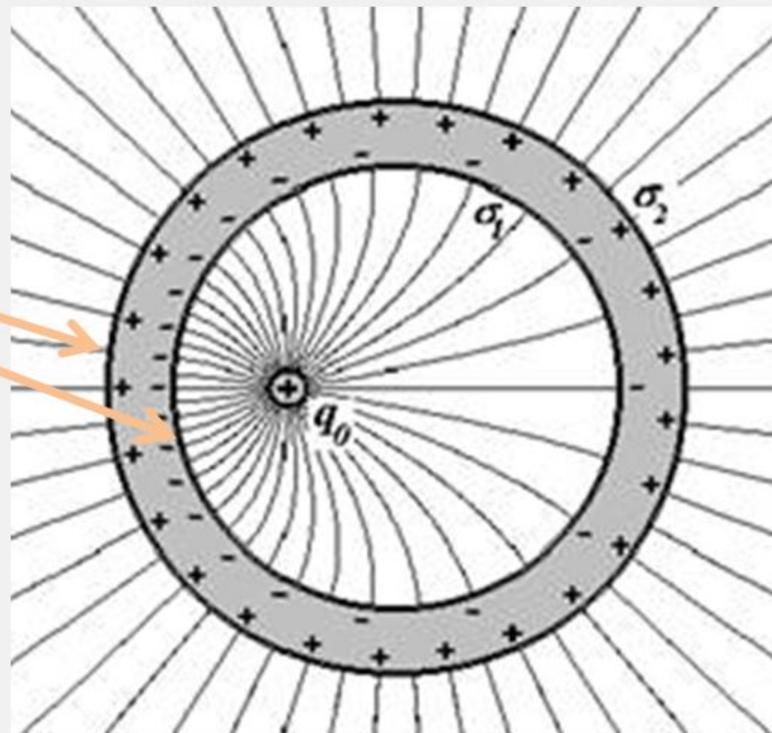
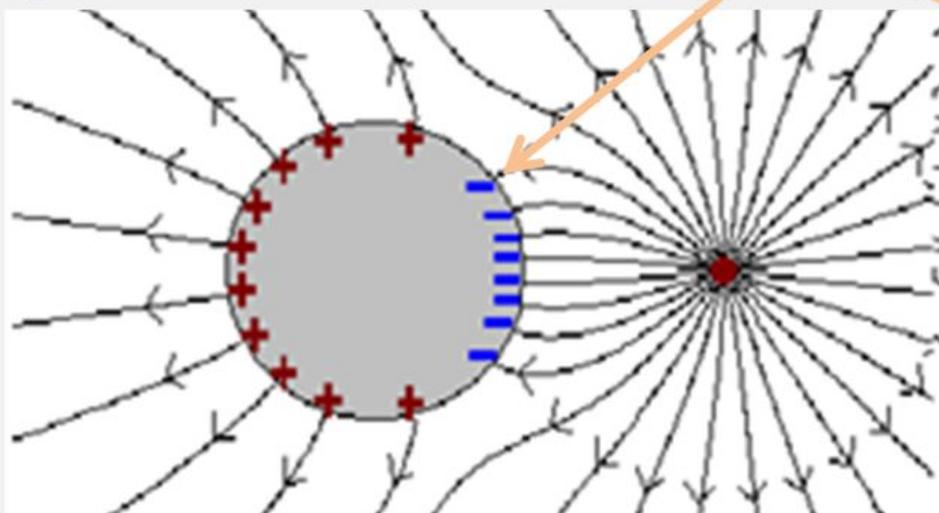


