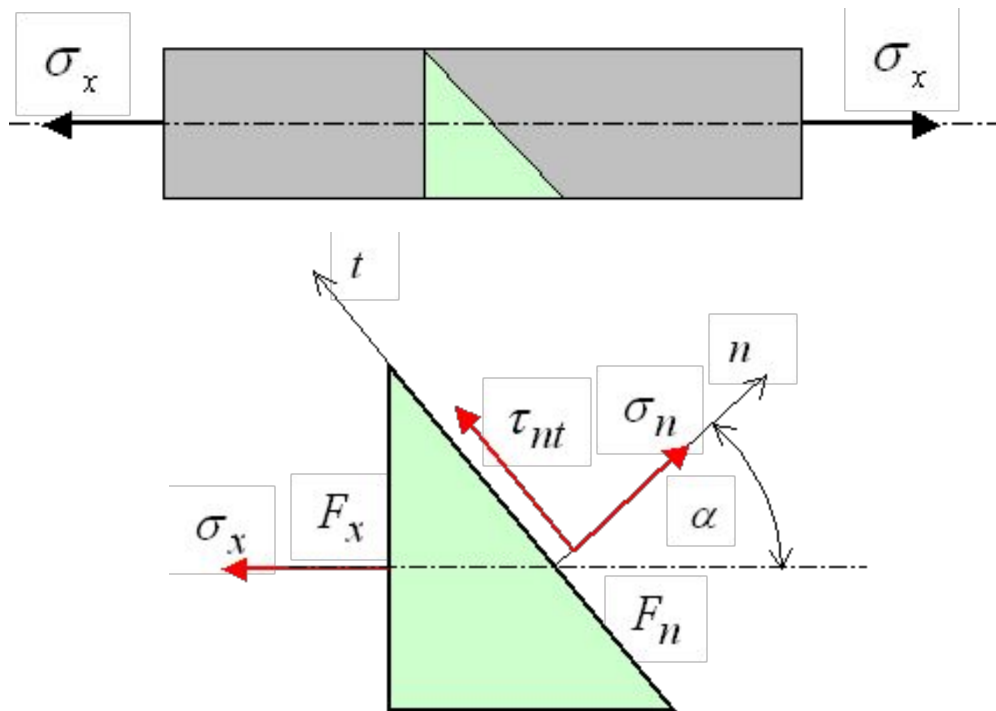


Теория напряженного и деформированного состояний

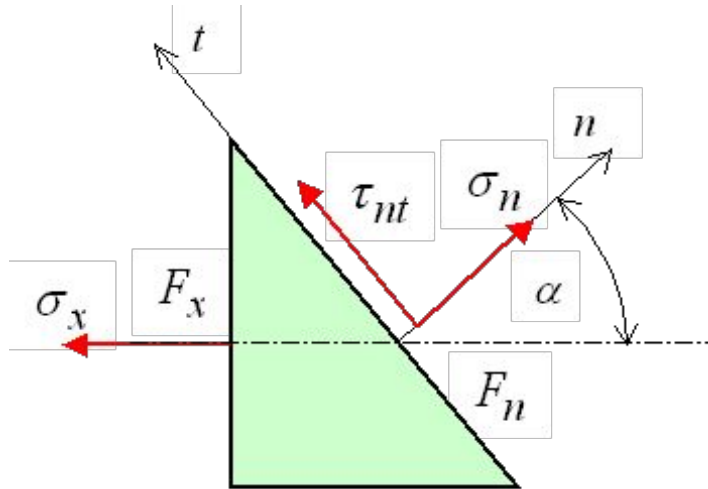
Анализ напряженного состояния

Твердое тело реагирует на внешнее воздействие целиком, как сплошная среда. Но реакция в каждой точке тела будет различной.

Математическое описание этой реакции в выбранной точке тела зависит от выбора системы координат, связанной с этой точкой.



Напряжения на наклонной площадке при растяжении стержня



$$F_n = \frac{F_x}{\cos(\alpha)}$$

Спроектируем все силы на направление нормали n ,

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) = 0,$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\alpha)$$

