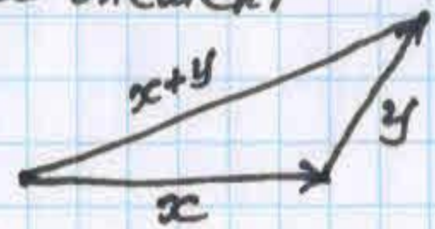
Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X называется ЛНП, если $\forall x \in X \ \exists \|x\|$ (норма):

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



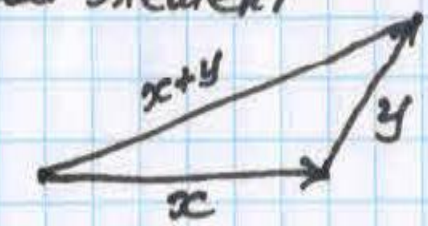
Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X \ \exists \, \|x\|$ (норма):

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

1. l_1 - мн-во абс. сх. числ. рядов. $a \in l_1$, $a \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сх.

$a, b \in l_1$ $\left(b \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ сх}\right) \Rightarrow a + b = c \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n = a_n + b_n \ \forall n$;

$\alpha a \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$. (Ясно, что $\Theta \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$). Определение: $\|a\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

1) - очевид. 2): $\|\alpha a\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n| = |\alpha| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |\alpha| \cdot \|a\|_1$ $(\alpha a \in l_1)$

3): $\|a+b\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| = \|a\|_1 + \|b\|_1$ $(a + b \in l_1)$

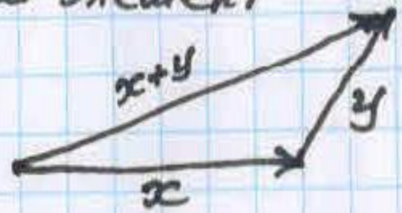
Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X \; \exists \|x\|$ (норма):

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

2. $C[a,b] \equiv \{f(x) : f(x)$ непр. на $[a,b]\}$. Слож. и умн. на число - в каждой точке

$\|f\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \left(= \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)$ 1) - самост. $(\Theta(x) \equiv 0)$. 2) - сам.

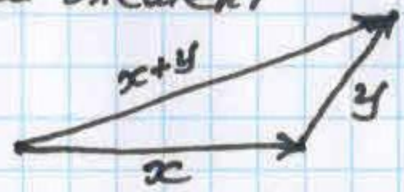
3): $\|f+g\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| +$

$+ \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\|_C + \|g\|_C.$

Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X \; \exists \|x\|$ (норма) :

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

2. $C[a,b] \equiv \{f(x): f(x)$ непр. на $[a,b]\}$. Слож. и умн. на число - в каждой точке

$\|f\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \left(\equiv \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)$ 1) - самост. $(\Theta(x) \equiv 0)$. 2) - сам.

3): $\|f+g\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| +$

$+ \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\|_C + \|g\|_C$.

3. $C^*[a,b] \equiv \{f(x): f(x)$ - непр. на $[a,b]$, $f(b)=f(a)\}$ $\|f\|_{C^*} = \|f\|_C$ (max или sup)

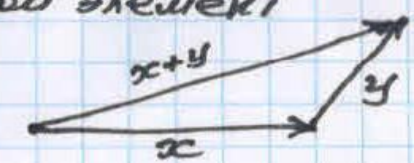
1), 2), 3) можно проверить так же, а можно: $f(b)=f(a)$ сохр. при лин. операц.

$\Rightarrow C^*[a,b]$ - подпр-во ЛП $C[a,b]$ и подпр-во ЛНП $C[a,b]$.

Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X\ \exists \|x\|$ (норма):

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ - нулевой элемент
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

4. $Q_0[a,b]$ - мн-во кус.-непр. ф-й $f(x)$ на $[a,b]$; $a = x_0 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$

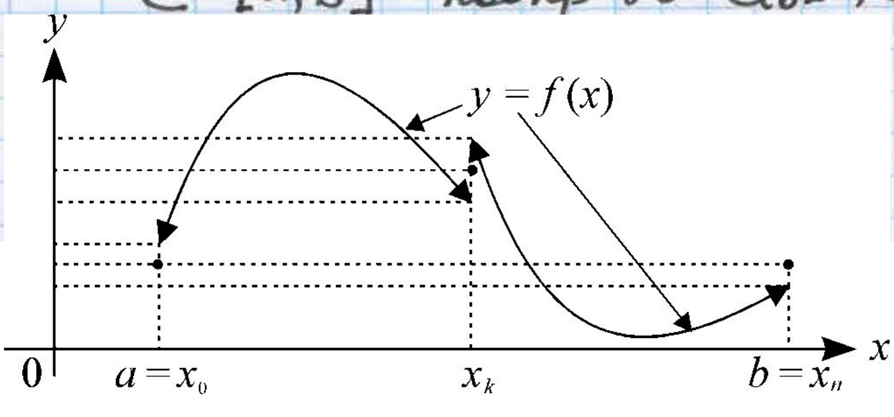
$f(x)$ непр. на (x_{k-1}, x_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$,