## Проводники в электростатическом поле

$$\varphi_{\text{проводника}} = \text{const}$$

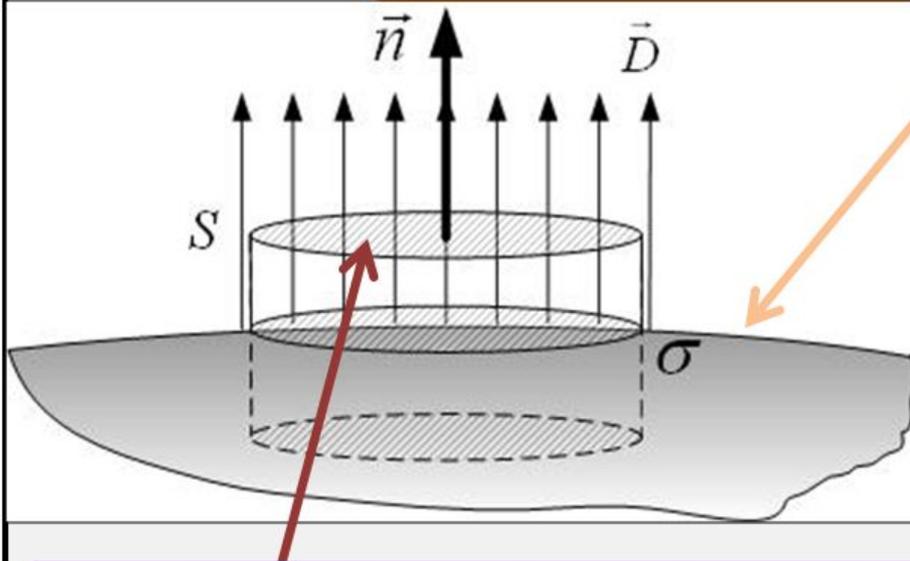
$$\vec{E} = 0$$

Заряды могут быть только на поверхности проводника



Поверхность проводника – эквипотенциальная, поэтому линии напряжённости к ней перпендикулярны, а индуцированные на поверхности проводника свободные заряды разрывают линии напряжённости, так что внутри проводника поля нет

## Поле вблизи поверхности проводника



Пусть  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда  
По теореме Гаусса для вектора электрического смещения:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{\text{свободн.}}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot S$$

$$\sum_i q_i^{\text{свободн.}} = \sigma \cdot S$$

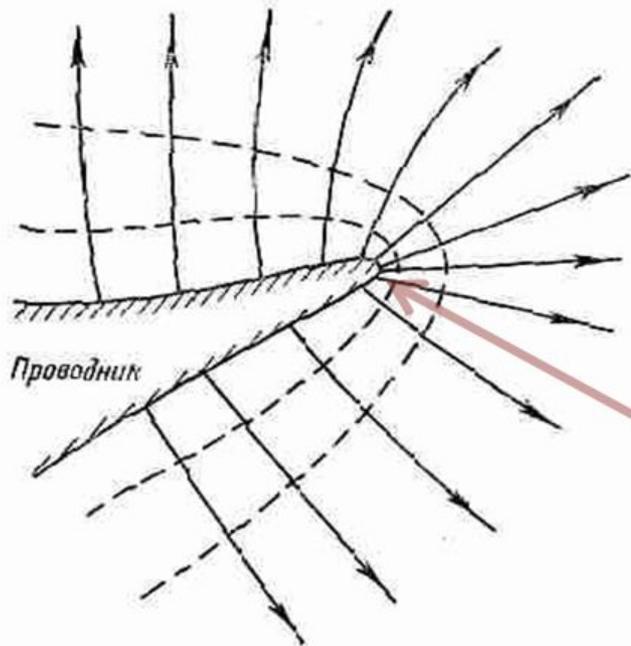
$$\Rightarrow D \cdot S = \sigma \cdot S \Rightarrow$$

$$D = \sigma$$

**Вблизи поверхности проводника величина вектора  $D$  равна поверхностной плотности заряда**

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$$

## Поле вблизи поверхности проводника



*Вблизи поверхности проводника величина вектора  $D$  равна поверхностной плотности заряда*

Электрические заряды по поверхности проводника распределяются неравномерно  
Поверхностная плотность заряда больше на выпуклостях и меньше на впадинах  
Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности проводника и сгущаются на острие, где зарядов больше

## Електроёмкость проводника

**Определение:**

**Електроёмкость уединенного проводника – это заряд, который нужно сообщить проводнику, чтобы его потенциал изменился на 1 вольт**

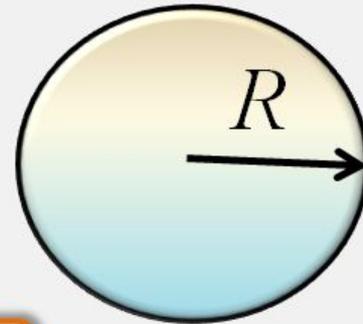
$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}$$

