

## Неопределённый интеграл

Опр.  $f(x)$  опред. на  $X$  - промежутке. Первообразной  $f(x)$  на  $X$  называется  $F'(x)$  ( $x \in X$ ):  
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$  (на концах - одностор. пр-ые)

## Неопределённый интеграл

Опр.  $f(x)$  опред. на  $X$  - промежутке. Перво-

образной  $f(x)$  на  $X$  называется  $F'(x)$  ( $x \in X$ ):

$F'(x) = f(x) \forall x \in X$  (на концах - одностор. пр-ые)

Опр. Мн-во всех первообразных  $f(x)$  на  $X$

называется неопределённым интегралом от  $f(x)$  на  $X$

$$\int f(x) dx$$

$f(x)$  - подынтегральная функция  
 $f(x) dx$  - подынтегральное выражение

## Неопределённый интеграл

Опр.  $f(x)$  опред. на  $X$  - промежутке. Первообразной  $f(x)$  на  $X$  называется  $F(x)$  ( $x \in X$ ):  
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$  (на концах - одностор. пр-ие)

Опр. Мн-во всех первообразных  $f(x)$  на  $X$  назыв. неопределённым интегралом от  $f(x)$  на  $X$

$\int f(x) dx$   $f(x)$  - подынтегральная функция  
 $f(x) dx$  - подынтегральное выражение

Если  $F(x)$  - одна из первообразных  $f(x)$ , то

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \left( \begin{array}{l} \text{равенство} \\ \text{множеств} \end{array} \right)$$

$F(x)$  - первообразная,  $F(x) + C$  - тоже первообразная

$F(x), \varphi(x)$  - две первообразные  $f(x)$ :  $F'(x) = f(x) = \varphi'(x)$

$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$  (сл. из т. Лагранжа)  $\Rightarrow$

$\varphi(x) - F(x) = C$ , т.е.  $\varphi(x) = F(x) + C$

## Неопределённый интеграл

Опр.  $f(x)$  опред. на  $X$  - промежутке. Первообразной  $f(x)$  на  $X$  называется  $F(x)$  ( $x \in X$ ):  
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$  (на концах - одностор. пр-ие)

Опр. Мно-во всех первообразных  $f(x)$  на  $X$  назыв. неопределённым интегралом от  $f(x)$  на  $X$

$\int f(x) dx$   $f(x)$  - подынтегральная функция  
 $f(x) dx$  - подынтегральное выражение

Если  $F(x)$  - одна из первообразных  $f(x)$ , то

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \left( \begin{array}{l} \text{равенство} \\ \text{множеств} \end{array} \right)$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

(обратимость операций  $d$  и  $\int$ )

$F(x)$  - первообразная,  $F(x) + C$  - тоже первообразная

$F(x), \varphi(x)$  - две первообразные  $f(x)$ :  $F'(x) = f(x) = \varphi'(x)$

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \text{(сл. из т. Лагранжа)} \Rightarrow$$

$$\varphi(x) - F(x) = C, \text{ т.е. } \varphi(x) = F(x) + C$$

$$dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx, \text{ т.е. } \int dF(x) = F(x) + C$$

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x) dx$$

## Неопределённый интеграл

Опр.  $f(x)$  опред. на  $X$  - промежутке. Первообразной  $f(x)$  на  $X$  называется  $F(x)$  ( $x \in X$ ):  
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$  (на концах - одностор. пр-ые)

Опр. Мно-во всех первообразных  $f(x)$  на  $X$  назыв. неопределённым интегралом от  $f(x)$  на  $X$

$\int f(x) dx$   $f(x)$  - подынтегральная функция  
 $f(x) dx$  - подынтегральное выражение

Если  $F(x)$  - одна из первообразных  $f(x)$ , то

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \left( \begin{array}{l} \text{равенство} \\ \text{множеств} \end{array} \right)$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

(обратимость операций  $d$  и  $\int$ )

Т.1.  $f(x), g(x)$  имеют первообр. на  $X$ .  $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$  имеют первообразные на  $X$ , причём

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$F(x)$  - первообразная,  $F(x) + C$  - тоже первообразная