Спроектируем все силы на направление оси t ,

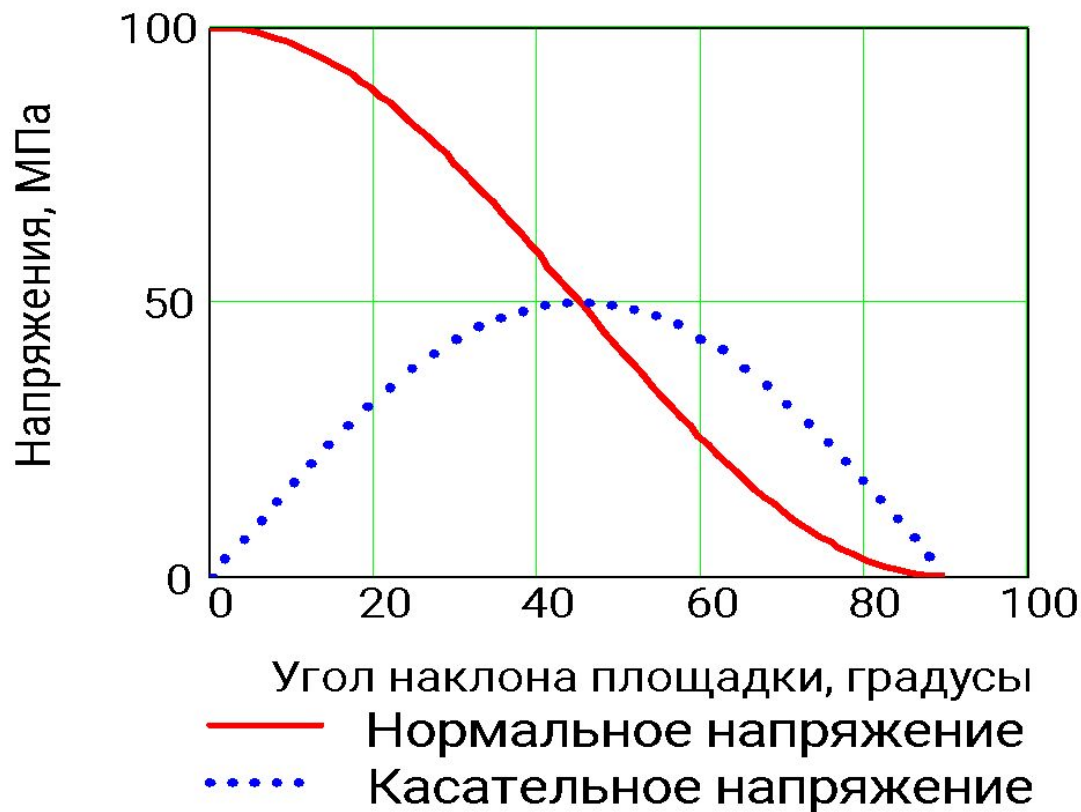
$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) = 0,$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

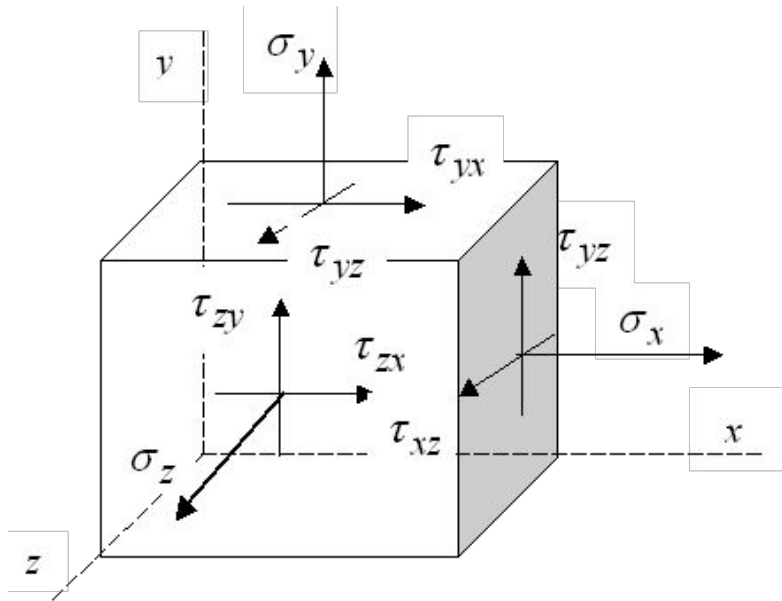
Напряжения на наклонной площадке при растяжении стержня (продолжение)

$$\sigma_n(\alpha) := \sigma_x \cdot \cos^2(\alpha)$$

$$\tau_{nt}(\alpha) := \sigma_x \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$



