§6. Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Теорема 1 (Признак Дини поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье)

Пусть $f: R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$. Пусть $x_0 \in R$: $\exists\, f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$; $f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

Обозначим $f_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Пусть существует $\delta > 0$:

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f_0}{2t} \right| dt < +\infty .$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к f_0, то есть $S(x_0) = f_0$.

Доказательство приведем на лекции.

Следствие 1 (Признак Липшица)

Пусть $f : R \to R$ – 2π-периодическая суммируемая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$, причем существуют такие $\delta, c, \alpha > 0$: $\forall x \in \left(x_0 - \delta; x_0 + \delta\right)$

$$\left|f(x_0 + t) - f(x_0)\right| \le c \cdot |t|^\alpha$$

(условие Гёльдера порядка α)

Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0, при этом $S(x_0) = f_0 = \dfrac{f\left(x_0 + 0\right) + f\left(x_0 - 0\right)}{2}$.

Доказательство приведем на лекции.

Замечание. Для случая f , разрывной в точке x_0, можно потребовать существование $\delta, c, \alpha > 0$ таких, что

$$\left.\begin{array}{l} \left|f(x_0+t)-f(x_0+0)\right| \le c\cdot|t|^{\alpha} \\ \left|f(x_0-t)-f(x_0-0)\right| \le c\cdot|t|^{\alpha} \end{array}\right. \quad \forall t\in(0;\delta).$$

Тогда функция $h(t)=\int\limits_0^{\delta}\left|\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f_0}{2t}\right|dt$ суммируема, $h(t)\in L(0;\delta)$ и, аналогично выводу следствия 1, можно показать, что ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к f_0, то есть

$$S(x_0)=f_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Следствие 2. Если $\exists\ f(x_0-0),\ \ f(x_0+0),$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{f(x_0-\Delta t)-f(x_0-0)}{\Delta t},$$

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{f(x_0+\Delta t)-f(x_0+0)}{\Delta t},$$

то тригонометрический ряд Фурье сходится к $S(x_0)=f_0$.

Доказательство. Условие Гёльдера выполнено справа и слева от точки x_0 при $\alpha=1$. $\square$

Пример приведем на лекции.

§7. Неравенство Бесселя. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Замечание. Если ряд Фурье сходится равномерно на R , то $S: R \to R$ – непрерывная функция. Поэтому в примере §6 равномерной сходимости нет. Она возможна только в случае $f(\pi - 0) = f(-\pi + 0)$.

Теорема 1 (Неравенство Бесселя)

Пусть $f: R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$, $f \in L_2(-\pi;\pi)$, то есть конечен $\int\limits_0^\delta f^2(x)dx$.

Тогда $\frac{a_0{}^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

(a_0, a_n, b_n – коэффициенты Эйлера-Фурье).

Доказательство приведем на лекции.

Теорема 2. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, кроме, может быть, конечного числа точек.

Пусть, кроме того, в тех точках, в которых f не дифференцируема, существуют производные справа и слева: $f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0)$.

Тогда ряд Фурье сходится к f равномерно на R .

Доказательство приводить не будем.

§8. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Фейера.

Определение 1. Пусть задан числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n, \ \sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} a_n .$$

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется методом средних арифметических к числу σ, если существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} a_n = \sigma .$$

Теорема 1. Если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к числу S,

$\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = S$, то он суммируется к числу S методом средних арифметических.

Доказательство приводить не будем.

Определение 2. Пусть $f : R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$, a_0, a_n, b_n– коффициенты Эйлера-Фурье для нее:

$$S_0 = \frac{a_0}{2} \ ,$$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Функции

$$\sigma_1 = S_0 \ , \ \sigma_N = \frac{1}{N}(S_0 + \ldots + S_{N-1})$$

называются суммами Фейера функции f.