$F(x), \varphi(x)$  - две первообразные  $f(x)$ :  $F'(x) = f(x) = \varphi'(x)$

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \text{(сл. из т. Лагранжа)} \Rightarrow$$

$$\varphi(x) - F(x) = C, \text{ т.е. } \varphi(x) = F(x) + C$$

$$dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx, \text{ т.е. } \int dF(x) = F(x) + C$$

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x) dx$$

$$\text{Д-во т.1. } \int f(x) dx = F(x) + \underline{C_1}, \quad \int g(x) dx = G(x) + \underline{C_2}$$

$$H_{\pm}(x) = F(x) \pm G(x), \quad H'_{\pm}(x) = (F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) =$$

$$= f(x) \pm g(x) \Rightarrow H_{\pm}(x) \text{ - перв. } f(x) \pm g(x), \text{ т.е.}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = H_{\pm}(x) + C = F(x) \pm G(x) + \underline{C}$$

$C_1, C_2, C$  - произвольны  $\Rightarrow$  есть р-во лем. в  
Т. Доказано.

## Неопределённый интеграл

Опр.  $f(x)$  опред. на  $X$  - промежутке. Первообразной  $f(x)$  на  $X$  называется  $F(x) (x \in X)$ :  
 $F'(x) = f(x) \forall x \in X$  (на концах - одностор. пр-ые)

Опр. Мн-во всех первообразных  $f(x)$  на  $X$  назыв. неопределённым интегралом от  $f(x)$  на  $X$

$$\int f(x) dx \quad \begin{array}{l} f(x) - \text{подынтегральная функция} \\ f(x) dx - \text{подынтегральное выражение} \end{array}$$

Если  $F(x)$  - одна из первообразных  $f(x)$ , то

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \begin{array}{l} \text{(ровенство)} \\ \text{интегралов} \end{array}$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

(обратимость операций  $d$  и  $\int$ )

Т1.  $f(x), g(x)$  имеют первообр. на  $X$ .  $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$  имеют первообразные на  $X$ , причём

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Т2.  $f(x)$  имеет первообразную  $\Rightarrow \forall k \quad k \cdot f(x)$  имеет первообр., а если  $k \neq 0$ , то

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

$F(x)$  - первообразная,  $F(x) + C$  - тоже первообразная

$F(x), \varphi(x)$  - две первообразные  $f(x)$ :  $F'(x) = f(x) = \varphi'(x)$

$$(\varphi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \text{(сл. из т. Лагранжа)} \Rightarrow$$

$$\varphi(x) - F(x) = C, \text{ т.е. } \varphi(x) = F(x) + C$$

$$dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx, \text{ т.е. } \int dF(x) = F(x) + C$$

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x) dx$$

$$\text{Д-во Т.1. } \int f(x) dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2$$

$$H_{\pm}(x) = F(x) \pm G(x), \quad H'_{\pm}(x) = (F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x)$$

$$= f(x) \pm g(x) \Rightarrow H_{\pm}(x) - \text{перв. } f(x) \pm g(x), \text{ т.е.}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = H_{\pm}(x) + C = F(x) \pm G(x) + C$$

$C_1, C_2, C$  - произвольны  $\Rightarrow$  есть р-во ин-ва  
Т. Доказана.

$$\text{Д-во Т2. } \int f(x) dx = F(x) + C_1, \quad G(x) = k \cdot F(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = (kF(x))' = k \cdot F'(x) = k f(x), \text{ т.е. } k f(x) \text{ имеет}$$

первообр.  $\int k f(x) dx = k F(x) + C$ , но  $k \int f(x) dx = k(F(x) + C_1)$

$k \neq 0$ ;  $C, C_1$  - произв.  $\Rightarrow$  есть р-во ин-ва.

Т. Доказана

Нахождение неопределённого интеграла называется интегрированием.