Напряженное состояние в произвольной точке



$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

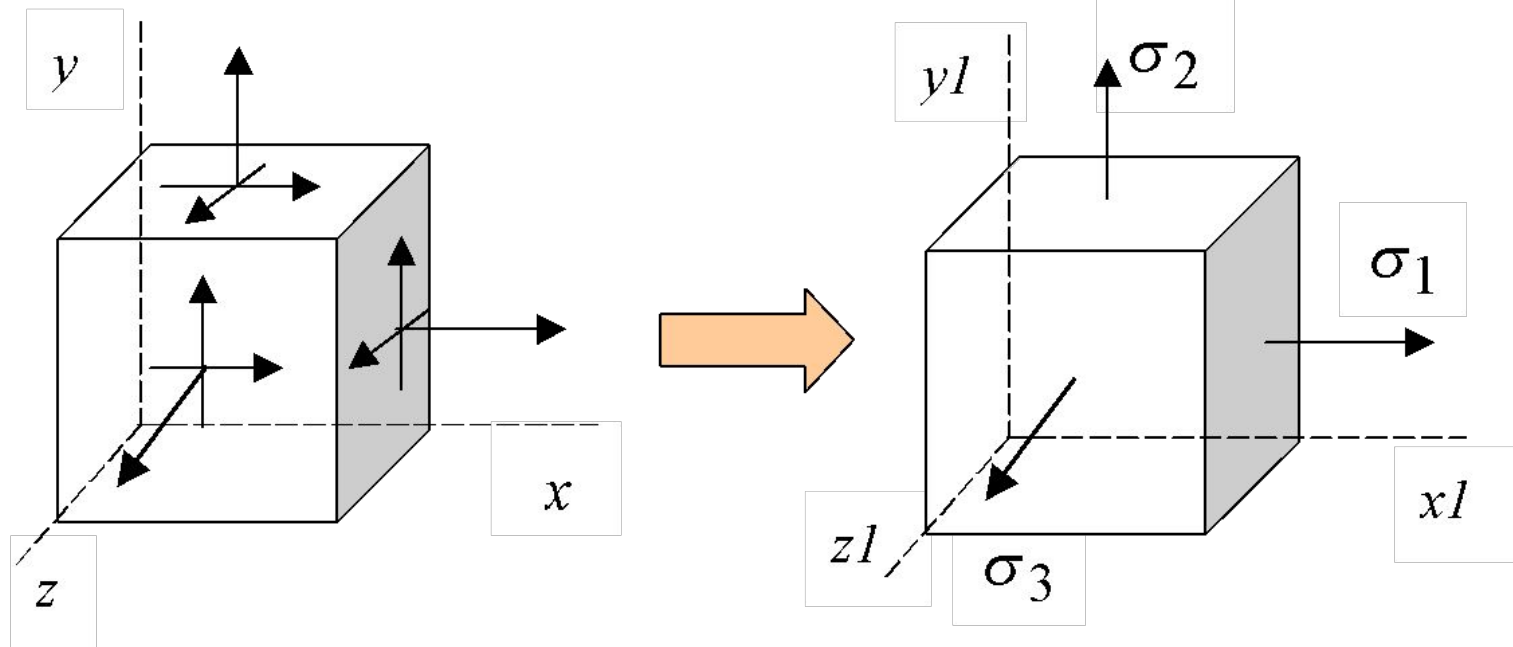
Касательные напряжения должны удовлетворять условиям равновесия – сумма обусловленных ими вращающих моментов должна быть равна нулю. Из этого следует **закон парности** касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} .$$

Касательные напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, равны и направлены либо к общему ребру, либо от ребра.

Теория упругости доказывает, что

1. Всегда существуют площадки, на которых *отсутствуют* касательные напряжения.
2. Эти площадки взаимно перпендикулярны и называются *главными* площадками.
3. На трех *главных* площадках действуют только нормальные напряжения, которые называют *главными*. Их обозначают как σ_1 , σ_2 и σ_3 , причем, по соглашению, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



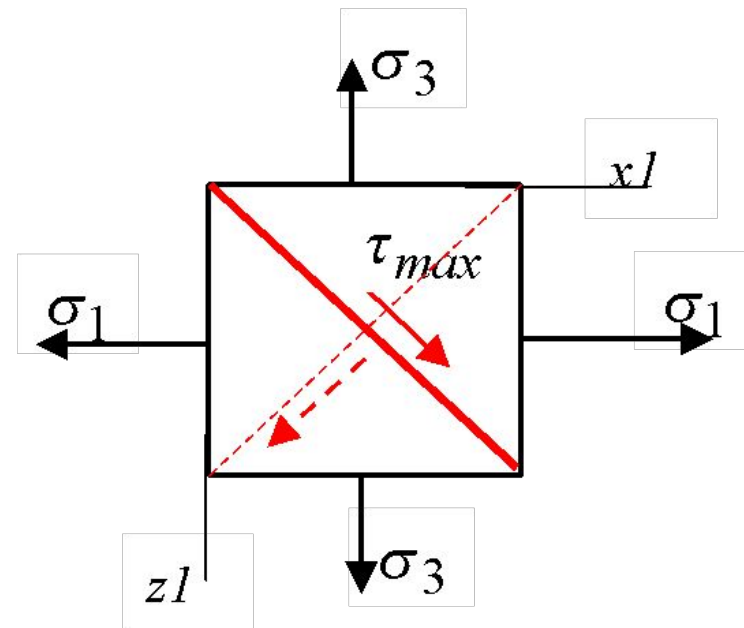
Теория упругости доказывает, что (продолжение)

