

3.3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное сумме произведений соответствующих компонент этих векторов:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= (x_1, \dots, x_n) & \vec{Y} &= (y_1, \dots, y_n) \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Экономический смысл:

Если $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$

есть вектор объемов различных товаров,

$\vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$

есть вектор цен этих товаров, то их
скалярное произведение (\vec{X}, \vec{Y})

есть суммарная стоимость этих товаров.

Свойства скалярного произведения



$$\overset{\sphericalangle}{(X, Y)} = \overset{\sphericalangle}{(Y, X)}$$



$$\overset{\sphericalangle}{(X, Y + Z)} = \overset{\sphericalangle}{(X, Y)} + \overset{\sphericalangle}{(X, Z)}$$



$$(\alpha \overset{\sphericalangle}{X}, \overset{\sphericalangle}{Y}) = \alpha (\overset{\sphericalangle}{X}, \overset{\sphericalangle}{Y})$$



$$(\overset{\sphericalangle}{X}, \overset{\sphericalangle}{X}) \geq 0$$

(равенство нулю для нулевого вектора)

Условие ортогональности векторов

*Два вектора будут ортогональными,
если их скалярное произведение
равно нулю.*

$$\left(\overset{\boxtimes}{X}, \overset{\boxtimes}{Y} \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$$

*Длина или норма n-мерного вектора
определяется по формуле:*

$$|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Угол между двумя векторами определяется по формуле:

$$\cos \left(\overset{\boxtimes}{X} \wedge \overset{\boxtimes}{Y} \right) = \frac{(\overset{\boxtimes}{X}, \overset{\boxtimes}{Y})}{|\overset{\boxtimes}{X}| \cdot |\overset{\boxtimes}{Y}|}$$

$$\left| \cos \left(\overset{\boxtimes}{X} \wedge \overset{\boxtimes}{Y} \right) \right| \leq 1$$

Это неравенство выполняется благодаря неравенству Коши-Буняковского:

$$\left(\overset{\boxtimes}{X}, \overset{\boxtimes}{Y} \right)^2 \leq \left(\overset{\boxtimes}{X}, \overset{\boxtimes}{X} \right) \cdot \left(\overset{\boxtimes}{Y}, \overset{\boxtimes}{Y} \right)$$

которое справедливо для любых двух векторов.