$\exists \lim\limits_{x \to x_k \pm 0} f(x) = f(x_k \pm 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$; $f(a) = f(b) = \dfrac{f(a+0) + f(b-0)}{2}$,

$$f(x_k) = \frac{f(x_k+0) + f(x_k-0)}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

$\|f\|_Q = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. 1), 2), 3) - проверить самост. аналог 2. ($\max \Rightarrow \sup$)

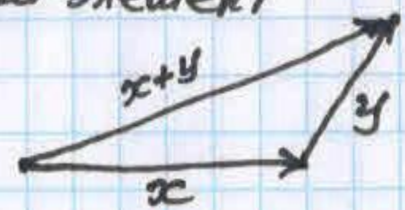
$C^*[a,b]$ - подпр-во $Q_0[a,b]$ (самост.)



Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во $\bar{X}$ назыв. ЛНП, если $\forall x \in \bar{X}\ \exists \|x\|$ (норма) :

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

5. $CL_1[a,b] \equiv \{f(x): f(x)$ непр. на $[a,b]\}$ $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

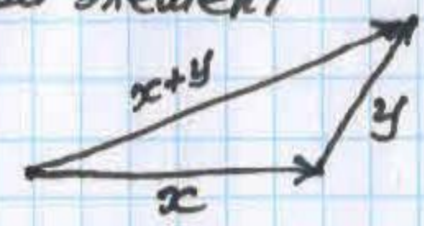
Непрер. ф-я интегр. $\Rightarrow \|f\|_1$ определена.

1) $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \geq 0$. $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0 \Rightarrow |f(x)| \equiv 0$ (св-во опред. инт-лов) $\Rightarrow f(x) = \Theta(x)$
2) $\|\alpha f\|_1 = \int\limits_a^b |\alpha f(x)|\,dx = |\alpha| \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = |\alpha| \cdot \|f\|_1$
3) $\|f+g\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx + \int\limits_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$

Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X \; \exists \|x\|$ (норма):

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

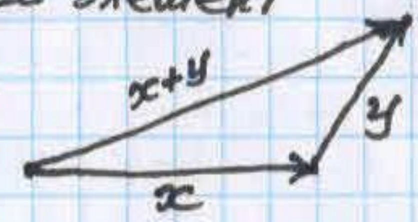
6. $C^* L_1[a,b] \equiv \{ f(x) : f(x)$ непр. на $[a,b]$, $f(b) = f(a) \}$ $\quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

1), 2), 3) - самост. ; $C^* L_1[a,b]$ - подпр-во $CL_1[a,b]$ - самост.

Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X\ \exists\ \|x\|$ (норма) :

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

7. $Q_0 L_1[a,b] \equiv \{f(x) : f(x) \in Q_0[a,b]\}$ $\quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

1) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \geq 0$, $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow 0 = \int_a^b |f(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\,dx = 0$, если изменить $f(x)$ при $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$ (сделать непр.)

$\Rightarrow$ изменённая $|f(x)| \equiv 0\ \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$ исх. $|f(x)| \equiv 0\ \forall x \in (x_{k-1}, x_k)$

$\Rightarrow$ (осреднение) $\Rightarrow f(x) \equiv 0\ \forall x \in [a,b]$.

2), 3) – самостоятельно

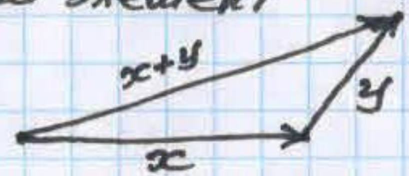
Линейное нормированное пространство

Опр. Линейное пр-во X назыв. ЛНП, если $\forall x \in X \; \exists \|x\|$ (норма) :

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ - нулевой элемент

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (н-во тр-ка)



Примеры ЛНП

7. $Q_0L_1[a,b] \equiv \{f(x) : f(x) \in Q_0[a,b]\}$ $\quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$.

1) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \geq 0$. $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow 0 = \int_a^b |f(x)|dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|dx = 0$, если изменить $f(x)$ при $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$ (сделать непр.)