**Для поля сферы:**  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$

**На поверхности:**  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}$

**Ёмкость сферы:**  $C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$

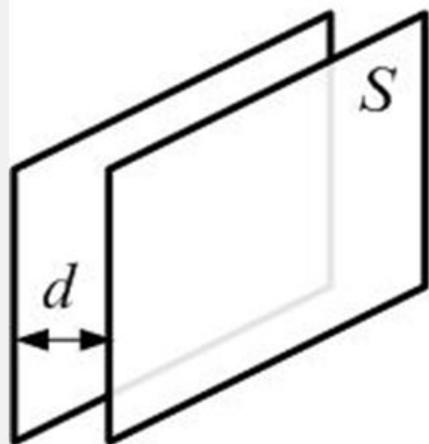


Електроёмкость проводника зависит от его размеров, формы, наличия по соседству других проводников и от диэлектрической проницаемости среды

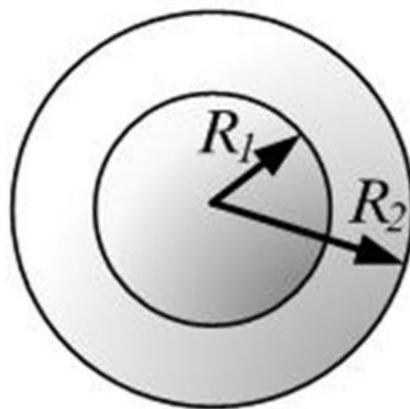
## Конденсаторы

Емкость проводника зависит от его размеров, формы, наличия по соседству других проводников и от диэлектрической проницаемости среды. Если недалеко от заряженного проводника находится другой проводник, то из-за явления электростатической индукции ёмкость проводника меняется (возрастает).

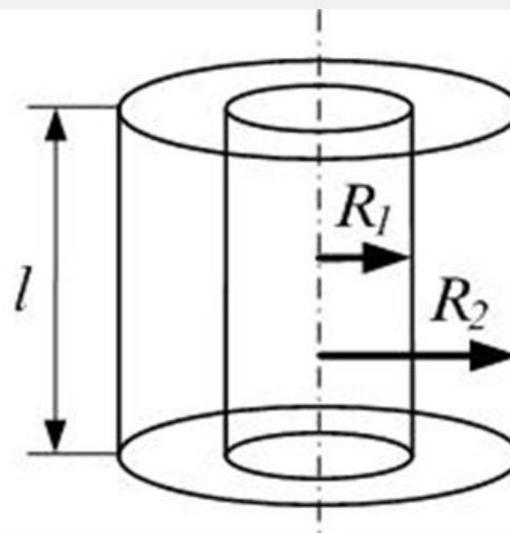
Конденсатор – это два проводника (две обкладки), находящихся вблизи друг друга.



*Плоский*



*Сферический*



*Цилиндрический*

## Конденсаторы. Ёмкость конденсатора

**Определение:**

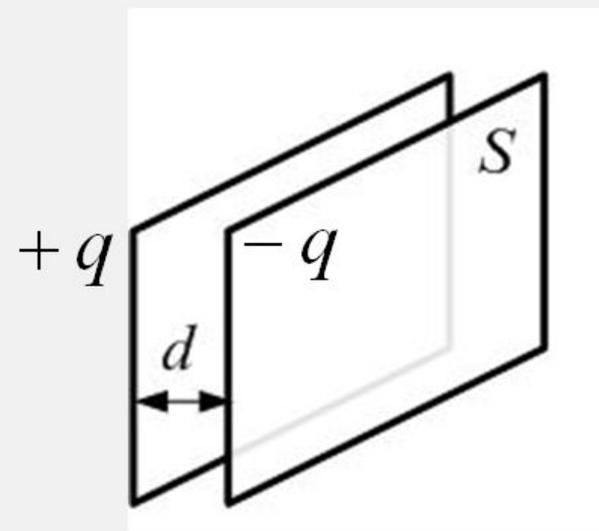
**Ёмкость конденсатора численно равна заряду, который нужно ему сообщить, чтобы разность потенциалов обкладок (напряжение на конденсаторе) было равно 1 вольту**

$$C = \frac{q}{U}$$

Ёмкость зависит от формы, размеров обкладок, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды

**Ёмкость плоского конденсатора:**

$$C_{\text{пл.}} = \frac{q}{U} = \frac{q}{E \cdot d} = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \cdot d} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \cdot S}{d}$$



