Неопределённый интеграл

Опр. $f(x)$ опред. на X - промежуток. Первообразной $f(x)$ на X называется $F(x)$ $(x \in X)$:

$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$ (на концах - одностор. пр-ые)

Неопределённый интеграл

Опр. $f(x)$ опред. на X – промежуток. Первообразной $f(x)$ на X называется $F(x)$ $(x \in X)$:
$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$ (на концах – односторон. пр-ые)

Опр. Мн-во всех первообразных $f(x)$ на X назыв. неопределённым интегралом от $f(x)$ на X

$$\int f(x)dx$$

$f(x)$ – подынтегральная функция
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение

Неопределённый интеграл

Опр. $f(x)$ опред. на X – промежуток. Первообразной $f(x)$ на X называется $F(x)$ $(x \in X)$:
$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$ (на концах – одностор. пр-ые)

Опр. Мн-во всех первообразных $f(x)$ на X называв. неопределённым интегралом от $f(x)$ на X

$\int f(x)dx$ — $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение

Если $F(x)$ – одна из первообразных $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \left(\begin{matrix}\text{равенство}\\ \text{множеств}\end{matrix}\right)$$

$F(x)$ – первообразная, $F(x)+C$ – тоже первообразная

$F(x)$, $\Phi(x)$ – две первообразные $f(x)$: $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

$(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ (сл. из т. Лагранжа) $\Rightarrow$

$\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$

Неопределённый интеграл

Опр. $f(x)$ опред. на X – промежуток. Первообразной $f(x)$ на X называется $F(x)$ $(x \in X)$:
$F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$ (на концах – одностор. пр-ные)

Опр. Мн-во всех первообразных $f(x)$ на X назыв. неопределённым интегралом от $f(x)$ на X

$\int f(x)dx$ — $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение

Если $F(x)$ – одна из первообразных $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \left(\begin{matrix}\text{равенство}\\ \text{множеств}\end{matrix}\right)$$

$\int dF(x) = F(x) + C$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
(обратимость операций d и $\int$)

$F(x)$ – первообразная, $F(x) + C$ – тоже первообразная

$F(x)$, $\Phi(x)$ – две первообразные $f(x)$: $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

$(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ (сл. из т. Лагранжа) $\Rightarrow$

$\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$

$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx$

Неопределённый интеграл

Опр. $f(x)$ опред. на X – промежуток. Первообразной $f(x)$ на X называется $F(x)$ $(x \in X)$: $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$ (на концах – одностор. пр-ые)

Опр. Мн-во всех первообразных $f(x)$ на X назыв. неопределённым интегралом от $f(x)$ на X

$\int f(x)dx$ $\quad$ $f(x)$ – подынтегральная функция
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение

Если $F(x)$ – одна из первообразных $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \left(\begin{matrix}\text{равенство}\\ \text{множеств}\end{matrix}\right)$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

(обратимость операций d и $\int$)

Т1. $f(x)$, $g(x)$ имеют первообр. на X. $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$ имеют первообразные на X, причём

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$F(x)$ – первообразная, $F(x) + C$ – тоже первообразная

$F(x)$, $\Phi(x)$ – две первообразные $f(x)$: $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

$(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ (сл. из т. Лагранжа) $\Rightarrow$

$\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$

$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx$

Д-во т. 1. $\int f(x)dx = F(x) + \underline{C_1}$, $\int g(x)dx = G(x) + \underline{C_2}$

$H_\pm(x) = F(x) \pm G(x)$, $H'_\pm(x) = (F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) =$

$= f(x) \pm g(x) \Rightarrow H_\pm(x)$ – перв. $f(x) \pm g(x)$, т.е.

$\int (f(x) \pm g(x))dx = H_\pm(x) + C = F(x) \pm G(x) + \underline{C}$

C_1, C_2, C – произвольны $\Rightarrow$ есть р-во мн-в

Т. доказана.

Неопределённый интеграл

Опр. $f(x)$ опред. на X - промежуток. Первообразной $f(x)$ на X называется $F(x)$ $(x \in X)$: $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$ (на концах - одностор. пр-ые)

Опр. Мн-во всех первообразных $f(x)$ на X назыв. неопределённым интегралом от $f(x)$ на X

$\int f(x)dx$ — $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение

Если $F(x)$ - одна из первообразных $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \left(\text{равенство множеств}\right)$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

(обратимость операций d и $\int$)

T1. $f(x), g(x)$ имеют первообр. на X $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$ имеют первообразные на X, причём

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

T2. $f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k$ $k \cdot f(x)$ имеет первообр., а если $k \neq 0$, то

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx.$$

$F(x)$ - первообразная, $F(x) + C$ - тоже первообразная

$F(x), \Phi(x)$ - две первообразные $f(x)$: $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

$(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ (сл. из т. Лагранжа) $\Rightarrow$

$\Phi(x) - F(x) = C$, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$

$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx$

Д-во т.1. $\int f(x)dx = F(x) + \underline{C_1}$, $\int g(x)dx = G(x) + \underline{C_2}$

$H_\pm(x) = F(x) \pm G(x)$, $H'_\pm(x) = (F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) =$
$= f(x) \pm g(x) \Rightarrow H_\pm(x)$ - перв. $f(x) \pm g(x)$, т.е.