$\Rightarrow$ изменённая $|f(x)| \equiv 0 \; \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$ исх. $|f(x)| \equiv 0 \; \forall x \in (x_{k-1}, x_k)$

$\Rightarrow$ (осреднение) $\Rightarrow f(x) \equiv 0 \; \forall x \in [a,b]$.

2), 3) – самостоятельно

Можно рассмотреть $CL_p[a,b]$, $C^*L_p[a,b]$ и $Q_0L_p[a,b]$:

$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$. $p=2$ рассм. позже, остальные не будем.

Последовательности и ряды в ЛНП

<u>Опр.</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ назыв. сход. в ЛНП X, если $\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0$

$\exists N : \forall n > N \quad \|x_n - x\| < \varepsilon.$ $\qquad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad (x_n \in X)$

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \in X)$ назыв. сход. в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сход. в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

<u>Опр.</u> $A \subset X$ назыв. ограниченным, если

$\exists M > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \leq M$

Последовательности и ряды в ЛНП

<u>Опр.</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ назыв. сход. в ЛНП X, если $\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0$

$\exists N : \forall n > N \ \|x_n - x\| < \varepsilon$. $\quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad (x_n \in X)$

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \in X)$ назыв. сход. в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сход. в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

<u>Опр.</u> $A \subset X$ назыв. ограниченным, если

$$\exists M > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \le M$$

<u>Т1.</u> Сходящаяся посл-ть имеет единств. предел. Д-ть самост.

Последовательности и ряды в ЛНП

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ назыв. сход. в ЛНП X, если $\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N \; \|x_n - x\| < \varepsilon$. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(x_n \in X)$

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \in X)$ назыв. сход. в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сход. в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

Опр. $A \subset X$ назыв. ограниченным, если

$$\exists M > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \le M$$

Т1. Сходящаяся посл-сть имеет единств. предел. Д-ть самост.

Т2. Сходящаяся посл-сть ограничена. Д-ть самостоят.

Последовательности и ряды в ЛНП

<u>Опр.</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся в ЛНП X, если $\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N \; \|x_n - x\| < \varepsilon$. $\quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad (x_n \in X)$

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \; (u_n \in X)$ называется сходящимся в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сходится в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

<u>Опр.</u> $A \subset X$ называется ограниченным, если

$$\exists M > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \leq M$$

<u>Т1.</u> Сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Доказательство самост.

<u>Т2.</u> Сходящаяся последовательность ограничена. Доказательство самостоят.

<u>Т3.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. $\Rightarrow$

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$; 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = \alpha x$; 3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

Последовательности и ряды в ЛНП

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называв. сход. в ЛНП X, если $\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0$ $\exists N: \forall n > N \ \|x_n - x\| < \varepsilon$. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(x_n \in X)$

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \in X)$ называв. сход. в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сход. в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

Опр. $A \subset X$ называв. ограниченным, если

$$\exists M > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \leq M$$

Т1. Сходящаяся посл-сть имеет единств. предел. Д-ть самост.

Т2. Сходящаяся посл-сть ограничена. Д-ть самостоят.

Т3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\Rightarrow$

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$; 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = \alpha x$; 3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

Д-во. 1) - д-ть самостоят.

Последовательности и ряды в ЛНП

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ назыв. сход. в ЛНП X, если $\exists x \in X: \forall \varepsilon > 0$ $\exists N: \forall n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(x_n \in X)$

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \in X)$ назыв. сход. в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сход. в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Опр. $A \subset X$ назыв. ограниченным, если

$$\exists M > 0 : \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \leq M$$

Т1. Сходящаяся посл-ть имеет единств. предел. Д-ть самост.

Т2. Сходящаяся посл-ть ограничена. Д-ть самостоят.

Т3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\Rightarrow$

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$; 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n x_n) = \alpha x$; 3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$

2). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow (Т.2) \Rightarrow \exists M > 0 : \|x_n\| \leq M$. $(n = 1, 2, \ldots)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1\ \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} \\ &\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2\ |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max(N_1, N_2)}$$

$\underline{\forall n > N\ \|\alpha_n x_n - \alpha x\|} = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \leq \|\alpha_n x_n - \alpha x_n\| + \|\alpha x_n - \alpha x\| =$

$= \|(\alpha_n - \alpha) x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} <$

$\underline{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}$.