1. Напряжения σ_1 и σ_3 - это экстремальные значения нормальных напряжений для всех площадок, проходящих через данную точку.
2. Тензор главных напряжений Σ_{123} имеет диагональный вид.
3. Наибольшие касательные напряжения τ_{max} равны

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

и действуют на площадке, наклоненной к σ_1 и σ_3 на 45° .

$$\Sigma_{123} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$



Классификация напряженных состояний

Трехосное или объёмное

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 \neq 0$$

Двухосное или плоское

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_2 \quad \sigma_{min} = \sigma_3$$

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_1 \quad \sigma_{min} = \sigma_3$$

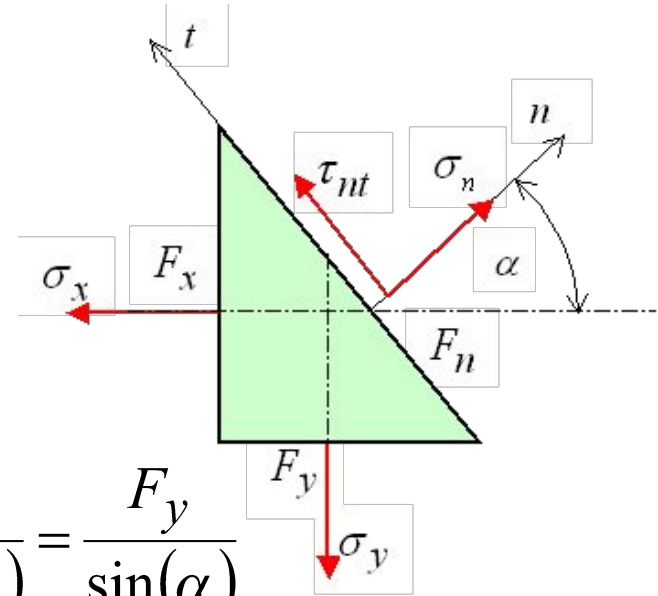
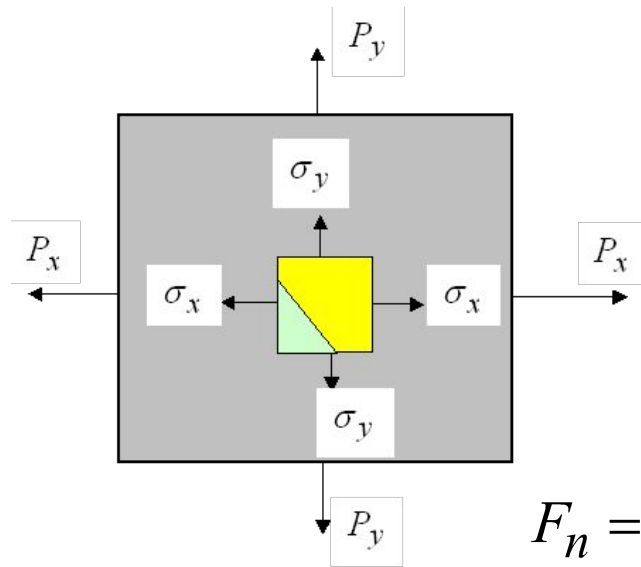
$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_1 \quad \sigma_{min} = \sigma_2$$

Одноосное или линейное

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 \neq 0 & \sigma_2 = 0 & \sigma_3 = 0 \\ \sigma_1 = 0 & \sigma_2 \neq 0 & \sigma_3 \neq 0 \end{array}$$

Для уверенного определения типа напряженного состояния необходимо знать значения всех трех главных напряжений.