$\int (f(x) \pm g(x))dx = H_\pm(x) + C = F(x) \pm G(x) + \underline{C}$

C_1, C_2, C - произвольны $\Rightarrow$ есть р-во мн-в

Т. доказана.

Д-во т2. $\int f(x)dx = F(x) + C_1$. $G(x) = k \cdot F(x)$

$\Rightarrow G'(x) = (kF(x))' = k \cdot F'(x) = k f(x)$, т.е. $k f(x)$ имеет первообр.. $\int k f(x)dx = kF(x) + C$, но $k \int f(x)dx = k(F(x) + C_1)$

$k \neq 0$; C, C_1 - произв. $\Rightarrow$ есть р-во мн. в.

Т. доказана

Нахождение неопределённого интеграла называется интегрированием.

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^{\alpha} \equiv 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^\alpha \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^{\alpha} \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

   т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \ a>0, \ a\neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^{\alpha} \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \ \ \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$; 9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^{\alpha} \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a>0, \quad a\neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$; 9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ 11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^\alpha \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

10. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

11. Проверить самостоятельно.

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \ a>0, \ a\neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$; 9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ 11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \tilde{C}$, $a>0$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^{\alpha} \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

10. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1$$

11. Проверить самостоятельно.

12. $a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a>0, \quad a \neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$; 9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ 11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \tilde{C}$, $a>0$

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a>0$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^\alpha \equiv 1 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

3. $\alpha = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

10. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1$$

11. Проверить самостоятельно.

12. $a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

13. $\left(\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \left(\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right]\right)' =$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x+a-x+a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

$a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a>0, \ a \neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

8. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$; 9. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$

10. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$ 11. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + \tilde{C}$, $a>0$

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a>0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + \tilde{C}, \quad a>0$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^\alpha \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т.е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

10. $(\mathrm{th}\, x)' = \left(\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\right)' = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1$$

11. Проверить самостоятельно.

12. $a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

13. $$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \left(\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right]\right)' =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a-x+a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

$a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a>0, \ a \neq 1$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$; 9. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ 11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \tilde{C}$, $a>0$

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a>0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + \tilde{C}, \ a>0$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ a>0$

1. При $\alpha = 0$ положим $x^\alpha \equiv 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

2. $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases} \Rightarrow (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$

т. е. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0$

3. $a = 1 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = 0$

10. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1$$

11. Проверить самостоятельно.

12. $a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

13. $\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \left(\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right]\right)' =$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a-x+a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

$a = 0 \Rightarrow$ 1-ая формула при $\alpha = -2$

15. $\left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}\,(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Примеры

1. $\int\left(5\sin x-3+4x^3-\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2+4}\right)dx=5\int\sin x\,dx-3\int dx+4\int x^3dx-$

$-2\int\frac{dx}{x}-6\int\frac{dx}{x^2+4}=-5\cos x-3x+x^4-2\ln|x|-3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C$

Примеры

1. $\int\left(5\sin x-3+4x^3-\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2+4}\right)dx=5\int\sin x\,dx-3\int dx+4\int x^3dx-$

$-2\int\frac{dx}{x}-6\int\frac{dx}{x^2+4}=-5\cos x-3x+x^4-2\ln|x|-3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C$

2. $\int\frac{x^2\,dx}{1-x^2}=-\int\frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx=-\int dx-\int\frac{dx}{x^2-1}=-x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

Примеры

1. $\int\left(5\sin x-3+4x^3-\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2+4}\right)dx=5\int\sin x\,dx-3\int dx+4\int x^3dx-$

$-2\int\frac{dx}{x}-6\int\frac{dx}{x^2+4}=-5\cos x-3x+x^4-2\ln|x|-3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C$

2. $\int\frac{x^2\,dx}{1-x^2}=-\int\frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx=-\int dx-\int\frac{dx}{x^2-1}=-x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

3. $\int \mathrm{ctg}^2x\,dx=\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx=\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int dx=-\mathrm{ctg}\,x-x+C$