Последовательности и ряды в ЛНП

<u>Опр.</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называв. сход. в ЛНП X, если $\exists x \in X: \forall \varepsilon > 0$ $\exists N: \forall n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(x_n \in X)$

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \in X)$ назыв. сход. в X, если $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n$ сход. в X. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

<u>Опр.</u> $A \subset X$ назыв. ограниченным, если

$$\exists M > 0: \forall x \in A \Rightarrow \|x\| \leq M$$

<u>Т1.</u> Сходящаяся посл-сть имеет единств. предел. Д-ть самост.

<u>Т2.</u> Сходящаяся посл-сть ограничена. Д-ть самостоят.

<u>Т3.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\Rightarrow$

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$; 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n x_n) = \alpha x$; 3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$

3). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N}$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = x + (x_n - x) \Rightarrow \|x_n\| \leq \|x\| + \|x_n - x\| \Rightarrow \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \\ x = x_n + (x - x_n) \Rightarrow \|x\| \leq \|x_n\| + \|x - x_n\| \Rightarrow \|x\| - \|x_n\| \leq \|x - x_n\| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\big|\|x_n\| - \|x\|\big|} \leq \|x_n - x\| \underline{< \varepsilon}$, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ (непр. нормы)

Т. доказана.

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\forall\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}:\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall \{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_\alpha\}$,
$\forall \{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - замкн. в X если $\forall x\in X\ \forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$
$\exists \{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\forall\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}:\ \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – замкн. в X если $\forall x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$ $\exists\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}:\ \|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис бесконечномерного X, если $\forall x\in X$ $\exists$ и единств. $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}:\ x\overset{X}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|=0\right)$.

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_\alpha\}$,
$\forall \{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$: $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| > 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} \neq \Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – замкн. в X если $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$
$\exists \{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_\alpha\}$, $\exists \{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$: $\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} \| < \varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис бесконечномерного X, если $\forall x \in X$ $\exists$ и един.
$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x \overset{X}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ $\left(\lim\limits_{n \to \infty} \| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \| = 0 \right)$.

Т4 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис $X \Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ЛНС в X.

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$,

$\forall\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – замкн. в X если $\forall x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$

$\exists\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис бесконечномерного X, если $\forall x\in X$ $\exists$ и единств.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}: x\overset{X}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ $\left(\lim_{n\to\infty}\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|=0\right)$.

Т4 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис X $\Rightarrow$ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ЛНС в X.

Д-во. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – не ЛНС в X, т.е. $\exists N\in\mathbb{N}\ \exists\{e_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}\subset\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}: \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|>0$, но $\sum_{k=1}^{N}\lambda_k e_{\alpha_k}=\Theta$. $\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|>0\Rightarrow\exists k\ (1\le k\le N):$

$\lambda_k\neq 0$. $\lambda_1 e_{\alpha_1}+\ldots+\lambda_k e_{\alpha_k}+\ldots+\lambda_N e_{\alpha_N}=\Theta$ $\Rightarrow$

$$e_{\alpha_k}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}e_{\alpha_1}-\ldots-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}e_{\alpha_{k-1}}+\cancel{0\cdot e_{\alpha_k}}-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}e_{\alpha_{k+1}}-\ldots-\frac{\lambda_N}{\lambda_k}e_{\alpha_N}$$ (переставим по возр. номер)

$$e_{\alpha_k}=0\cdot e_1+\ldots+0\cdot e_{\alpha_k-1}+1\cdot e_{\alpha_k}+0\cdot e_{\alpha_k+1}+\ldots$$

Два разных разложения. Противоречие. $\Rightarrow$ Т. доказана.

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall \{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_\alpha\}$,

$\forall \{\lambda_k\}_{k=1}^{n} : \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k| > 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k} \neq \Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – замкн. в X если $\forall x\in X\ \forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$

$\exists \{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_\alpha\},\ \exists \{\lambda_k\}_{k=1}^{n} : \|x - \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\| < \varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис бесконечномерного X, если $\forall x\in X\ \exists$ и единств.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} : x \overset{X}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n \ \left(\lim\limits_{n\to\infty}\|x - \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\| = 0\right).$

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N : \forall n,m > N\ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$,

$\forall\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}:\ \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – замкн. в X если $\forall x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$

$\exists\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\},\ \exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}:\ \|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис бесконечномерного X, если $\forall x\in X\ \exists$ и един.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}:\ x\overset{X}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\ \ (\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|=0)$.

Т4 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис $X\Rightarrow\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ЛНС в X.

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n,m>N\ \|x_n-x_m\|<\varepsilon$

Т5. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сх. $\Rightarrow\{x_n\}$ – фундам. Д-тв самост.

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$,

$\forall\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - замкн. в X если $\forall x\in X$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$

$\exists\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - базис бесконечномерного X, если $\forall x\in X$ $\exists$ и единств.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}: x\overset{X}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|=0\right)$.