Анализ двухосного напряженного состояния



$$F_n = \frac{F_x}{\cos(\alpha)} = \frac{F_y}{\sin(\alpha)}$$

Спроектируем все силы на ось ***n***

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) - \sigma_y F_y \sin(\alpha) = 0$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha)$$

Спроектируем все силы на ось ***t***

$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) - \sigma_y F_y \cos(\alpha) = 0$$

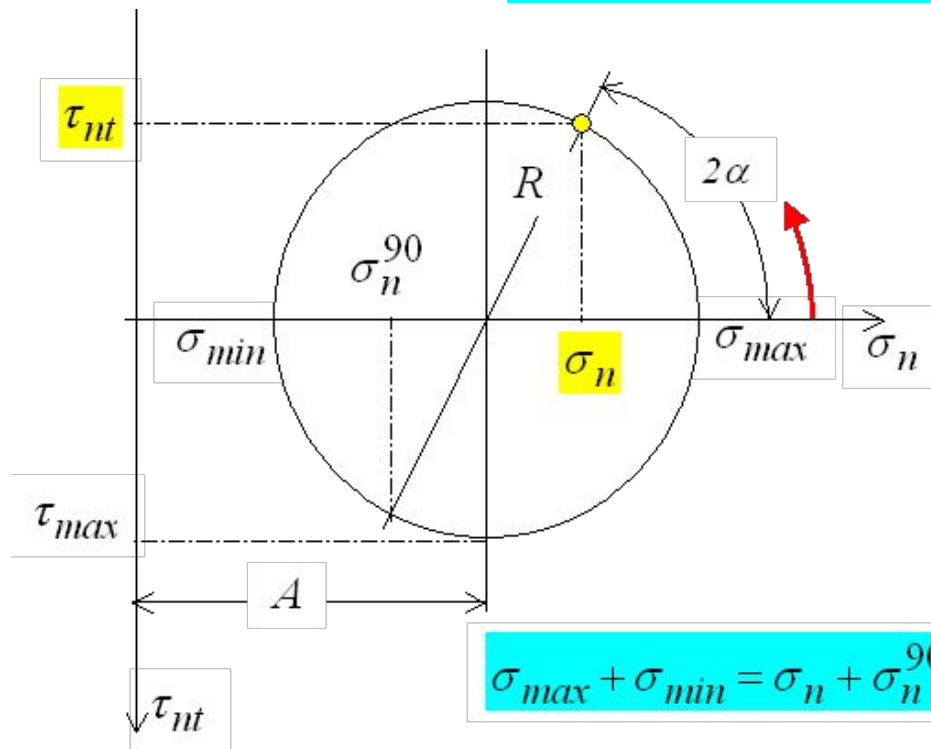
$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha)$$

Круг Мора

$$\sigma_{max} = \sigma_x \quad \sigma_{min} = \sigma_y$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos(2\alpha)$$

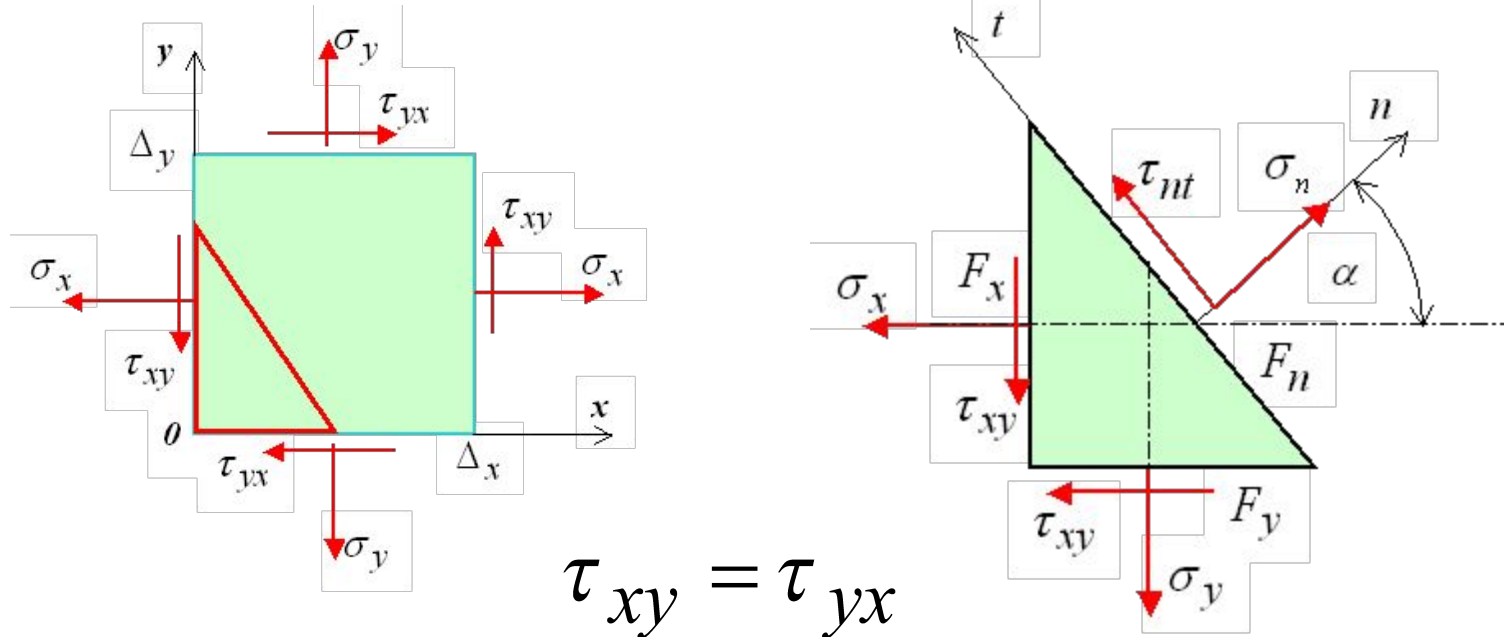
$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin(2\alpha)$$