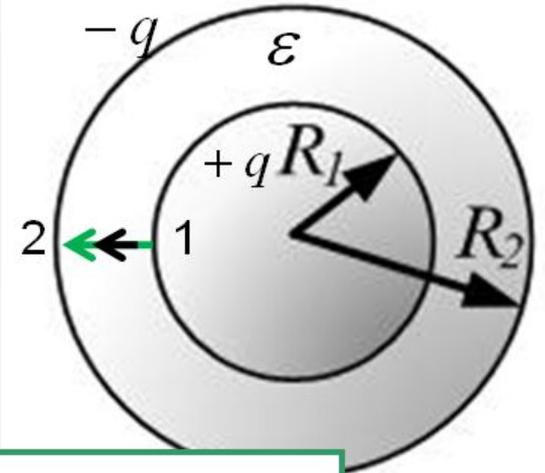
## Ёмкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{U}$$

Напряжение на сферическом конденсаторе:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$



$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$C_{\text{сфер.}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

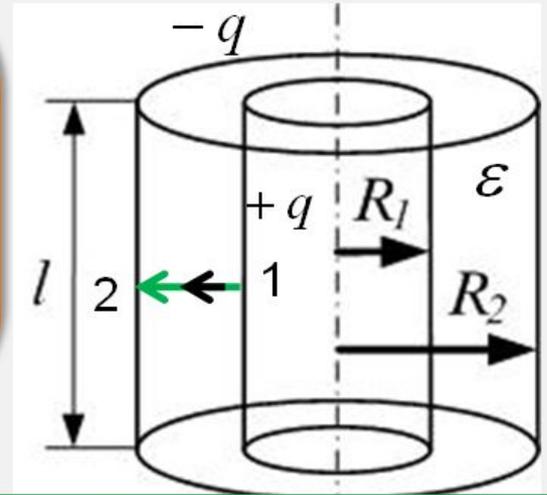
## Ёмкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{q}{U}$$

Напряжение на цилиндрическом конденсаторе:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}$$

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r l}$$



$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r l} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \cdot (\ln r) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} (\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$