Т4 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - базис $X\Rightarrow\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ЛНС в X.

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N: \forall n,m>N$ $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

Т5. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сх. $\Rightarrow\{x_n\}$ - фундам. Д-ть самост.

Опр. Если в ЛНП X $\forall$ фундам. посл-ть сх-ся, то X назыв.

полным ЛНП (банахово пр-во)

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – ЛНС в X, если $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$,

$\forall\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|>0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\neq\Theta$

Опр. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – замкн. в X если $\forall x\in X$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$

$\exists\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}\subset\{x_\alpha\}$, $\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}: \|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_{\alpha_k}\|<\varepsilon$

Опр. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис бесконечномерного X, если $\forall x\in X$ $\exists$ и единст.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}: x\overset{X}{=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|=0\right)$.

Т4 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис $X\Rightarrow\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ЛНС в X.

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N: \forall n,m>N$ $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

Т5. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сх. $\Rightarrow\{x_n\}$ – фундам. Д-ть самост.

Опр. Если в ЛНП X $\forall$ фундам. посл-ть сх-ся, то X называется полным ЛНП (банахово пр-во)

Т6. $C[a,b]$ – банахово пр-во.

Опр. Если в ЛНП X $\forall$ фундам. посл-ть сх-ся, то X называется полным ЛНП (банахово пр-во)

Т6. $C[a,b]$ – банахово пр-во.

Д-во. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундам. в $C[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n, m > N\ \|f_n - f_m\|_C < \frac{\varepsilon}{2}$,

т.е. $\max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \Rightarrow \{f_n(x)\}$ удовл. критерию Коши для равном. сх-ти $\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows$ на $[a,b]$. $f_n(x) \in C[a,b]$,

$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow f(x) \in C[a,b]$. $\|f_n - f_m\|_C < \frac{\varepsilon}{2}$, $m \to \infty \Rightarrow$ (непр. нормы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (m \to \infty) \Rightarrow \|f_n - f\|_C \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т.е. $f_n \xrightarrow{C} f$.

Т. доказана.

Опр. Если в ЛНП X $\forall$ фундам. посл-сть сх-ся, то X назыв. полным ЛНП (банахово пр-во)

ТБ. $C[a,b]$ – банахово пр-во.

Д-во. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундам. в $C[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n,m>N\ \|f_n-f_m\|_C<\frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\max\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall x\in[a,b]\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon. \Rightarrow \{f_n(x)\}$ удовл. критерию Коши для равном. сх-сти $\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows$ на $[a,b]$. $f_n(x)\in C[a,b]$, $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow f(x)\in C[a,b]$. $\|f_n-f_m\|_C<\frac{\varepsilon}{2}$, $m\to\infty \Rightarrow$ (непр. нормы) $\Rightarrow$ $\Rightarrow (m\to\infty) \Rightarrow \|f_n-f\|_C\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, т.е. $f_n \xrightarrow{C} f$.

Т. доказана

В примерах: $C^*[a,b]$ – полное, l_1 – полное (самост.)

Остальные примеры – неполные пр-ва

Сравнение различных видов сх-сти

1. Равномерная сх-сть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

2. Поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in [a,b]$

3. Сх-сть в L_p, т.е. $\|f_n - f\|_p \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx} = 0$

Сравнение различных видов сх-сти

1. Равномерная сх-сть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

2. Поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a, b]$

3. Сх-сть в L_p, т.е. $\|f_n - f\|_p \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx} = 0$

1. $\Rightarrow$ 2. было раньше.

Сравнение различных видов сх-сти

1. Равномерная сх-сть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

2. Поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

3. Сх-сть в L_p, т.е. $\|f_n - f\|_p \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx} = 0$

1. $\Rightarrow$ 2. было раньше.

1. $\Rightarrow$ 3. Д-во. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}}$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_p^p = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx \le \frac{\varepsilon^p}{2^p(b-a)}(b-a) < \varepsilon^p, \text{ т.е. } \|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

Сравнение различных видов сх-сти

1. Равномерная сх-сть $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$

2. Поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in [a,b]$

3. Сх-сть в L_p, т.е. $\|f_n - f\|_p \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|dx} = 0$

1. ⇒ 2. было раньше.

1. ⇒ 3. Д-во. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}}$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_p^p = \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx \le \frac{\varepsilon^p}{2^p(b-a)}(b-a) < \varepsilon^p, \text{ т.е. } \|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

2. ⇏ 1.; 2. ⇏ 3.

3 ⇏ 1.; 3. ⇏ 2.