$$A = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Общий случай анализа двухосного НС



$$(1) \quad \sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$(2) \quad \tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha)$$

Вычисление главных напряжений

Допустим, что наклонная площадка главная, т.е. $\tau_{nt} = 0$.

Из уравнения (2) получаем направление главного напряжения

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

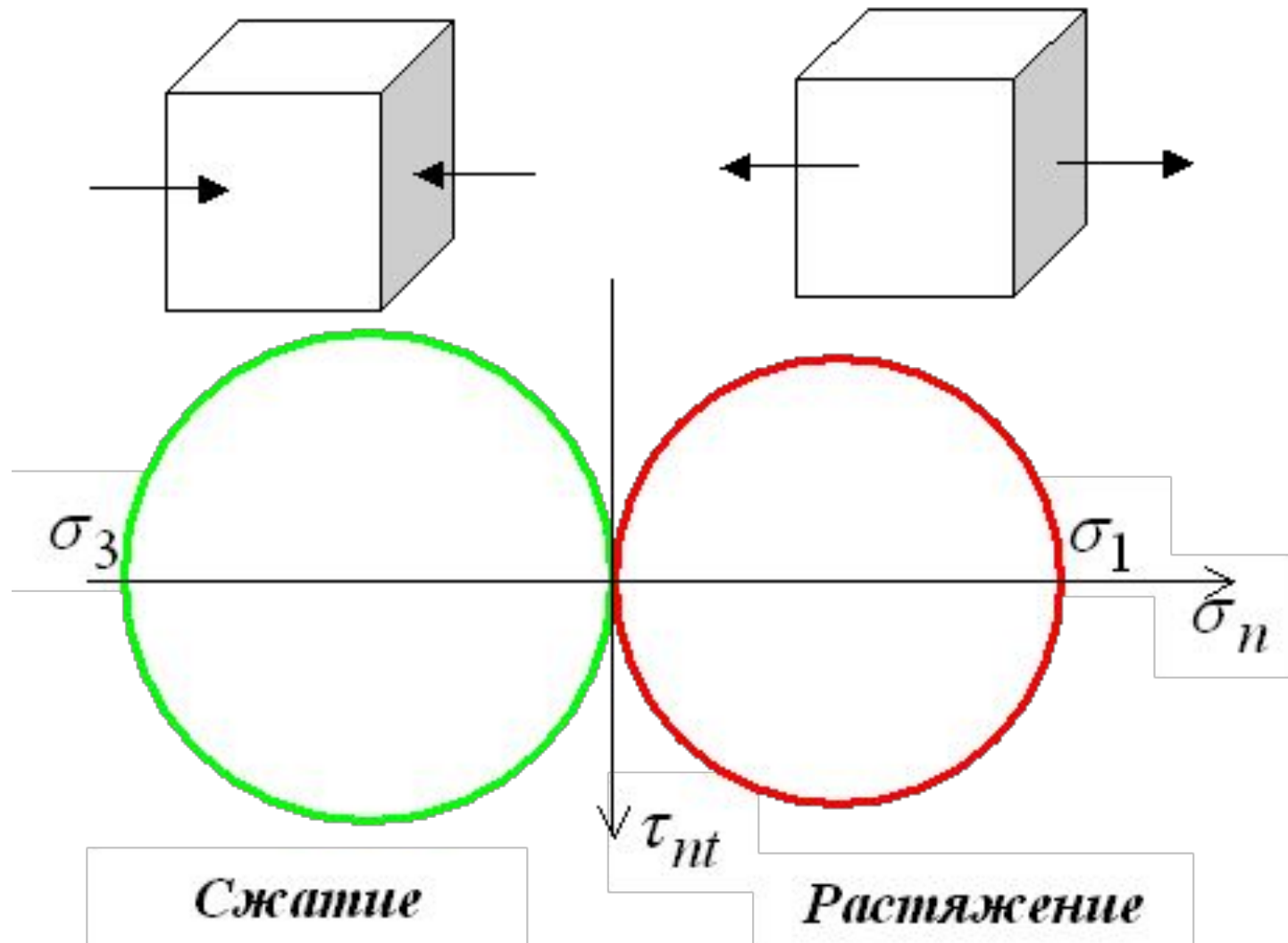
Уравнение (1) приводится к следующему виду:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