Таблица основных неопределённых интегралов

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

1. При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$

*(Faint handwritten notes and additional formulas, including  $\int k dx = kx + C$  and  $\int kx^n dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$ )*

*(Faint handwritten notes and additional formulas, including  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  and  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ )*

# Таблица основных неопределённых интегралов

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

1. При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$2. \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{m.e. } (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$



## Таблица основных неопределённых интегралов

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

1. При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2.  $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

т.е.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$

3.  $a = 1 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = 0$

## Таблица основных неопределённых интегралов

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

4.  $\int \sin x dx = -\cos x + C; 5. \int \cos x dx = \sin x + C$

6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

1. При  $a=0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2.  $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

м.е.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$

3.  $a=1 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $a=0$

## Таблица основных неопределённых интегралов

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x + C; 5. \int \cos x dx = \sin x + C$
6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; 9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

1. При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2.  $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

m.e.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$

3.  $a = 1 \Rightarrow 1$ -ая группа при  $\alpha = 0$

## Таблица основных неопределённых интегралов

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \quad 9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad 11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$1. \text{ При } \alpha = 0 \text{ положим } x^\alpha \equiv 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

$$2. \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{m.e. } (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$3. a = 1 \Rightarrow 1\text{-ая формула при } a = 0$$

$$10. (\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$11. \text{ Проверить самостоятельно.}$$

## Таблица основных неопределённых интегралов

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \quad 9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad 11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + \tilde{C}, \quad a > 0$$

$$1. \text{ При } \alpha = 0 \text{ положим } x^\alpha \equiv 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

$$2. \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{т.е. } (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$3. a = 1 \Rightarrow 1\text{-ая формула при } \alpha = 0$$

$$10. (\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$11. \text{ Проверить самостоятельно.}$$

$$12. a = 0 \Rightarrow 1\text{-ая формула при } \alpha = -2$$

## Таблица основных неопределённых интегралов

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5. \int \cos x dx = \sin x + C$
6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \quad 9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
10.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad 11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
12.  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
13.  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a > 0$

1. При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$
2.  $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$   
т.е.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$
3.  $a = 1 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = 0$
10.  $(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$   
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1 \end{aligned}$$
11. Проверить самостоятельно.
12.  $a = 0 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = -2$
13.  $\left( \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)' = \left( \frac{1}{2a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|] \right)' =$   
$$= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a-x+a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$
  
 $a = 0 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = -2$

## Таблица основных неопределённых интегралов

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C; 5. \int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; 9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a > 0$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$

- При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$
- $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$   
т.е.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$
- $a = 1 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = 0$
- $(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$   
 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 =$   
 $= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$
- Проверьте самостоятельно.
- $a = 0 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = -2$
- $\left( \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)' = \left( \frac{1}{2a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|] \right)' =$   
 $= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a-x+a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$   
 $a = 0 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = -2$

## Таблица основных неопределённых интегралов

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x + C; 5. \int \cos x dx = \sin x + C$
6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; 7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; 9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
10.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C 11. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
12.  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
13.  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a > 0$
14.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a > 0$

1. При  $\alpha = 0$  положим  $x^\alpha \equiv 1 \forall x \in (-\infty, +\infty)$
2.  $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$   
т.е.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$
3.  $a = 1 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = 0$
10.  $(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$   
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$
11. Проверить самостоятельно.
12.  $a = 0 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = -2$
13.  $\left( \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)' = \left( \frac{1}{2a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|] \right)' =$ 
$$= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a-x-a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$
  
 $a = 0 \Rightarrow 1$ -ая формула при  $\alpha = -2$
15.  $(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} =$ 
$$= \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$



## Примеры

$$1. \int \left( 5 \sin x - 3 + 4x^3 - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2+4} \right) dx = 5 \int \sin x dx - 3 \int dx + 4 \int x^3 dx - 2 \int \frac{dx}{x} - 6 \int \frac{dx}{x^2+4} = -5 \cos x - 3x + x^4 - 2 \ln|x| - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

## Примеры

$$1. \int (5 \sin x - 3 + 4x^3 - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2+4}) dx = 5 \int \sin x dx - 3 \int dx + 4 \int x^3 dx$$

$$- 2 \int \frac{dx}{x} - 6 \int \frac{dx}{x^2+4} = -5 \cos x - 3x + x^4 - 2 \ln|x| - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = - \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx = - \int dx - \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

## Примеры

$$1. \int \left( 5 \sin x - 3 + 4x^3 - \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2+4} \right) dx = 5 \int \sin x dx - 3 \int dx + 4 \int x^3 dx$$

$$- 2 \int \frac{dx}{x} - 6 \int \frac{dx}{x^2+4} = -5 \cos x - 3x + x^4 - 2 \ln|x| - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = - \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx = - \int dx - \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$3. \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$