$$C_{\text{цил.}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

## Ёмкость при параллельном соединении

$$U_1 = U_2 = U$$

$$q = q_1 + q_2$$

$$q = C_{\text{общ.}} U$$

$$q_1 = C_1 U$$

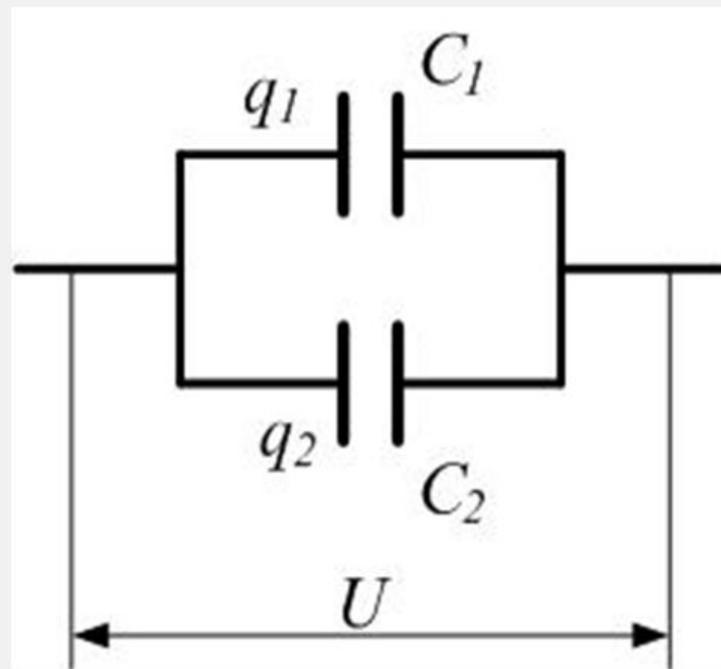
$$q_2 = C_2 U$$

$$C = \frac{q}{U}$$

$$C_{\text{общ.}} U = C_1 U + C_2 U$$

$$C_{\text{общ.}} = C_1 + C_2$$

$$C_{\text{общ.}} = \sum_i C_i$$



## Ёмкость при последовательном соединении

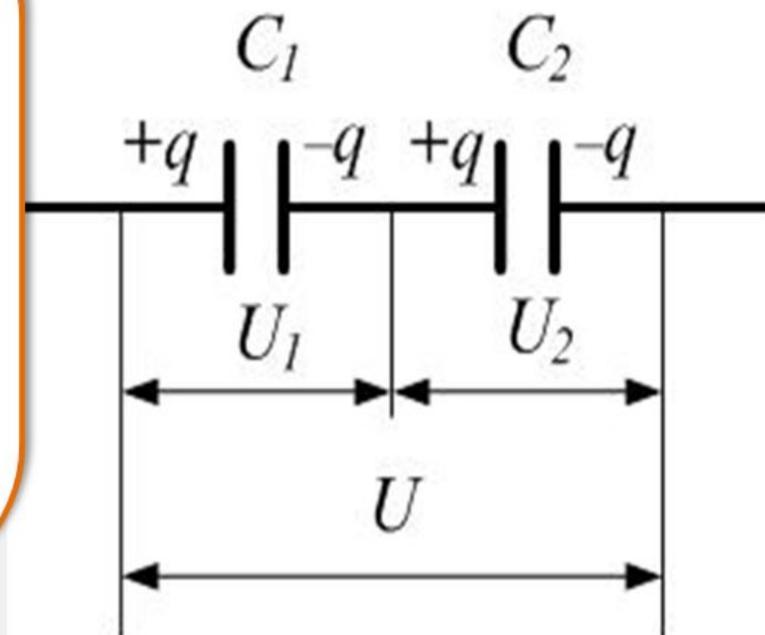
$$C = \frac{q}{U}$$

$$q_1 = q_2 = q$$
$$U = U_1 + U_2$$

$$U = \frac{q}{C_{\text{общ.}}}$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2}$$



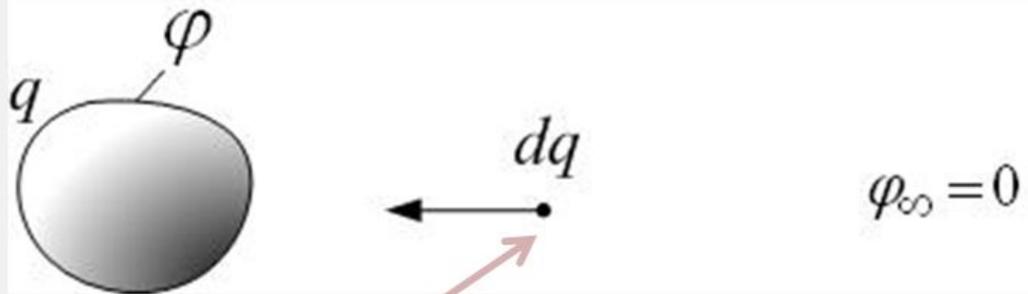
$$\frac{q}{C_{\text{общ.}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ.}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

## Энергия заряженного проводника

Заряжаем проводник:



Работа внешних сил по переносу заряда  $dq$  идёт на увеличение энергии проводника:

$$dA = dq \cdot \Delta\varphi$$

$$dA = dW$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_\infty = \varphi \longrightarrow dW = \varphi \cdot dq$$

$$dW = \varphi \cdot C d\varphi$$

$$\varphi = \frac{q}{C}$$

$$q = C\varphi$$

$$dq = C \cdot d\varphi$$

$$\frac{dW}{d\varphi} = C \cdot \varphi$$

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}$$

## Энергия заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}$$

$$\varphi = \frac{q}{C}$$

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{C\left(\frac{q}{C}\right)^2}{2} = \frac{Cq^2}{2C^2}$$

$$q = C\varphi$$

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{(C\varphi)\varphi}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

$$W = \frac{q\varphi}{2}$$

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

## Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

## Объёмная плотность энергии электростатического поля

**Энергия электростатического поля** проводника или конденсатора *локализована в той области пространства, где создано электростатическое поле*

**Определение:** объёмной плотностью энергии называется энергия единицы объёма пространства:

$$w = \frac{dW}{dV}$$

**На примере плоского конденсатора:**

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

$$V = S \cdot d$$

$$U = E \cdot d$$

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S (Ed)^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot Sd \cdot E^2}{2}$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot Sd \cdot E^2}{2V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

## Объёмная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$w = \frac{dW}{dV}$$

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$w = \frac{ED}{2}$$