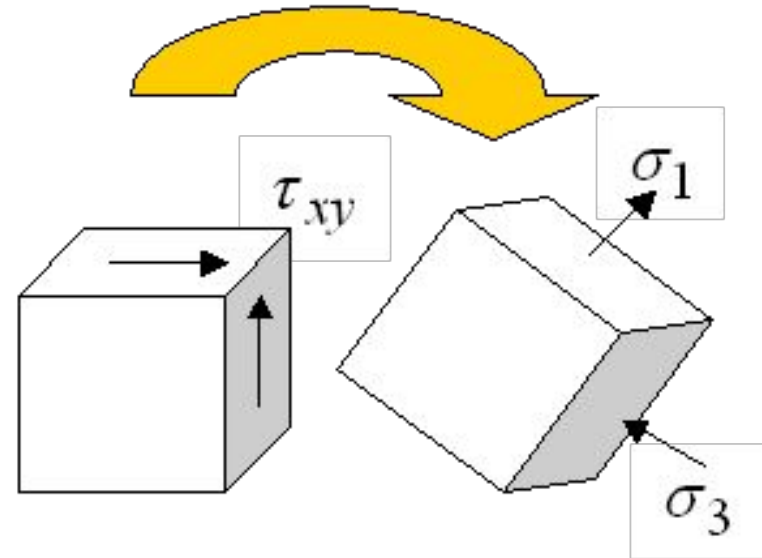
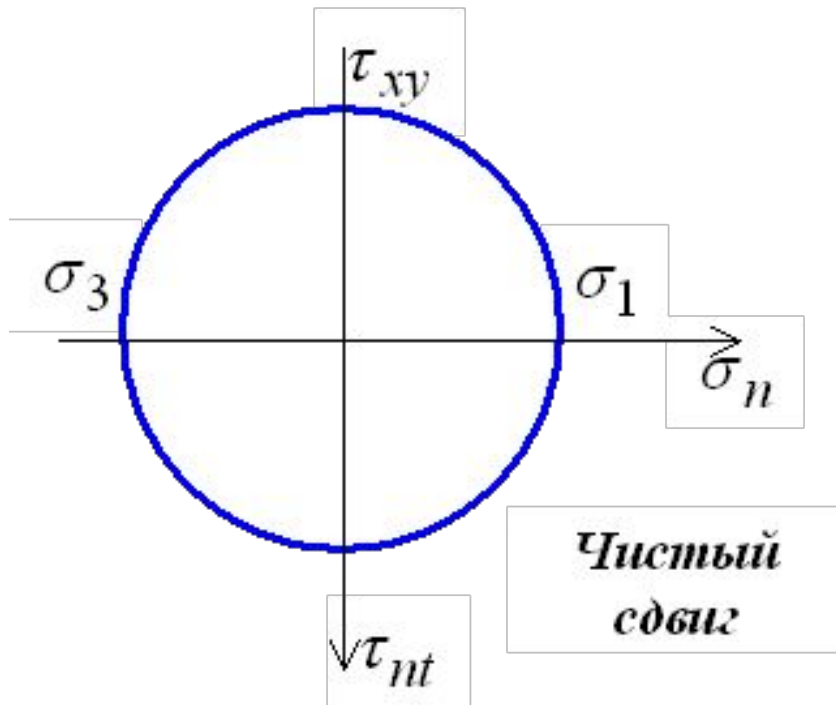
$$\sigma_x > \sigma_y \quad \sigma_n = \sigma_{max}$$

$$\sigma_{max/min} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Частные случаи: растяжение и сжатие



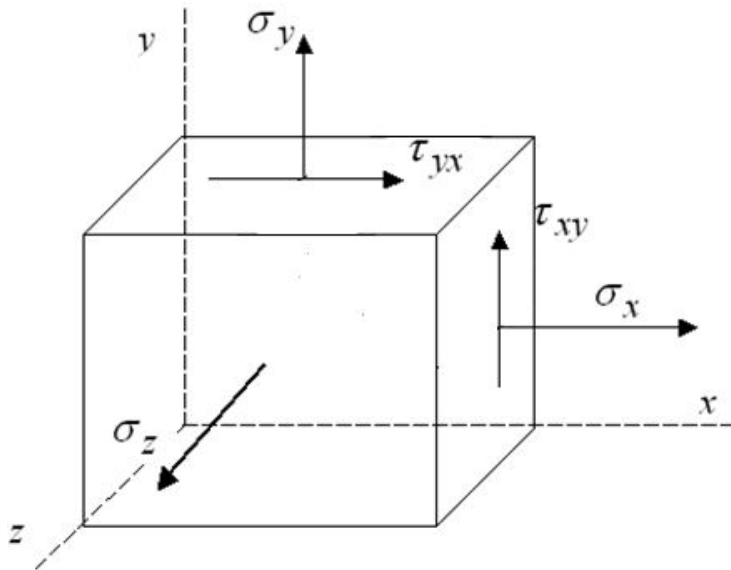
Частные случаи: чистый сдвиг



$$|\tau_{xy}| = |\sigma_1| = |\sigma_3|$$

Анализ трехосного напряженного состояния

- Рассмотрим частный случай трехосного НС



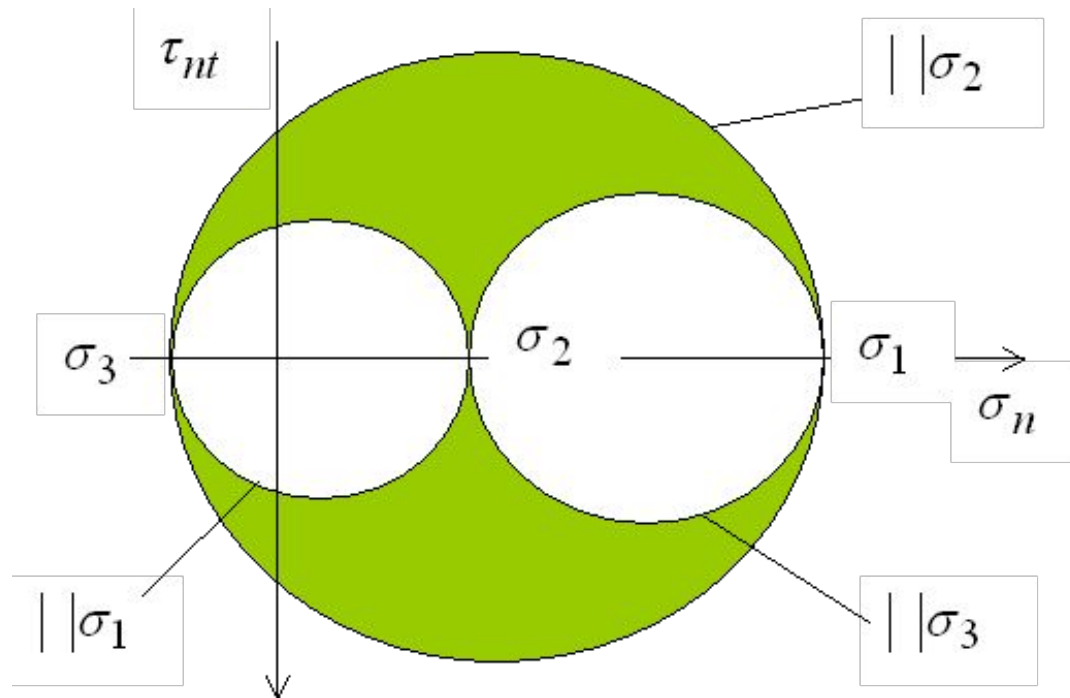
$$\sigma_{max/min} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \max\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

$$\sigma_2 = \min \max\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

$$\sigma_3 = \min\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

Круги Мора для трехосного НС



Поскольку главные напряжения – это экстремальные значения напряжений для данного напряженного состояния, то точки, соответствующие всем возможным описаниям данного напряженного состояния, лежат в закрашенной области, включая точки на всех трех окружностях

